Геометрия, лекция 25 ноября 2020г (первая половина)

Формулы для обратной матрицы:

n×n матрица $C = (c_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{k})$

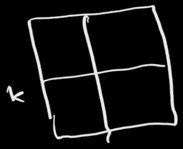
обратима $\Leftrightarrow \det C \neq 0$, и в этом случае

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\cdot C^{\vee}$$

$C^{\vee}$ – присоединённая матрица (adjunct matrix) = = матрица, транспонированная к матрице алгебраических дополнений к элементам c_{ij}

$$c^{\vee}_{\underline{ij}} = (-1)^{i+j}\cdot \det C_{\underline{\hat{j}\hat{i}}}$$

$C_{\hat{k}\hat{l}} =$



$\in Mat_{n-1}(\mathbb{k})$

выкинув k-тую строку и l-тый столбец.

$$C^{\vee}\cdot C = C\cdot C^{\vee} = \underline{\det C}\cdot E = \begin{pmatrix}\det C & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det C\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}\cdot C = C\cdot C^{-1} = E$$

Факт: Это формальное буквенное тождество

Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{Z}[\ldots c_{ij} \ldots]$

многочлены с целыми к-тами от n^2

переменных c_{ij} $\quad 1 \le i, j \le n$

$$C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$$

Тогда в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ выполняется

тождество $\quad C \cdot C^{\vee} = C^{\vee} \cdot C = \det C \cdot E$

---

n^2 полиномиальных тождеств

(сравниваем левую и правую часть

поэлементно)

Мы знаем, что они верны для всех

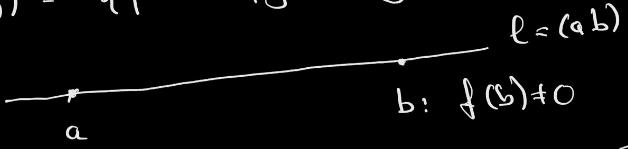
матриц $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ с $\det C \neq 0$.

Упр. по анализу: • Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1 \ldots x_n]$

задаёт непрерывную функцию $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

- Если $f=0$ на всюду плотном подмножестве $M \subset \mathbb{R}^n$, то $f=0$ всюду на $\mathbb{R}^n$.
(∀ непрерывной функции f)

- $\forall\, g \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ множество
$D(g) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid g(p) \neq 0\}$ всюду плотно.



$f|_\ell$ — это многочлен от одной переменной

$f(b) \neq 0$ обращается в нуль в конечном числе точек $\Rightarrow$ сколь угодно близко к a есть точки, где $f \neq 0$.

Достаточно проверить равенство

$$\boxed{C^\vee C = \det C \cdot E}$$

для всех вещественных матриц $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ с $\det C \neq 0$. Они всюду плотны в $\mathbb{R}^{n^2} \Rightarrow$ если для них верно, то и для всех $C \in \mathbb{R}^{n^2}$

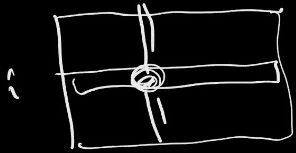
тоже верно ⟹ многочлены с целыми к-тами совпадают, если их значения совпадают всюду в $\mathbb{R}^{n^2}$.

$$C\cdot C^{\vee} = \det C\cdot E$$

↑ в позиции (ii)

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, c^{\vee}_{ji} = \det C}$$

$$c^{\vee}_{ji} = (-1)^{i+j}\det C_{\hat{i}\hat{j}}$$ = алг. дополнение до элемента c_{ij}



ф-ла для разложения по строке.

$$C^{\vee}\cdot C = \det C\cdot E$$ ф-ла для разложения по столбцу

$$\sum_{j} c^{\vee}_{ij}\cdot c_{ji}$$

$$c^{\vee}_{ij} = (-1)^{i+j}\det C_{\hat{j}\hat{i}}$$

в позиции ij при $i \neq j$

Теорема об умножении на чужие алг. дополнения.

$$\sum_k c_{ik} \check{c}_{kj} = 0$$

$$\|$$

$$\sum_k c_{ik} \cdot (-1)^{k+j} \det C_{\hat{j}\hat{k}}$$

движемся по строке и умножаем элементы не на их дополнения, а на дополнения к эл-там другой строки.

Тождество Гамильтона - Кэли

Всякая матрица удовлетворяет полиномиальному уравнению.

