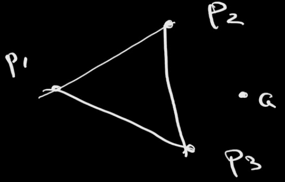
Геометрия, лекция 26 ноября 2020г (вторая половина)

Барицентрические координаты как отношения объёмов.



$$a = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \qquad \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$$

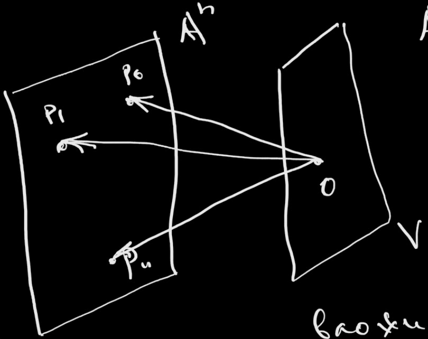
$$x_1 = \frac{S(\Delta a p_2 p_3)}{S(p_1 p_2 p_3)} \qquad x_2 = \frac{S(\Delta p_1 a p_3)}{S(p_1 p_2 p_3)}$$

$$x_3 = \frac{S(\Delta p_1 p_2 a)}{S(p_1 p_2 p_3)}$$

Пусть A^n — n-мерное аффинное пр-во и $n+1$ точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ не лежат в одной гиперплоскости.

Тогда каждая точка $a \in A^n$ однозначно записывается в виде барицентрической комбинации $a = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$

где $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$.

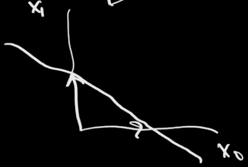


$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$

$W = \Bbbk \oplus V$

$e_0 \quad e_1 \ldots e_n$

$\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\Bbbk + V)$



вложим исходное $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}^{n+1}$ в качестве гиперплоскости не проходящей через O.

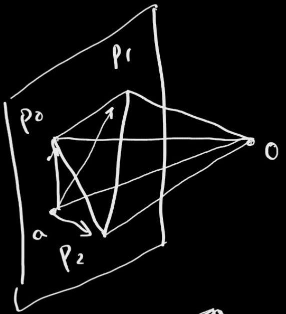
в $\mathbb{A}^{n+1}$ рассмотрим аффинный репер с центром в нуле и базисными векторами $\overrightarrow{Op_0}, \overrightarrow{Op_1}, \ldots, \overrightarrow{Op_n}$ – они линейно независимы

$\mathbb{A}^n$ в координатах $x_0, \ldots, x_n$ отн. этого репера задаётся уравнением:

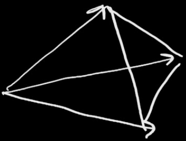
$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$

Барицентрические координаты в $\mathbb{A}^n$ — это в точности обычные аффинные координаты в $\mathbb{A}^{n+1}$, ограниченные на гиперплоскость $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ с уравнением

$$x_0 + \ldots + x_n = 1$$



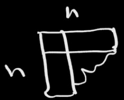
$$\frac{S(ap_1p_2)}{S(p_0p_1p_2)} = \frac{vol(O\,ap_1p_2)}{vol(O\,p_0p_1p_2)}$$



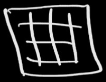
Как относится объём пирамиды и объёму параллелепипеда?

- Отношение зависит только от размерности, но не от векторов.

над $\mathbb{R}$



$\frac{n(n+1)}{2}$



n^2

Δ $\square$

$$\frac{\Delta}{\square} \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

если dim = d

n^d

d-мерная пирамида

нижний этаж

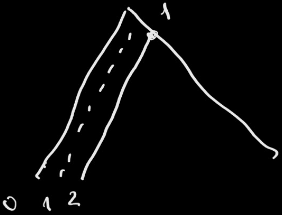
d-1 мерная пирамида

$n \times n$

2й - этаж d-1-мерная пирамида

$(n-1)\times(n-1)$

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + 1 =$$



$$=$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2}$$

$$= \binom{n+2}{3}$$

Сколько в d-мерной пирамиде кубиков?

