Геометрия, лекция 9 декабря 2020г
(первая половина)

Критерий диагонализуемости оператора $F: V \to V$:

(1) F задаётся в некотором базисе диагональной матрицей $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

(2) $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} V_\lambda$, $V_\lambda = \{ v \in V \mid Fv = \lambda v \}$

$\operatorname{Spec} F$ = множество корней характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$

$\Updownarrow$

(3) $\dim V_\lambda$ = кратности корня λ многочлена $\chi_F(t)$

$\left[\bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} V_\lambda \right.$ всегда прямая $\left.\right]$

$\Updownarrow$

(4) F можно аннулировать сепарабельным многочленом (т.е. многочленом без кратных корней), полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ на линейные множители.

(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) это тавтология

$$\deg \chi_F(t) = \dim V$$

$$(3) \Leftrightarrow \sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \deg V$$

$$(1,2,3) \Rightarrow (4) \qquad F = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$\boxed{V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}} V_\lambda} \quad V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$$

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}} (\lambda E - F) = 0$$

(4) ⇒ по теореме о разложении

$$V = \bigoplus \ker(\lambda E - F)$$

где λ пробегает корни аннулирующего сепарабельного многочлена

Отступление о коммутирующих операторах:

$FG = GF \Rightarrow$ ядро и образ любого многочлена от F являются G-инвариантными подпр-вами (т.е. G переводит их в себя)

$f(F) = \underline{a_0 E + a_1 F + \ldots + a_m F^m} \Rightarrow G f(F) = f(F) G$

$v \in \ker f(F) \Rightarrow Gv \in \ker f(F)$

$$f(F) G v = G \underbrace{f(F) v}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = 0$$

$w = f(F) \cdot v \in \operatorname{im} f(F) \Rightarrow Gw \in \operatorname{im} f(F),$

т. к. $Gw = G f(F) v = f(F) G v \in \operatorname{im} f(F).$

В частности все собственные подпр-ва

$$V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$$

и все корневые подпр-ва

$$K_\lambda = \bigcup_{n \geq 1} \ker(\lambda E - F)^n$$

оператора F G-инварианты.

Теорема: (1) Над алгебраически замкнутым полем k любое множество коммутирующих операторов имеет общий для всех операторов собственный вектор.

(2) Над любым полем любое множество коммутирующих диагонализуемых операторов можно одновременно диагонализовать в одном базисе.

Док-во: индукция по $\dim V$.

Если все операторы скалярны (имеют вид λE), то доказывать нечего, в частности при $\dim V = 1$ утверждения верны.

Пусть $\dim V > 1$ и есть хоть один не скалярный оператор $F \neq \lambda E$.

- если поле алгебраически замкнуто, то у F есть ненулевое собственное подпр-во $V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$

$$0 \neq V_\lambda \neq V, \quad \dim V_\lambda < \dim V$$

и все операторы $G : V_\lambda \to V_\lambda \Rightarrow$ у всех операторов есть общий собственный вектор внутри V_λ (по индукции).

- если все операторы диагонализуемы то их ограничение на все собственные подпр-ва оператора F тоже диагонализуемы.

(если G диагонализуем на V и $G(U) \subset U$, то $G|_U$ тоже диагонализуемо!!)

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, F} V_\lambda$$

все G диагонализуемы в одном базисе на каждом подпр. в V_λ по индукции.

⇓

все операторы можно одновременно диагонализировать

Пример Пусть $G \subset GL(V)$ - конечная группа операторов, $|G| \not\vdots \operatorname{char} \Bbbk$, $\Bbbk$ - алгебраически замкнуто.

⇓

любой оператор $F \in G$ диагонализуем

$\forall g \in G \qquad g^{|G|} = e$

$\forall F \in G$ аннулируется многочленом $f(t) = t^{|G|} - 1$. Он сепарабельный, если $|G| \not\vdots \operatorname{char} \Bbbk$

$f'(t) = \underset{\overset{\neq}{0}.}{|G|} \cdot t^{|G|-1}$ взаимно прост с $t^{|G|}-1$

Если группа G абелева, то все $F \in G$ можно одновременно диагонализировать.

Наоборот, если все операторы из G одновременно диагонализуются, то G абелева

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

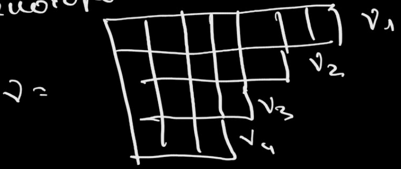
Оператор F называется *нильпотентным*, если $F^N=0$ для некоторого $N\in\mathbb{N}$.

