Лекция 14 мая. Классификация квадрик (про…

Напоминание: квадрика планарности 2 в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$

$\dim V = 4 \quad V \simeq \mathbb{k}^4 \quad \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$

Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V) \xrightarrow[1:1]{\sim}$ квадрика Плюккера

$P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}$

вложение Плюккера

$$\mathbb{P}_3 \supset (ab) \longmapsto a \wedge b \in \Lambda^2 V$$

$a, b \in V$

В стандартном базисе $e_1, \dots, e_4$ в V

$$\boxed{\begin{matrix} a = a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ b = b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \end{matrix}} \longmapsto \sum_{i<j} e_i \wedge e_j \cdot \det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$$

2×4 матрица

$$a \wedge b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4) =$$

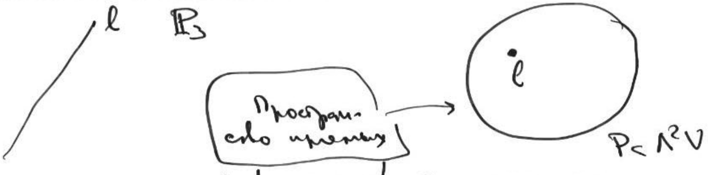
$$= \sum_{i<j} e_i \wedge e_j (a_i b_j - a_j b_i)$$

при $e_1 \wedge e_2$

2×4 матрицу $A \longrightarrow$ набор из 6 2×2 миноров A_{ij}

Когда 6 чисел A_{ij} являются 2×2-минорами 2×4 матрицы?

Ответ: Тогда и только тогда, когда $\underbrace{A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0}_{\text{соотношение Плюккера}}$.



$$\{\ell' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell' \neq \varnothing\} = T_\ell P \cap P$$

в $\mathbb{P}_3$ $l \cap l' \neq 0 \iff l \wedge l' = 0$ ортогональность отн. кв. формы, задающей P

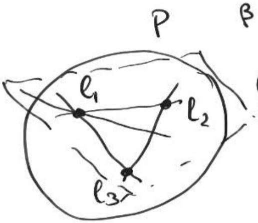
На P есть ровно 2 семейства плоскостей (α- и β-плоскости).

α-плоскость $\Pi(p)$, где $p \in \mathbb{P}_3$,

$\Pi(p) = \{ l \mid l \ni p \}$

β-плоскость $\Pi(\pi)$, где $\pi \subset \mathbb{P}_3$ - плоск.,

$\Pi(\pi) = \{ l \mid l \subset \pi \}$



Описываем плоскости, лежащие на P.

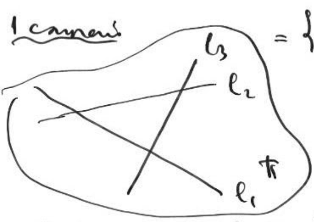
$\boxed{\langle l_1, l_2, l_3 \rangle \subset P}$

касается P и в l_1, и в l_2, и в l_3

$\langle l_1, l_2, l_3 \rangle = \underline{T_{p_1} \cap T_{p_2} \cap T_{p_3}}$

$= \{ l' \mid l' \cap l_i \neq \varnothing \ \forall i \}$ $\boxed{l_i \cap l_j \neq \varnothing}$ $\boxed{l_i \in T_{l_j}}$

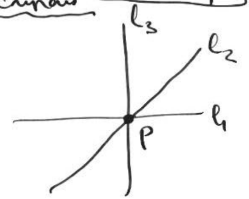
1 случай



l_1, l_2, l_3 лежат в одной плоскости

β-плоскость $\Pi(\pi)$

2 случай



$l_1\ l_2\ l_3$ проходят через одну точку p

α-плоскость $\Pi(p)$

1 точка: $\Pi(\pi_1) \cap \Pi(\pi_2) = \pi_1 \cap \pi_2$

обычно $\varnothing$ иногда — прямая $\Pi(\pi) \cap \Pi(p) = \begin{cases} \varnothing \text{ если } p \notin \Pi \\ \text{прямая} = \text{пучок прямых в } \pi \text{ через } p \in \Pi \end{cases}$

1 точка: $\Pi(p_1) \cap \Pi(p_2) = (p_1 p_2)$

Никаких прямых на P, кроме прямых вида $L(p, \pi) = \Pi(\pi) \cap \Pi(p)$ в случае, когда $p \in \Pi$, нет.

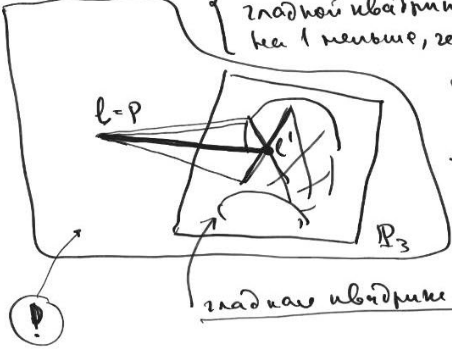
Даны 3 прямые „общего положения" в $\mathbb{P}_3$. Как устроено множество прямых, которые пересекают все 3 прямые?

