Геометрия, лекция 19 ноября 2020г (первая половина)

На SMART LMS http://edu.hse.ru

страница "Линейная и геометрия"

вход: корпоративные (HSE) e-mail и пароль от почты

Для контрольной N3 и экзамена

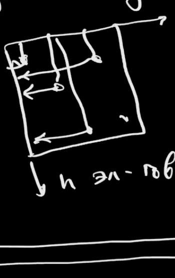
jpg, png, pdf

потренироваться!

Определитель квадратной матрицы $C=(c_{ij})$ размера $n \times n$:

$$\det C = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}$$

кососимметричен (в частности знакоперем.) и полилинеен по строкам и столбцам



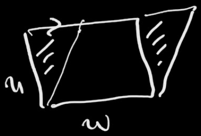
Форма n-мерного объёма на n-мерном V

$$\omega : \underbrace{V\times\ldots\times V}_{n} \longrightarrow \mathbb{k}$$

обладает стандартными школьными св-вами объёма

(1) $\omega(\ldots\lambda v\ldots) = \lambda\omega(\ldots v\ldots)$

(2)



$$\omega(\ldots u\ldots w\ldots) = \omega(\ldots u+\lambda w\ldots w\ldots)$$

Форма объёма автоматически полилинейна и кососимметрична (в частности, знакопеременна)

Полилинейные кососимметричные формы от n аргументов на n-мерном V

$$\omega : \underbrace{V\times\ldots\times V}_{n} \longrightarrow \mathbb{k} \qquad \boxed{\dim V = n}$$

образуют 1-мерное векторное пр-во.

$\forall$ любого базиса $e_1,\ldots,e_n \in V$ и любого набора векторов $(v_1,\ldots v_n) = (e_1,\ldots,e_n)\cdot C_{ev}$

$$\boxed{\omega(v_1,\ldots,v_n) = \omega(e_1,\ldots,e_n)\cdot \det C_{ev}}$$

$\forall$ n-линейной кососимм. формы ω.

положим $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det C_{ev}$$

$\det E = 1$ $\boxed{\begin{matrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{matrix}}$ $\underline{\det = d_1 \ldots d_n}$

Если $F : V \longrightarrow V$ линейный оператор

$\omega : V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{k}$ - ненулевая форма объёма

$$\big\downarrow$$

$$\omega_F(v_1, \ldots, v_n) = \omega(Fv_1, \ldots, Fv_n)$$

полилинейна
кососимметрична

пропорциональна форме ω

коэффициент пропорциональности обозначается $\underline{\underline{\det F}}$ (определитель F)

F умножает все объёмы на $\det F$

$$\omega(Fv_1, \ldots, Fv_n) = \underline{\det F} \cdot \omega(v_1 \ldots v_n)$$

∀ наборе векторов $v_1, \dots, v_n$

∀ ненулевой формы ω объёма на V

$e_1, \dots, e_n$ - базис в V

$$\boxed{\det F = \frac{\omega(Fe_1, \dots, Fe_n)}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \det F_e}$$

← матрица F в базисе e

$$(Fe_1 \dots Fe_n) = (e_1 \dots e_n) F_e$$

$$\omega(Fe_1, \dots, Fe_n) = \omega(e_1 \dots e_n) \cdot \det F_e$$

$\det F = \det F_e$ в любом базисе e
(определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса)

Следствие: $\det(GF) = \underline{\det(G) \cdot \det(F)}$

GF умножит все объёмы на $\det G \det F$ ⇐ | сначала F умножит все объёмы на $\det F$ потом G умножит все объёмы на $\det G$

by product: $\det(FG) = \det(GF)$

для матриц над любым полем

$$\underline{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

↗ это формальное буквенное равенство

Рассмотрим кольцо многочленов
$K = \mathbb{Z}[\dots a_{ij} \dots b_{ij} \dots]$ от $2n^2$
переменных a_{ij}, b_{ij} $1 \le i, j \le n$

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

[$\mathbb{Z}$ — это универсальное кольцо:
любая абелева группа, в частности
любое кольцо является $\mathbb{Z}$-модулем
(элементы можно умножать на целые
числа $n \cdot a = \underbrace{a + \dots + a}_{n}$)

Поэтому в любую полиномиальную
формулу в $\mathbb{Z}[x_1 \dots x_m]$ можно
подставлять элементы любого комм.
кольца — формулы останется верной!

$$\mathbb{Z}[x_1 \dots x_n] \xrightarrow{\varphi_{a_1 \dots a_n}} \Delta$$

$$x_1 \longmapsto a_1$$
$$x_2 \longmapsto a_2$$
]

$$\underline{\det(AB) = \det A \cdot \det B} \quad \text{в } \underline{\underline{K}}$$

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{Z}[\ldots a_{ij} \ldots b_{ij} \ldots]$$

$\nearrow$ равенство двух многочленов с целыми коэфф-тами

Факт из алгебры: Если многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ обращается в нуль во всех точках аффинного пр-ва $\mathbb{k}^n$, то все коэффициенты f нулевые, если поле $\mathbb{k}$ бесконечно.

Упр. по алгебре. (индукцию по n)

$\boxed{n=1}$ $f(x) \in \mathbb{k}[x]$ имеет $\leq \deg f$ корней

Вывод: Достаточно проверить равенство

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

для рациональных матриц.

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^n &\longrightarrow \mathbb{Q}^n \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

Правило Крамера (N1)

$v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$

$\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат векторов $v_1, \dots, v_n$

$\det A = \det A^t \Rightarrow$ неважно как писать координаты (по строкам или по столбцам).

Теорема (обобщение правил Крамера 2x2)

Векторы $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ образуют базис $\iff \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, и в этом случае в разложении любого вектора $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ координата

$$x_i = \frac{\det(v_1 \dots v_{i-1}\, w\, v_{i+1} \dots v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)}$$

Док-во: $v_1 \dots v_n$ - базис $\iff C_{ev}$ обратима

$e \in \Bbbk^n$ стандартный базис

$$e = v\, C_{ve} = e\, \underbrace{C_{ev} C_{ve}}_{E}$$

матрица A обратима $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = E \xrightarrow{\det} \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

A не обратима $\Rightarrow$ строки линейно зависимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = 0$

Если $v_1 \dots v_n$ базис, то $\forall w$

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$\downarrow \quad \det(v_1 \dots v_{i-1} \, ? \, v_{i+1} \dots v_n)$$

$$u \longmapsto \det(v_1 \dots v_{i-1} u v_{i+1} \dots v_n)$$

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots v_n) = x_i \det(v_1 \dots v_n)$$

v_i стоит на i-том месте

Мы имеем явные формулы для решения систем $n \times n$ с невырожденной левой частью

$$Ax = b$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

$a_1 \dots a_n$ — столбцы A.

$$x_i = \frac{\det(a_1 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n)}{\det A}.$$