Лекция 21 апреля. Конформная теория коник.

Все на борьбу с герпесом! Им больны несколько десятков миллионов человек, причём у большинства заражённых болезнь протекает незаметно. В этом-то и заключается самое страшное!

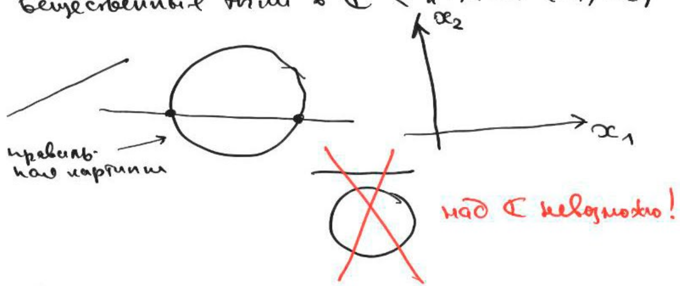
Из ненаписанного воззвания ВОЗ

Конформная теория евклидовых коник

$\mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2)

$\|$

вещественные точки в $\mathbb{C}^2$ с к-тами (x_1, x_2)



$\mathbb{C}^2$ - это стандартная аффинная карта U_0 $(x_0=1)$ в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$

(x_1, x_2) - координаты в $U_0 = \mathbb{C}^2$

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$$

$\ell_\infty = \mathbb{P}_2 \setminus U_0$ — прямая $x_0 = 0$ наз.

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)}_{(x_1,x_2)}$ бесконечностью

Евклидова квадратичная форма $\overset{(v,v)}{x_1^2+x_2^2}$ на $\mathbb{R}^2$

продолжается по линейности на $\mathbb{C}^2$

$$(\,,\,) : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

комплексно билинейное.

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \sum \lambda_i \mu_i (v_i, w_i)$$

евклидова кв. форма на $\mathbb{C}^2$

$((i,1), (i,1)) = 0$ это изотропный вектор!

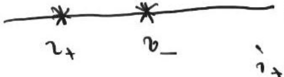
$((t_1,t_2), (s_1,s_2)) = t_1 s_1 + t_2 s_2$, где $t_i, s_i \in \mathbb{C}$

евклидова структура — это квадратичная форма на ℓ_∞

множество изотропных векторов евклидовой квадратичной формы на прямой ℓ_∞ наз. конформной структурой на $\mathbb{R}^2$

конформная структура = евклидово скалярное произведение с точностью до умножения на ненулевую константу

$x_1^2 + x_2^2 = 0$

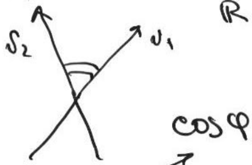


$\ell_\infty = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

$i_+ = (i:1) = (1:-i)$

$i_- = (-i:1) = (1:i)$

Можно определить геометрический угол между прямыми (между векторами скоростей)



φ — меньший из 2х смежных углов

$$\cos\varphi = \frac{|(v_1,v_2)|}{\sqrt{(v_1,v_1)(v_2,v_2)}}$$

не меняется: (1) при умножении скалярного произведения на константу
(2) при умножении векторов на ненулевые константы

Как охарактеризовать $\mathbb{R}^2$ внутри $\mathbb{C}^2$

на $\mathbb{C}^2$ есть комплексное сопряжение

$$\sigma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad (a,b) \longmapsto (\bar{a},\bar{b})$$

полулинейное преобразование (над $\mathbb{C}$)

$$\sigma(u+v) = \sigma(u)+\sigma(v)$$
$$\sigma(u\cdot\lambda) = \sigma(u)\cdot\bar{\lambda} \quad \forall \lambda\in\mathbb{C}$$

над $\mathbb{R}$ σ — это линейное преобразование

$\Phi \subset \mathbb{C}^2$ (или в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$)

наз. вещественной фигурой, если $\sigma(\Phi)=\Phi$

σ переводит Φ в себя (но может нетривиально действовать на точки)

$\Updownarrow$

прямая или коника на $\mathbb{P}_2$ вещественна $\Longleftrightarrow$ в стандартном базисе можно задать уравнением с вещественными коэф-тами.

уравнение определяется фигурой однозначно, с точностью до умножения на константу

σ: каждый коэф-т уравнения сопрягается

$a \longleftrightarrow \bar{a} = \lambda a$ λ одинаков для всех коэф-тов.

