Лекция 28 мая. Евклидовы квадрики и сферы.

Евклидово $\underset{(x_1,\dots,x_n)}{V \simeq \mathbb{R}^n}$ вкладывается в $\underset{(x_0,x_1,\dots,x_n)}{W = \mathbb{R}e_0 \oplus V}$

$Q \subset \mathbb{R}^n$ с уравнением $f(x_1,\dots,x_n) = \overbrace{f_2(x_1,\dots,x_n)}^{B_\infty} + f_1(x_1,\dots,x_n) + f_0 = 0$

$\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$

с уравнением $\overbrace{q(x_0,\dots,x_n)}^{B} = f_2 + x_0 f_1 + x_0^2 f_0 = 0$

$\exists$ евклидово ортонормальный базис $\underline{e_1,\dots,e_n} \in V$, состоящий из собственных векторов матрицы B_∞ [матрицы Грама формы f_2) в произвольном евклидово ортонормальном базисе пр-ва V.

Матрица Грама формы f_2 в этом базисе будет диагональная с собственными значениями матрицы B_∞ по диагонали.

- Базис $e_1,\dots,e_n$ наз. каноническим для f_2. Если все собственные числа B_∞ разные, то такой базис единствен с точностью до перенумерации и смены знаков базисных векторов

Возникают возможности:

(1) Если все собственные числа ненулевые (т.е. $\det B_\infty \neq 0$)

– Если $\det B = 0$ (т.е. $\overline{Q}$ особа), то квадрика Q – это конус над квадрикой Q_∞ с вершиной в точке $(B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n}) \in \mathbb{P}_n$

C'' верхняя строка матрицы $B^\vee \in \ker B$ если $\det B = 0$

$$\boxed{B^\vee \cdot B = \det B \cdot E}$$

т.к. $B_{00} = \det B_\infty \neq 0 \Rightarrow$ вершина лежит в $\mathbb{R}^n$.

Q_∞ имеет матрицу Грама в базисе $e_1, \dots, e_n$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 0$$

в репере с центром в c и базисом $e_1, \dots, e_n$ отношение $(\lambda_1 : \dots : \lambda_n)$ — это полный ортогональный инвариант конуса.

— если $\det B \neq 0$, то квадрика $\overline{Q}$ — неособая гладкая центральная квадрика с центром в точке $c = (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n}) \sim$

$$\sim \underbrace{(1, 0, \dots, 0) \cdot B^{-1}}_{\text{полюс бесконечности относительно } \overline{Q}}$$

т.к. при $\det B = 0$ то $B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^\vee$

$c = \langle e_1, \dots, e_n \rangle^\perp \Rightarrow$ матрица Грама формы q в базисе $c, e_1, \dots, e_n$ пр-ва V имеет вид

$$\begin{pmatrix} f(c) & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

в аффинном репере с центром в c и базисом $e_1, \dots, e_n$ уравнение квадрики Q имеет вид $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + f(c) \cdot x_0^2 = 0$

$\downarrow$

$\boxed{b_i = -\frac{\lambda_i}{f(c)}}$ $\qquad b_1x_1^2 + \dots + b_nx_n^2 = 1$

$c = \left(1, \frac{-B_{10}}{B_{00}}, \dots, \frac{(-1)^n B_{0n}}{B_{00}}\right)$

$(b_1, \dots, b_n)$ – полный набор ортогональных инвариантов гладкой центральной квадрики.

(2) Среди собственных чисел матрицы B_∞ имеется ровно одно нулевое и соответствующий собственный вектор $e_n \notin \ker B$, т.е. $\det B \neq 0$.

Тогда Q – это параболоид с осью e_n

($\overline{Q}$ касается $L_\infty = \mathbb{P}(\langle e_1, \dots, e_n\rangle)$ в точке e_n)

Пространство $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle_q^\perp$ – 2-мерно,

содержит изотропный вектор e_n и его можно дополнить вектором $e_0 \in \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle_q^\perp$ до гиперболического базиса в U.

Способ: Указать в $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle_q^\perp$) какой-нибудь вектор $w \neq \lambda e_n$

если $q(w) = 0$, то $e_0 = \frac{w}{\tilde{q}(e_n, w)}$

(тогда $\tilde{q}(e_0, e_n) = 1$)

если $q(w) \neq 0$, то $u = \sigma_w(e_{n-1}) =$

$$= e_{n-1} - 2\frac{\tilde{q}(w, e_{n-1})}{\tilde{q}(w, w)} \cdot w$$

тогда u тоже изотропен, как и e_{n-1},

$$e_0 = \frac{u}{\tilde{q}(e_n, u)}$$

имеет $\tilde{q}(e_0, e_n) = 1$

В базисе $e_0, e_1, \dots, e_n$ пр-ва W форма q имеет матрицу Грама

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Уравнение:

$$2x_0x_n + \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1}^2 = 0$$

аффинное уравнение $-\lambda_1 x_1^2 - \dots - \lambda_{n-1}x_{n-1}^2 = 2_n$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ – полный ортогональный инвариант гиперболоида

Перескалирование уравнения q не меняет базисный вектор e_0.