попарно не пересекаются.

потом.

Q – квадрика, H – гиперплоскость, то

$$Q \cap H = \begin{cases} \text{гладкая квадрика, если } H \text{ не касается } Q \\ \text{простой конус с вершиной } p \in Q \text{ над гладкой квадрикой в } L < H \text{ и планарности на 1 меньше, чем } Q, \text{ если } H = T_pQ. \end{cases}$$



Все прямые через точку $p \in P$ лежат в $T_pP \cap P$

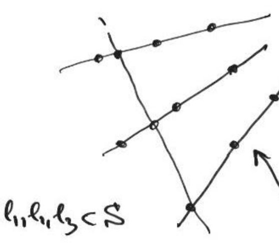
$T_pP \cap P$

$T_pP \simeq \mathbb{P}_4$

гладкая квадрика Сегре планарности 1

- k-мерные плоскости, проходящие через заданную точку p на гладкой квадрике $Q < \mathbb{P}_n$ находятся в биекции со всевозможными $(k-1)$-мерными плоскостями, лежащими на гладкой квадрике в $\mathbb{P}_{n-2} \subset \underset{\mathbb{P}_{n-1}}{\underset{\cup}{T_pQ}} \smallsetminus p$

(эта квадрика высекается в $\mathbb{P}_{n-2}$ квадрикой Q и имеет планарность на 1 меньше, чем Q).



$\mathbb{P}_3$ Можно ли через 9 точек в $\mathbb{P}_3$ провести квадрику?

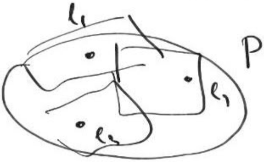
$\dim S^2V^* = 10$ (если $V = \Bbbk^4$)

$\dim \mathbb{P}(S^2V^*) = 9$

если 9 точек вот такие,

квадрика автоматом гладкая и 1-планарная, т.е. квадрика Сегре S

$l \cap l_i \neq \emptyset \ \forall i \Rightarrow l \subset S \Rightarrow l$ является прямолинейной образующей из второго семейства.



$P \subset \mathbb{P}_5$

$T_{l_1} \cap T_{l_2} \cap T_{l_3} =$
$=$ квадрика Сегре.

Аффинные квадрики $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$

$V = \Bbbk^n$
с координатами
$x_1, \dots, x_n$

Аффинная квадрика $Q = V(f)$ — это множество нулей (неоднородного) многочлена

$$f(x_1, \dots, x_n) = \underset{\substack{\cap \\ S^2V^*}}{f_2(x)} + \underset{\substack{\cap \\ V^*}}{f_1(x)} + \underset{\substack{\cap \\ \Bbbk}}{f_0} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_{0i} x_i + \beta_{00}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}$$

Вкладываем $\Bbbk^n = V$ в $\Bbbk^{n+1} = W$ с координатами $x_0, x_1, \dots, x_n$ в качестве аффинной гиперплоскости $x_0 = 1$ и рассматриваем как стандартную карту U_0 в пр-ве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$

$Q = \overline{Q} \cap U_0$

$\overline{Q} = V(\overline{f})$ — проективное замыкание квадрики Q, задаваемое однородным многочленом

$$\overline{f}(x_0,\dots,x_n) = \underline{f_2(x_1,\dots,x_n)} + x_0 f_1(x_1,\dots,x_n) + x_0^2 f_0 =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} \beta_{ij} x_i x_j \qquad \beta_{0i} = \beta_{i0}$$

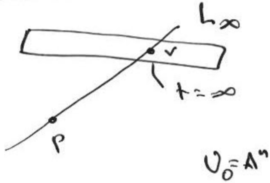
проективная квадрика $\overline{Q}$ имеет матрицу Грама

$$(\beta_{ij}) = \left.\begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01}\cdots\beta_{0n} \\ \beta_{01} & \\ \vdots & \underbrace{\boxed{\beta_{ij} = f_2}}_{Q_\infty} \\ \beta_{0n} & \end{pmatrix}\right\}\overline{Q}$$

Бесконечно-удалённая гиперплоскость карты U_0 задаётся уравнением $x_0=0$ и представляет собою

$L_\infty = \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(V)$ — множество направлений в $\mathbb{A}_n$

$x_1 \dots x_n$ - однор. коорд. на L_∞



$$(pv) \cap U_0 = \{ p + tv \mid t \in \Bbbk \}$$

если $v \in V$, $p \in U_0$.

$$Q_\infty := L_\infty \cap \overline{Q} = V(f_2)$$

задаётся уравнением $f_2(x_1,\dots,x_n) = 0$

2 аффинные квадрики наз. аффинно-конгруэнтными если они переводятся одна в другую аффинным преобразованием пр-ва $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$.

$\mathrm{Aff}(V)$ - аффинные преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$

$$\varphi(x) = \varphi(p) + D_\varphi(\overrightarrow{px})$$

$$\varphi(p+v) = \varphi(p) + D_\varphi(v)$$

где $D_\varphi \in GL(V)$, $p \in \mathbb{A}^n$ – произвольно выбранная начальная точка.