$|\bar{a}| = |a| \Rightarrow |\lambda| = 1$ $\in \mathbb{C}$

отсюда $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ $\lambda = \theta^2$

$$\underset{\sim}{\theta a} \to \overline{\theta a} = \theta^{-1}\lambda a = \theta^{-1}\theta^{2} a = \underset{\sim}{\theta a}$$

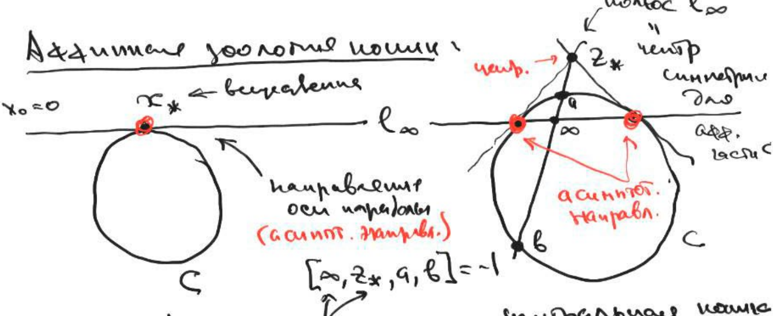
$\theta a \in \mathbb{R}$, т.е. фигуру можно задать уравнением с вещеcтв. коэф-тами.

У вещественной фигуры может не быть вещественных точек $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2$

над $\mathbb{C}$ – это непустая гладкая квадрика,
над $\mathbb{R}$ – это $\varnothing$.

Мы занимаемся непустыми гладкими вещественными кониками (над $\mathbb{R}$).

Аффинная зоология коник:

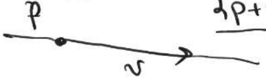


парабола   центральная коника

$z_* =$ середине $[a,b]$

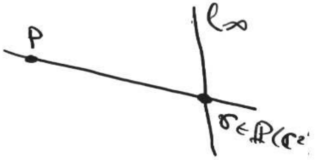
точки бесконечно-удалённой прямой l_∞ — это направления в $\mathbb{C}^2$

$U_0 = \mathbb{C}^2$



$\underline{\{p+tv\}}$ $\uparrow$ $v \in \mathbb{C}^2$

видимый в U_0 кусок проективной прямой $(pv) \subset \mathbb{P}_2$



$t = \frac{x_1}{x_2}$

$x_2 p + x_1 t \xrightarrow{x_2=0} t$

Центральная коника наз. эллипсом если её асимптотические направления не вещественны (и комплексно сопряжены) и наз. гиперболой если асимпт. направления вещественны.

Пример: Пусть аффинная коника в $\mathbb{R}^2$ имеет уравнение

$$U_0 \atop x_0=1 \quad \left[\beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\beta_{01}\underset{\nwarrow x_0}{x_1} + 2\beta_{02}\underset{\nwarrow x_0}{x_2} + \underset{\nwarrow x_0^2}{\beta_{00}} = 0 \right.$$

$\downarrow$

её проективное замыкание в $\mathbb{P}_2$ имеет матрицу Грама:

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \hline \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{array}\right)$$

Вещественность: $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$

Гладкость: $\boxed{\det B \neq 0}$

Непустота: $\underbrace{\beta_{22}}$ $\underbrace{\Delta_{12} = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}$ $\underbrace{\Delta = \det B}$

знаки отличны от $+ + +$ и от $- + -$

Асимптотические направления: $C \cap l_\infty$

$\ell_\infty = \{x_1 = 0\}$ $\quad$ $C \cap \ell_\infty$ — квадрика с матрицей Грама

$$B_\infty = \boxed{\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{matrix}} \qquad \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2$$

$\delta > 0$ • 2 вещ. корня — гипербола

$\delta < 0$ • 2 компл. сопр. корни — эллипс

$\delta = 0$ • 1 корень — парабола

$$\underset{\underset{-\det B_\infty}{\shortparallel}}{\delta} = D/4 = \beta_{12}^2 - \beta_{11}\beta_{21}$$

Как искать центр z_* — полюс прямой ℓ_∞

$$z_* = (z_0 : z_1 : z_2) \longrightarrow \ell_\infty \ (x_0 = 0)$$

$$(z_0 : z_1 : z_2) \cdot B = (1 : 0 : 0)$$

$$B^{-1}B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 0 \ 0} \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$$

$(z_0 : z_1 : z_2)$ = первая строка матрицы $B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^\vee =$

= первая строка $B^\vee$

$$\left(\begin{array}{c|cc} \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{array}\right)$$

$$= \Big(\underset{\underset{\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2}{\shortparallel}}{\Delta_{12}} : \underbrace{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}_{X} : \underbrace{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}_{Y}\Big)$$

↖ coord. точки карты U_0 это центр.

