Геометрия, лекция 25 ноября 2020г
(вторая половина)

Грассмановы многочлены

$\Bbbk$ - поле. Кольцо грассмановых многочленов $\Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ от грассмановых переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$.

ξ_i антикоммутируют

Обозначение для умножения: $\wedge$ "\wedge"

$$\begin{cases} \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i & \forall i,j \\ \xi_i \wedge \xi_i = 0 & \forall i \end{cases}$$

↗ обязательно требовать если $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ (т.е. $-1 = 1$).

верное при $i=j$

$\xi_i \wedge \xi_i = -\xi_i \wedge \xi_i$

если $1 \neq -1$ $\Downarrow$

$\xi_i \wedge \xi_i = 0$

$2\xi_i \wedge \xi_i = 0$

Будет $\Bbbk\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ состоит из полилинейных мономов

$\xi_I = \xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_k}$ $i_1<i_2<\ldots<i_k$

I - возрастающее подмножество в $\{1,2,\ldots,n\}$

$\forall g\in S_n$

$\xi_{i_{g(1)}}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_{g(n)}} =$

$= \underset{\pm 1}{\operatorname{sgn}(g)}\cdot\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_n}$

$\xi_\varnothing = 1$ константа

$\dim$ (пр-ва однородных многочленов степени k) $= \binom{n}{k}$

$\dim \Bbbk\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

самый старший моном $\xi_1\wedge\ldots\wedge\xi_n = \xi_{\{1,\ldots,n\}}$

$\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ однороден степени k

$\eta(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ однороден степени m

$\omega\wedge\eta = \eta\wedge\omega\cdot(-1)^{km}$

$\underbrace{\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_k}}\wedge\underbrace{\xi_{j_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{j_m}}$

$\eta\omega$
$\eta\eta$

каждое из правых ξ_j-у перемещается налево к транспозициями.

Упражнения Описать центр алгебры

$\Bbbk\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle$ = все ω: $\omega\eta=\eta\omega\ \forall\eta$

(все многочлены, которые коммутируют с любыми многочленами).

Все однородные чётной степени лежат в центре. есть ли что-то ещё?

$I=(i_1,\dots,i_k)$ $\hat I=(j_1,\dots,j_{n-k})$

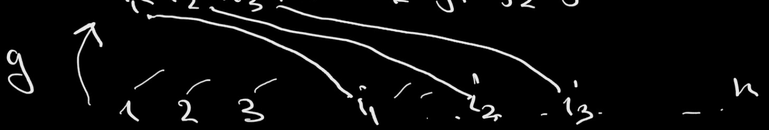
дополнительный набор

$I\sqcup\hat I=\{1,\dots,n\}$

$I\cap\hat I=\varnothing.$

$\xi_I\wedge\xi_{\hat I}=\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n.$

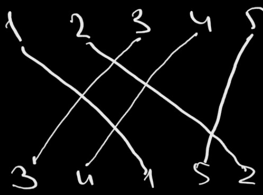
$i_1<i_2<i_3<\dots<i_k$ $j_1<j_2<j_3<\dots<j_{n-k}$



Тасующая перестановка $i_1\cdot 1+i_2\cdot 2+i_3\cdot 3$

правило ниточек

5 пересечений $\Rightarrow$ нечётная



$$\boxed{\operatorname{sgn}(i_1<\dots<i_k, j_1<\dots<j_{n-k}) = (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{k} i_\nu + \frac{k(k+1)}{2}} = (-1)^{|I|+\frac{k(k+1)}{2}}}$$

Знак тасующей перестановки

$$|I| := \sum i_\nu$$ вес мультииндекса I.

$$(\xi_1,\dots,\xi_n) = (\eta_1 \dots \eta_n)\cdot C$$

$C \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Как выражаются базисные мономы ξ_I через базисные мономы η_J

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot c_{ji}$$

$$\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_k} =$$

$$= \Big(\sum_{j_1} \eta_{j_1} c_{j_1 i_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{j_2} \eta_{j_2} c_{j_2 i_2}\Big) \wedge \ldots$$

$$= \sum_{j_1 \ldots j_k} \underbrace{\eta_{j_1} \wedge \eta_{j_2} \ldots \wedge \eta_{j_k}}_{\text{зануляется, если есть два одинаковых.}} c_{j_1 i_1} \cdots c_{j_k i_k} =$$

$$= \sum_J \overbrace{\eta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{j_k}}^{\eta_J} \sum_{g \in S_k} \operatorname{sgn}(g)\, c_{j_{g(1)} i_1} \cdots c_{j_{g(k)} i_k}$$

$J = (j_1 < \ldots < j_k)$ пробегает подмножества из k элементов в $\{1, 2, \ldots, n\}$

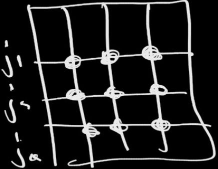
$$= \sum_J \eta_J \det C_{JI}$$

C_{JI} – подматрица в C, образованная строками с номерами из J и столбцами с номерами из I

$$\xi_I = \sum_J \eta_J \det C_{JI}$$

$i_1 \; i_2 \cdot i_k$

$\xi_{1,\dots,n} = \eta_{1\dots n} \cdot \det C$



$\det C_{JI}$ наз. JI – минором матрицы C.

* * *

- Равенства в $\mathbb{k}\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ – это соотношения между минорами в матрицах.