4-мерная сложена из 3-мерных

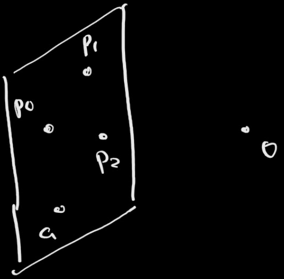
$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots \qquad \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

верхний индекс   2×2   n×n

В d-мерной пирамиде $\binom{n+d-1}{d}$ кубиков.

$$\frac{1}{n^d}\binom{n+d-1}{d} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{d!}$$

$$\boxed{\text{Отношение объёма пирамиды к объёму параллелепипеда в } \mathbb{R}^d \text{ равно } \frac{1}{d!}}$$



$$\overline{oa} = x_0\overline{op_0} + \underbrace{x_1\overline{op_1} + x_2\overline{op_2}},$$

$$a = \underline{x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2}$$

$$\frac{\omega(\overline{oa}, \overline{op_1}, \overline{op_2})}{\omega(op_1, op_2, op_3)} =$$

$$= x_0 \frac{\omega(\overline{op_1}, \overline{op_2}, \overline{op_3})}{\omega(\overline{op_1}, \overline{op_2}, \overline{op_3}}$$

Лемма Пусть U - подпр-во в V, векторы $u_1, \ldots, u_k$ составляют базис в U, векторы $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$ составляют базис в V. Тогда $\forall\, v_1, \ldots, v_k \in U$

и ∀ формы ω_k объёма на U и ∀ формы ω_{k+m} объёма на V справедливо равенство:

$$\frac{\omega_{k+m}(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m)}{\omega_{k+m}(u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_m)} =$$

$$= \frac{\omega_k(v_1,\dots,v_k)}{\omega_k(u_1,\dots,u_k)}$$

Док-во: $\omega_k(u_1,\dots,u_k) \neq 0$

$\omega_{k+m}(u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_m) \neq 0.$

Рассмотрим на U новую форму объёма

$$\omega'_k(v_1,\dots,v_k) = \omega_{k+m}(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m)$$

очевидно, что это форма объёма $\Rightarrow$ пропорциональна форме ω_k

$\forall v_1,\dots,v_k \in U$

$$\frac{\omega_k(v_1,\dots,v_k)}{\omega_k(u_1,\dots,u_k)} = \frac{\omega'_k(v_1,\dots,v_k)}{\omega'_k(u_1,\dots,u_k)} =$$

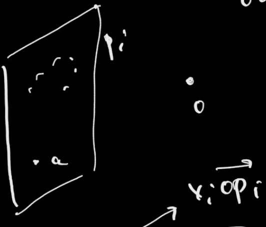
$$= \frac{\omega_{k+m}(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_m)}{\omega_{k+m}(u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_m)}$$

Следствие: Барицентрические координаты точки a отн. точек $p_0,\dots,p_n \in A^n$ можно вычислить по формуле

$$x_i = \frac{\omega_n(\overrightarrow{ap_0},\dots,\cancel{\overrightarrow{ap_i}},\dots\overrightarrow{ap_n})}{\omega_n(\overrightarrow{p_0p_1}\ \overrightarrow{p_0p_2}\ \dots\ \overrightarrow{p_0p_n})}$$

Док-во:

$$\overrightarrow{oa} = \sum_{i=0}^{n} x_i \overrightarrow{op_i}$$



$$\frac{\omega_{n+1}(\overline{op_0},\dots,\underset{i}{\overline{oa}},\dots\overline{op_n})}{\omega_{n+1}(\overline{op_0},\dots\quad\dots\overline{op_n})} = x_i$$

$$\overline{op_i} = \overline{oa} + \overline{ap_i}$$

$$\omega(\overline{ap_0}, \dots, \overline{oa}, \dots \overline{ap_n})$$

$$\omega(\overline{oa} + \overline{ap_0}, \overline{oa} + \overline{ap_1}, \dots\dots) \qquad \omega(\overline{p_0p_1}\ \overline{oa}\ p_0p_n)$$

?

" "

$$\underbrace{\omega(\overline{ap_0}, \overline{ap_1}, \dots\dots, \overline{ap_n})}_{0} + \sum_i \omega(\overline{ap_0}, \overline{oa}, \overline{ap_n})$$

лин. зависим

Дома додумать конец док-ва,