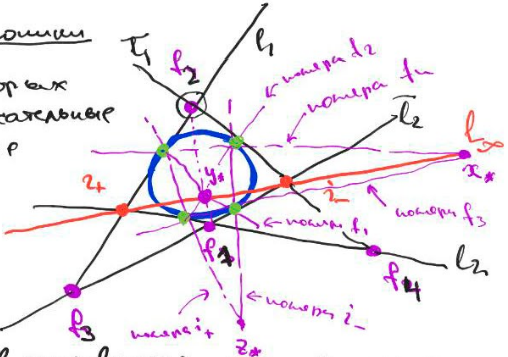
$$\text{в } U_0 \quad z_* = \left(\frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}}\right)$$

если $\Delta_{12} = 0$, то C — это парабола с направлением оси (X, Y)

Конформная зоология коник

Центральные коники

4 точки в которых пересекаются касательные к C, опущенные из точек $i_\pm$, наз. **фокусами** центральной коники.



Поляры фокусов называются **директрисами**

Две из 3-х пар противоп. сторон 4-вершинника abcd — зелёного на рисунке.

$$f_3 = \underbrace{l_1 \cap \bar l_2} \quad f_4 = \underbrace{\bar l_1 \cap l_2} \quad f_1 = \underbrace{l_2 \cap \bar l_2} \quad f_2 = \underbrace{l_1 \cap \bar l_1}$$

не веществ. и комплексно сопряжены друг с другом — вещественны

У центральной коники 2 вещест. фокуса и 2 невещеcтв. комплексно-сопряжённых.

$\Delta x_* y_* z_*$ — автополярен относительно C

x_* и y_* гармоничны i_+ и i_- на l_∞

на пучке прямых f_2^* коника задаёт **инволюцию сопряжения** с неподвижными точками (i_+f_2) и (i_-f_2)

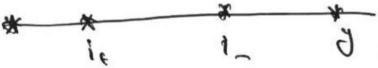
x_* и y_* сопряжены отн. C: $(f_2x_*) \leftrightarrow (f_2y_*)$

$$\Downarrow$$

$$[i_+, i_-, x_*, y_*] = -1$$

x_* и y_* перпендикулярны относительно евклидовой структуры.

$\{i_+, i_-\} = \overset{\mathcal{E}}{x_1^2} + x_2^2 = 0$



евклидова квадрика задаёт сопряжение на ℓ_∞ с неподв. точками $i_\pm$

$[i_+, i_-, x_*, y_*] = -1 \Leftrightarrow x_*$ и y_* сопр. отн. $\mathcal{E}$

т.е. $\tilde{\mathcal{E}}(x_*, y_*) = 0$

евклид. перпендикулярно сл.

Факт! $(v, w) = 0$ в $\mathbb{C}^2$

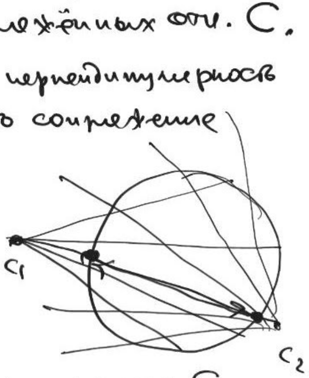
$\Updownarrow$

$[i_+, i_-, v, w] = -1$ на $\ell_\infty = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

x_* и y_* это два направления, одновременно перпендикулярных и сопряжённых отн. C.

Оси единственны если перпендикулярность это не то же самое, что сопряжение относительно C.

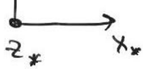
Для двух разных инволюций $\exists!$ пара точек, на которую они действуют одинаково.



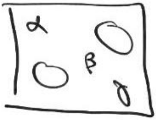
x_* и y_* наз. главными осями кривой C.

x_* и y_* евклидово перпендикулярны

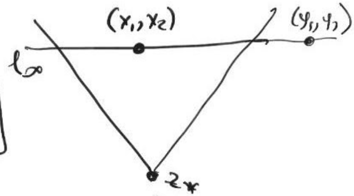
Δ $x_* y_* z_*$ автопол.



$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha}x^2+\frac{\gamma}{\alpha}y^2=1}$$



$$\boxed{\begin{matrix}\beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02}\\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22}\end{matrix}}$$



перп: $(y_1:y_2)=(x_2:-x_1)$

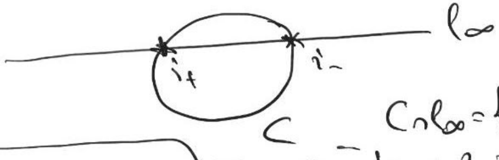
сопр: верхний слой $B^\vee$

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{12} & \beta_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ -x_1\end{pmatrix}=0$$

решение этого квадратного уравнения — это 2 точки направлений главных осей.

Сопряжение отн. C и евклидова перпендикулярность совпадают на l_∞

$$\Updownarrow$$



$C\cap l_\infty=\{i_\pm\}$

Упр.: Проверить, что $C\ni\{i_+,i_-\}$

$$\Updownarrow$$

когда C — евклидова окружность.