Если $\ker B \cap \ker B_\infty \neq 0$ $\quad V = U_1 \oplus U_2$

где $U_2 = \ker B \cap V = \ker B_\infty \cap V$.

Если пересчитать f в базисе $\underbrace{e_1,\dots,e_k}_{V_1},\underbrace{e_{k+1},\dots,e_n}_{V_2}$

то уравнение не будет зависеть от $x_{k+1},\dots,x_n$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k = A(V_1)$ получится нецилиндрическая квадрика.

Примеры задач на евклидову геометрию квадрик

Пример 1 Теорема Аполлония.

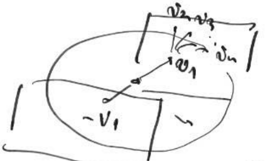
Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — это эллипсоид.

Его уравнение в каноническом базисе с началом в центре симметрии $\underline{\underline{c}}$ имеет вид $\boxed{f_2(x_1,\dots,x_n)=1}$ $\leftarrow$ (можно даже считать, что f_2 диагональна)

$$Q = \{\, c+v \mid v\in V,\ f_2(v,v)=1 \,\}$$

Векторы $v_1,\dots,v_n \in V$ называются сопряжёнными радиусами эллипсоида, если они попарно ортогональны отн. f_2 и $f_2(v_i,v_i)=1\ \forall i$.

Геометрически это равносильно тому, что обе точки $c\pm v_i$ лежат на эллипсоиде и касательные плоскости $T_{c\pm v_i}Q$ имеют направляющие пр-ва, натянутые на векторы v_i с $i \neq 1$. (в частности они параллельны)

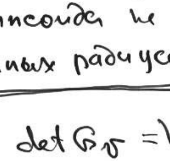


В однородных координатах это означает, что матрица q диагонального вида

$$\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема Аполлония (вариант): Характеристический многочлен $\det(tE - G_v)$ матрицы Грама евклидова скалярного произведения в базисе $v = (v_1, \dots, v_n)$ составленном из сопряжённых радиусов эллипсоида не зависит от выбора сопряжённых радиусов.

например, свободный член $\det G_v = \mathrm{Vol}^2 v$ не зависит от v (если v - это базис из сопряжённых радиусов)



$\operatorname{tr} G_v = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2$

(к-т $\det(tE - G_v)$ при t^{n-1}) тоже не зависит от v (если v состоит из сопряжённых радиусов).

Док-во: f_2 - анизотропна и её можно принять за новое евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Переход от одного ортонормального базиса к другому задаётся ортогональной матрицей $v' = v \cdot C$ C - ортогональная

$$\boxed{C^T = C^{-1}!}$$

$$\boxed{F_v = E} \quad \boxed{F_{v'} = E}$$

условие, что v и v' - ортонормальные базисы для F

$$\boxed{F_{v'} = C^T F_v C}$$

$$\Downarrow$$

$$C^T C = E$$

Матрицы Грама евклидова скалярного произведения пересчитываются как:

$$\underline{\underline{G_{v'}}} = C^T G_v C = C^{-1} \underline{\underline{G_v}} C$$

Т.е. $G_{v'}$ и G_v сопряжены!

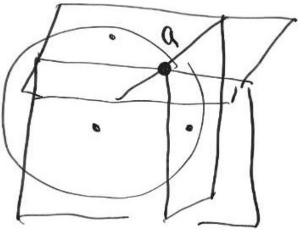
$$\det(tE - G_{v'}) = \det(tE - G_v)$$

$$\| \quad \overset{\|}{C^{-1} G_v C}$$

$$\cancel{\det^{-1}} C \det(tE - G_v) \cdot \cancel{\det} C$$

Вариации на тему директора

Директор: ГМТ пересечения n-ок попарно перпендикулярных касательных плоскостей.



$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}\oplus \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\wr}{V}})$

$\boxed{\mathbb{R}\oplus V = W}$

$T_1, \dots, T_n$ проходят через фиксированную точку a $\Leftrightarrow$ эти плоскости являются точками проективного пр-ва $a^\times = \mathrm{Ann}(a)$

$$\mathrm{Ann}(a) = \{\xi \in W^* \mid \xi(a) = 0\}$$
$$\wr\wr$$
$$V^*$$

Имеется изоморфизм

$$V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ann}\,(a)$$

линейной форме φ на V сопоставляет плоскость с направляющим подпр-вом $\mathrm{Ann}\,\varphi \subset V$, проходящую через точку a

в $\mathbb{A}(V)$ уравнение этой плоскости имеет вид: $\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(a) = 0$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}(V)$.