F аннулируется многочленом t^N $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимальный многочлен $\mu_F(t)=t^m$

где $m \leq \dim V$.

Базис $e_1,\dots,e_n$ в V называется *циклическим* (или *жордановым*) для нильпотентного оператора $F: V\to V$, если базисные векторы можно так расставить в n-клеточной диаграммы клетки некоторой Юнга



$$\nu = \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_\ell$$

что оператор действует по правилу:

$$0 \leftarrow * \;\dots\; * \leftarrow * \leftarrow * \qquad \nu_1 \text{ векторов}$$

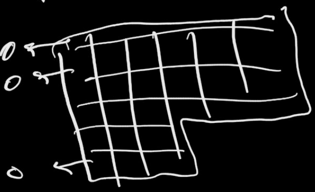
$0 \leftarrow * - \leftarrow *$

каждый базисный вектор переходит в соседний слева, а все векторы первого столбца переходят в нуль.

Диаграмма Y называется цикловым типом нильпотентного оператора F, обозначение: $Y(F)$.

Теорема: Цикловой тип не зависит от выбора Жорданова базиса, Жорданов базис всегда существует (над любым полем!) и два нильпотентных оператора подобны если и только если у них одинаковый цикловой тип.

Док-во:



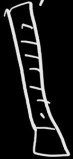
$F: * \leftarrow *$

!

$\dim \ker F^k$ = сумма длин первых k столбцов k-тый столбец диаграммы $\nu(F)$ имеет длину $\dim \ker F^k - \dim \ker F^{k-1}$

Существование жорданова базиса:

индукция по $\dim V$.

Если $F=0$ (это так, если $\dim V = 1$) то любой базис годится и $\nu(F) =$ 

Пусть $F \neq 0$, $\ker F \neq 0$, $\ker F \neq V$.

$V/\ker F \neq 0$ и $\dim V/\ker F < \dim V$

F корректно задаёт линейный оператор

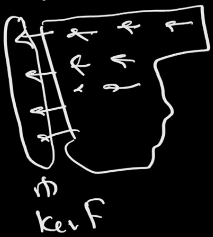
$\bar{F} : V/\ker F \longrightarrow V/\ker F : \underline{[v] \longrightarrow [Fv]}$

$[v_1] = [v_2] \Rightarrow v_1 = v_2 + \underset{\substack{\cap \\ \ker F}}{w} \Rightarrow Fv_1 = Fv_2$

По индукции $\exists$ вектора $w_1, \dots, w_m \in V$, классы которых составляют жорданов базис оператора $\hat{F}$ на $V/\ker F$.

$[w_1] \dots [w_m]$ – это базис в $V/\ker F$

F:



$\mu = V(\hat{F})$

Зам. 1: $Fw_1, \dots, Fw_m$ линейно независимы в V.

Док-во: $\sum \lambda_i F w_i = 0$

$$\Updownarrow$$

$$F\left(\sum \lambda_i w_i\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

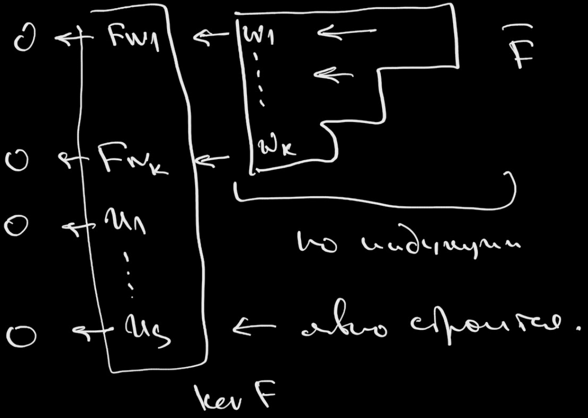
$$\sum \lambda_i w_i \in \ker F$$

$\sum \lambda_i [w_i] = [0]$ в $V/\ker F$

т.к. $[w_i]$ образуют базис в $V/\ker F$, все $\lambda_i = 0$.

Пусть в первом столбце диаграммы оператора $\bar{F}$ стоят векторы $w_1, \ldots, w_k$

$Fw_1, \ldots, Fw_k \in \ker F$ и линейно независимы. $\Rightarrow$ дополним их до базиса в $\ker F$ векторами $u_1, \ldots, u_s$



У подобных операторов одинаковые диаграммы: если $F = CGC^{-1}$

$$\dim \ker F^k = \dim \ker \underset{\overset{\parallel}{CF^kC^{-1}}}{G^k}$$