дифференциал φ.

$$Aff(V) \simeq V \rtimes GL(V)$$

стабилизатор начальной точки p.

нормальная подгруппа сдвигов = = преобразования с тождественным $D_\varphi = Id_V$

$$\boxed{W = \Bbbk e_0 \oplus V}$$

Факт 1 $Aff(V) \subset PGL(W)$ как подгруппа проективных преобразований, переводящих в себя бесконечную гиперплоскость H_∞ карты $U_0 = \underline{\underline{e_0}} + V$.

Пусть есть аффинное $\underline{\varphi : U_0 \longrightarrow U_0}$

$e_0 \in W$, $e_0 \in U_0 = e_0 + V$ $\qquad \varphi(e_0 + v) = \varphi(e_0) + D_\varphi(v)$

Зададим линейный оператор $f : W \longrightarrow W$, $W = \Bbbk e_0 \oplus V$

так, чтобы $\begin{array}{l} f(e_0) = \varphi(e_0) \\ f(v) = D_\varphi(v) \end{array}$

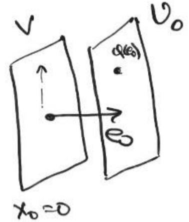
$$f(x_0 e_0 + v) = x_0 \cdot \varphi(e_0) + D_\varphi(v)$$

линейный оператор. $\ker f = 0$ (т.е. $f \in GL(W)$)

$$x_0 e_0 + v \in \ker f$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 \varphi(e_0) = -D_\varphi(v) \in V$$



$V \subset W$ – это аннулятор $x_0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D_\varphi(v) = 0$, но $D_\varphi \in GL(V) \Rightarrow$

$\Rightarrow v = 0.$

$f \in GL(W)$ индуцирует проективное преобразование

$$\bar{f} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$$

ограничивается на карту $\underset{\{x_0=1\}}{\overset{}{U_0}}$ в φ.

Если задано проективное преобразование

$$\bar{f} : \mathbb{P}(W) \longrightarrow \mathbb{P}(W), \quad f \in GL(W).$$

такие что $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ переходит в себя $\Rightarrow$

$f(V) \subset V \qquad f(e_0) \notin V$ т.к. $\operatorname{im} f \neq V \subsetneq W$

$$f(e_0) = \lambda e_0 + u \in \Bbbk e_0 \oplus V, \text{ где } \lambda \neq 0$$

$$f(e_0 + v) = \underbrace{\lambda e_0 + u}_{f(e_0)} + \underset{\underset{V}{\cap}}{f(v)} \qquad \boxed{e_0 + V}$$

Линейный оператор $g = \lambda^{-1} f$ задаёт то же самое проективное преобразование $\bar{g} = \bar{f}$ пространства W.

$$g(e_0 + v) = e_0 + \lambda^{-1} u + \lambda^{-1} f(v)$$

$\varphi = g|_{U_0}$ – это аффинное преобразование пр-ва U_0 с $\varphi(e_0) = e_0 + \lambda^{-1}u$

$D\varphi = \lambda^{-1}f$

Факт 2 над бесконечным полем. Две аффинные квадрики Q_1 и Q_2 аффинно конгруэнтны $\Leftrightarrow$ $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ переводятся одна в другую проективными преобразованиями, сохраняющими L_∞.

$\exists\, \varphi \in \mathrm{Aff}(V) : \varphi(Q_1) = Q_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, \bar{f} \in \mathrm{PGL}(W) : \bar{f}(\overline{Q}_1) = \overline{Q}_2 \,\&\, \bar{f}(L_\infty) = L_\infty$

$\exists\, \bar{f} \in \mathrm{PGL}(W) : \underline{\bar{f}(\overline{Q}_1) = \overline{Q}_2}$ и $\underline{\bar{f}(L_\infty) = L_\infty}$

$\swarrow$ $\Downarrow$

$\bar{f}(Q_1) = \bar{f}(\overline{Q}_1 \setminus L_\infty) = \overline{Q}_2 \setminus L_\infty$

$\bar{f}$ сохраняет U_0 и действует там аффинным преобразованием

$\varphi : U_0 \to U_0$ $\quad \underline{\varphi(Q_1) = Q_2}$ (*)

$\downarrow$

распространяем φ до проективного преобразования $\bar{f} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$, $\bar{f}(L_\infty) = L_\infty$

(*) $\Rightarrow$ $\bar{f}(\overline{Q}_1 \setminus L_\infty) = \overline{Q}_2 \setminus L_\infty$

две квадрики $f(\overline{Q}_1)$ и $\overline{Q}_2$ совпадают всюду вне гиперплоскости L_∞

$\Downarrow$

тогда они всюду совпадают,

Лемма: Если квадрика Q и гиперплоскость H над бесконечным полем таковы, что $Q \not\subset H$ и $H \not\subset Q$, то $Q \cap H$ однозначно восстанавливается по $Q \setminus H$.

аффинная часть Q не пуста

аффинная часть Q не гиперплоскость

Доказать в качестве упражнения