В однородных координатах уравнение:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) - x_0 \cdot \varphi(a)$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ann}\, a < W \\ \varphi & \longmapsto & \varphi - x_0 \cdot \varphi(a) \end{array}}$$

перпендикулярность плоскостей $T_1, \dots, T_n$ означает, что их направляющие ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ евклидово перпендикулярны

✓

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \varphi(a)$$
$$\varphi_2(x_1, \dots, x_n) = \varphi(a)$$
$$- - - -$$
$$\varphi_n(x_1, \dots x_n) = \varphi(a)$$

ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ попарно ортогональны отн. евклидова скалярного произведения на V^*, двойственного к евклидовой структуре на V (В евклидовом ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ в V и двойственном базисе $x_1, \dots, x_n$ в V^* оба евклидовых скалярных произведения имеют единичную матрицу Грама)

Набор ковекторов $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{P}(V^*)$ — это автополярный симплекс евклидовой квадрики.

$\varphi_i^{\perp}$ = линейная оболочка φ_ν с $\nu \neq i$

Условие того, что плоскости $T_1, \dots, T_n$ касаются квадрики $Q \Leftrightarrow T_1, \dots, T_n$ как точки пр-ва $\mathbb{P}(W^*) = \mathbb{R}^{\times}_{n}$ лежат на двойственной к Q квадрике $Q^{\times}$.

Пусть Q гладкая центральная с уравнением

$$b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2 = 1$$

в евклидово ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ с началом в центре e_0 квадрики Q.

Матрица Грама q : $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & b_1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$

Матрица Грама $q^\times$: $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & b_1^{-1} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & b_n^{-1} \end{pmatrix}$

Точки $T_1, \dots, T_{n-1}$ лежат в пересечении $Q^\times$ с гиперплоскостью $a^\times = \mathrm{Ann}\, a \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ann}\, a & \boxed{\varphi - \varphi(a)\cdot x_0} \\ \mathbb{P}(V^*) \arrow[u, "\wr"] & \varphi \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

евклидово ортонормальный базис $x_1, \dots, x_n$ в V^* отображается в базис в $\mathrm{Ann}(a)$, состоящий из ковекторов $x_1 - a_1 x_0, x_2 - a_2 x_0, \dots, x_n - a_n x_0$

Матрица Грама квадрики $Q^\times \cap a^\times$ в этом базисе

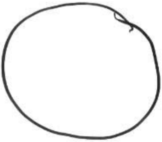
$$\Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & b_1^{-1} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & b_n^{-1} \end{pmatrix} \underline{\overbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}^{n}}$$

$n+1$

$$= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & O \\ -a_n & O & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & b_n^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^{-1}-a_1^2 & -a_1a_2, & -a_1a_3, & \dots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & b_2^{-1}-a_2^2 & -a_2a_3, & \dots & -a_2a_n \\ & & \ddots & & -a_{n-1}a_n \\ \dots & & & & \\ -a_na_1 & \dots & \dots & -a_na_2 & b_n^{-1}-a_n^2 \end{pmatrix} = M$$

Ответ: $T_1, \dots T_n$ — это точки квадрики автополярные относительно квадрики с единичной матрицей Грама



Дана невырожденная квадрика G (в нашем случае — евклидова) и какая-то квадрика Q (наша Q).

Вопрос: существует ли симплекс, вписанный в Q и автополярный относительно G? (если $\exists$, то говорят, что Q гармонически описана около G).

Ответ: $\exists$ если и только если

$$\mathrm{tr}(G^{-1}Q)=0$$

!

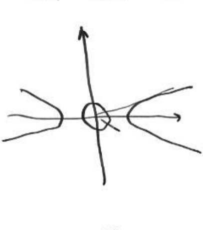
и в этом случае любая точка на $Q \cap G$ является вершиной автополярного отн. G симплекса.

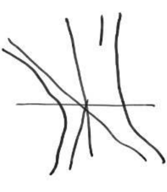
Такие $T_1, \dots, T_n$ $\exists \Leftrightarrow \mathrm{tr}\, M = \sum b_i^{-1} - a_i^2 = 0$

что точка a пробегает сферу радиуса R:

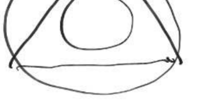
$\boxed{R^2 = \sum b_i^{-1}}$ с центром в центре квадрики Q.

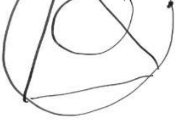
Эта сфера называется ортоoптической сферой квадрики Q. Если все $b_i > 0$ (т.е. Q - эллипсоид) то $R>0$.





$\emptyset$.



$\mathrm{tr}\, G^{-1}Q = 0$