Геометрия, лекция 3 декабря 2020г (первая половина)

- Контрольная №3 пройдет 17 декабря с $9^{\underline{00}}$ до $11^{\underline{00}}$ на платформе edu.hse.ru

вход по корпоративному e-mail и паролю от него

- Экзамен будет в среду 23 декабря с $11^{\underline{00}}$ до $15^{\underline{00}}$ там же.

Линейные операторы

V – конечномерное векторное пр-во над $\Bbbk$

$F : V \to V$ линейное отображение.

Пара (V, F) называется пространством с оператором над $\Bbbk$. Гомоморфизм пр-в с операторами

это такое

линейное

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "C"'] & V_1 \arrow[d, "C"] \\ V_2 \arrow[r, "F_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

$: \; CF_1 = F_2C$

$C : V_1 \to V_2$

C наз. изоморфизмом пространств с операторами, если C биективен (т.е. явл. линейным изоморфизмом).

$$CF_1 = F_2C \Leftrightarrow F_2 = CF_1C^{-1}$$

говорят, что F_2 сопряжён к F_1 посредством изоморфизма C.

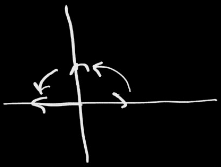
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & V \\ \cup & \cup \\ U \arrow[r, "F|_U"] & U \end{tikzcd}$$

Подпр-во $U < V$ называется F-инвариантным, если $F(U) < U$. $\Leftrightarrow$ парочка $(U, F|_U)$ это "подпр-во с оператором" в (V, F)

Пример: $\dfrac{\Bbbk[t]}{(t^2+1)} \circlearrowleft F$ - умножение на класс $[t]$

$\Bbbk = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{cc} [1] & [t] \\ \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}$$



поворот на 90°

Над полем $\mathbb{R}$ инвариантных подпр-в (кроме 0 и всего $\mathbb{R}^2$) нет.

(V, F) наз. неприводимым (или простым) если в V нет $\neq 0$ и $\neq V$ инвариантных подпр-в.

(V, F) наз. разложимым если

$$V = U \oplus W \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} F(U) \subset U \\ F(W) \subset W \end{array}$$

Пример: в V могут быть инвариантные подпр-ва, но V при этом будет неразложимо

$$V = \frac{\Bbbk[t]}{(t^n)} \circlearrowleft F : [f] \longmapsto [tf]$$

умножение на класс $[t]$

$n \geqslant 2$

$$\begin{array}{ccc} V = & W & \oplus\ U \\ & \rotatebox{90}{$\neq$} & \rotatebox{90}{$\neq$} \\ & 0 & 0 \\ & f & g \end{array}$$

$f = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\neq$} \\ 0}}{f_k} t^k +$ старшие

$g = \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\neq$} \\ 0}}{g_m} t^m +$ старшие

$f \longmapsto [t]^{n-1-k} f = [t^{n-1}]$

$f_k = g_m = 1$

(поделим на константы)

$g \longmapsto [t]^{n-1-m} g = [t^{n-1}]$

$[t^{n-1}] \in W \cap U$

∘ Любое пр-во с оператором является прямой суммой неразложимых F-инвар. подпр-в.

$$F = \begin{array}{c|c|c} & U & W \\ \hline U & * & 0 \\ \hline W & 0 & * \end{array}$$

инвариантное U

$$\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{U} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline * & * \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

Есть полная классификация пр-в с оператором над любым полем:

- Любое неразложимое пр-во с оператором над полем $\Bbbk$ изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\dfrac{\Bbbk[t]}{(p(t)^m)}$

где $p(t) \in \Bbbk[t]$ - неприводимый приведённый многочлен. При разных p и m такие пр-ва не изоморфны.

- Пр-во $\dfrac{\Bbbk[t]}{(p(t)^m)} \circlearrowleft$ умножение на $[t]$ где p - неприводим и привёдён

неприводимо (т.е. не имеет инвар. подпр-в) тогда и только тогда, когда $\underline{\underline{m=1}}$!

- Любое пр-во с оператором изоморфно оператору умножения на $[t]$ в прямой сумме фактор-колец

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \dots + \frac{\Bbbk[t]}{(p_k^{m_k})}$$

где все p_i — приведены и неприводимы и числа m_i и многочлены p_i могут встречаться по многу раз.

Два таких пр-ва изоморфны ⟺ они отличаются друг от друга перестановкой слагаемых.

Док-во будет в курсе алгебры (в конце 2-го семестра).

(следствие теоремы о строении модулей над кольцами главных идеалов).

$$F : V \to V$$

можно подставлять F в многочлены.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$f(F) = a_0 \cdot Id_V + a_1 F + a_2 F^2 + \dots$$

$$f(F) : V \to V$$

Гомоморфизм вычисления многочленов на операторе F: $ev_F : \mathbb{k}[t] \to \operatorname{End} V$

$$f(t) \mapsto f(F)$$

$\underset{\|}{(\mu_F)}$ $\dim = \infty$ $\dim = n^2$

$n = \dim V$

$ev_F \neq 0.$ $ev_F = \{ f \in \mathbb{k}[t] \mid f(F) = 0 \}$

это идеал в $\mathbb{k}[t]$ — это все многочлены, делящиеся на многочлен

$\mu_F(t)$ — приведённый, наименьшей степени, такой что $\mu_F(F) = 0$

$g(F) = 0$ надо поделить g на μ_F с остатком

$$g(t) = \mu_F(t) \cdot q(t) + r(t)$$

либо 0
либо $\deg r < \deg \mu_F$

$\swarrow$ $t \leftarrow F$

$$\underset{0}{g(F)} = \underset{0}{\mu_F(F)} \cdot q(F) + \underset{\overset{\|}{0}}{r(F)}$$

μ_F наз. минимальным многочленом оператора F.

$v \in V$ $\quad v, Fv, F^2v, \ldots$

глядим и находим наименьшее

$k \in \mathbb{N}$: $\underbrace{F^k v}_{} = \mu_1 F^{k-1} v + \mu_2 F^{k-2} v \underbrace{+ \ldots + \mu_k v}_{}$

$$\mu_{F,v}(F) = F^k - \mu_1 F^{k-1} - \mu_2 F^{k-2} - \ldots - \mu_k$$

это многочлен наименьшей степени, такой что $\mu_{F,v}(F)v = 0$.

Он тоже делит любой многочлен g:

$g(F) = 0$ $\qquad g = \mu \cdot q + r \qquad \mu = \mu_{F,v}$

$t = F$ и вычислить на v

$$g(\cancelto{0}{F})v = q(F)\mu(\cancelto{0}{F})v + r(\cancelto{0}{F})v$$

$r = 0$

μ_F - наименьшее общее кратное всех $\mu_{F,v}$ по всем $v \in V$, достаточно взять v пробегающим некоторый базис в V.