$A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\Bbbk)$ — размерность n^2

$$\underbrace{E, A, \dots, A^{n^2}}_{n^2+1 \text{ штук}} \text{ — линейно зависимы}$$

$$\exists\, c_0, \dots, c_{n^2} : \ c_0 E + c_1 A + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

$$\exists\, f \in \Bbbk[x] : f(A) = 0$$

$$f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = c_0 \cdot x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots$$

$$f(A) = c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \dots$$

$x \longleftrightarrow A$

$x^0 \longleftrightarrow A^0 = E$ договор!

$x^1 \longleftrightarrow A^1$

$\dots$

$x^k \longleftrightarrow A^k$

Можно явно предъявить многочлен $f(x)$ степени n: $f(A) = 0$ для $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$ (f зависит от A).

$$\det(tE - A) = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1\,n} \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n\,n-1} & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ многочлен от t $\qquad \deg \chi_A = n$

$$\chi_A(t) := \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) t^{n-1} + \sigma_2(A) t^{n-2} - \dots$$

характеристический многочлен матрицы A.

$$\chi_A(t) = t^n + \sum^{n} (-1)^i \sigma_i(A) t^{n-i}$$

$i=1$

$\sigma_1 = \operatorname{tr} A = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ след A.

$\sigma_2 =$ сумма всех 2×2 определителей, главные диагональ которых явл. подм-вом главной д-ли матрицы A

к-т при t^0 это

$\sigma_n = \det A$. $\qquad \det(-A) = (-1)^n \det A$

Упр. $\sigma_k = \sum$ всех "главных диагональных $k\times k$-миноров"

т.е. определителей всех $k\times k$ подматриц в A, главная диагональ которых содержится в главной диагонали A.

$$\begin{vmatrix} \boxed{t-a_{11}} & -a_{12} & \boxed{-a_{13}} \\ -a_{21} & \boxed{t-a_{22}} & -a_{23} \\ \boxed{-a_{31}} & -a_{32} & \boxed{t-a_{33}} \end{vmatrix} = t^3 - t^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$

$$+\,t\left(\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$-\det A.$$

Тождество Гамильтона-Кэли!

$$\chi_A(A) = 0 \quad \text{в } \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$$

где $K = \mathbb{Z}[\dots a_{ij} \dots]$, $A = (a_{ij})$

$$\begin{tikzcd}
A=(a_{ij}) \arrow[r] & \chi_A(t) = \det(tE-A) \arrow[d, "t \leftarrow A"] \\
& \chi_A(A) = 0
\end{tikzcd}$$

$$tE - A \in \mathrm{Mat}_n(K[t]) = \mathrm{Mat}_n(K)[t]$$

матрица, элементы которой — многочлены от t.

$$\parallel$$

многочлен от t с коэффициентами в $\mathrm{Mat}_n(K)$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3t^2-t & 5t+1 \\ \hline t^3-2 & t^2+t+1 \\ \hline\end{array} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}[t])$$

$\shortparallel$

$$t^3\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&5\\0&1\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix}$$

Многочлены с коэфф-тами в матрицах — это столь же удобный объект, как многочлены с к-тами в каком-либо поле: С ними можно:

- подставить вместо t матрицу.
- делить столбиком на многочлен с обратимым старшим к-том

(например, любой многочлен $f(x)$ можно поделить столбиком на $x-A$ и в остатке будет

$$\begin{array}{l|l} B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_0 & x-A \\ \hline & B_n x^{n-1} + \ldots \end{array}$$

$$B_n x^n - B_n A$$

$(B_{n-1} + B_n A)x^{n-1} + \dots$

Остаток $= f(A)$ $\quad f(x) = q(x)(x-A) + R$

$x = A \quad 0$

$f(A) = R)$

Доказательство тождества Гамильтона-Кэли.

$$(tE-A)(tE-A)^\vee = \det(tE-A)\cdot E$$

$$\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} \chi_A(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_A(t) \end{pmatrix}}$$

тождество в $\mathrm{Mat}_n(K[t])$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Mat}_n(K)[t]$$

$$(tE-A)\left(t^{n-1}\tilde{A}_1 + t^{n-2}\tilde{A}_2 + \dots + t^0\tilde{A}_{n-1}\right) =$$

$$= t^n E - \sigma_1(A)t^{n-1}E + \dots + \det A\cdot E$$

$$\parallel$$

подставим $t = A$ $\quad \chi_A(t)\cdot E$

$$0 = \chi_A(A)\cdot E$$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A(A) = 0$$

Обязательно обдумать
