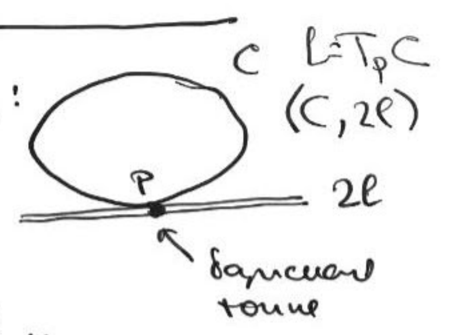
Лекция 16 апреля. Пучки квадрик (продолже...

Пучки коник

- базисное множество — точки, через которые проходят все коники: 1, 2, 3 или 4 точки (над замкнутым полем $\mathbb{k}$)
- Спектр — множество особых коник в пучке: 1, 2 или 3 коники.

- **Пучок с одной базисной точкой:**

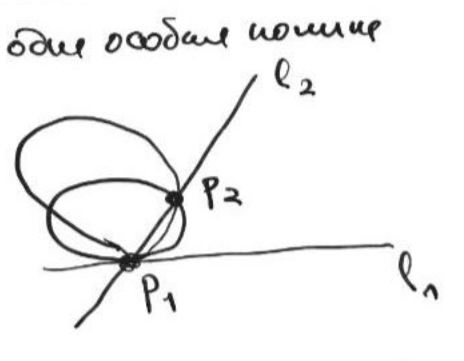


Это гладкие коники, касающиеся друг друга в единственной точке.

Порождён гладкой коникой и двойной касательной к ней в базисной точке

- - **Пучки с двумя базисными точками:**

(I) 2 базисных точки и ровно одна особая коника



Состоит из коник, проходящих через $p_1 \in \ell_1 \cap \ell_2$ и $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$

Прямая ℓ_1 касается всех гладких коник

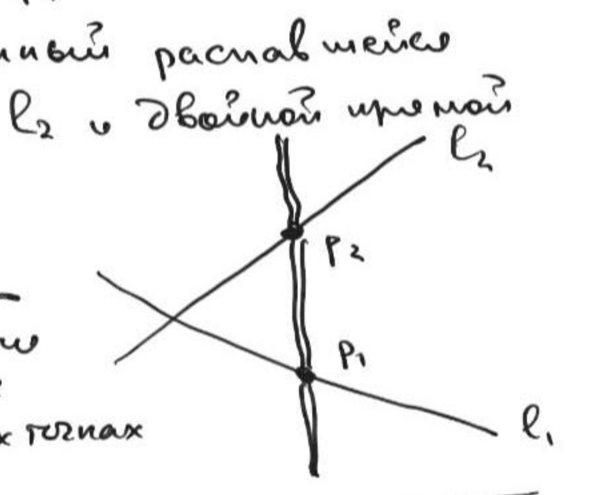
Точки p_1 и p_2 базисные

Такой пучок порождается распавшейся коникой $S = \ell_1 \cup \ell_2$ и некоторой гладкой коникой C:

(S, C) (1) $C \cap \ell_2 = \{p_1, p_2\}$ (2) $T_{p_1}C = \ell_1$

! коники C: $T_{p_1}C = \ell_1$, имеют codim$=2$

(II) Пучок, порождённый распавшейся коникой $S_1 = \ell_1 \cup \ell_2$ и двойной прямой $S_2 = 2(p_1p_2)$



Пучок состоит из всех коник, которые касаются двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ и $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$

- Коники, касающиеся заданной прямой в заданной точке, составляют линейную систему коразмерности 2 в пр-ве коник на $\mathbb{P}_2$

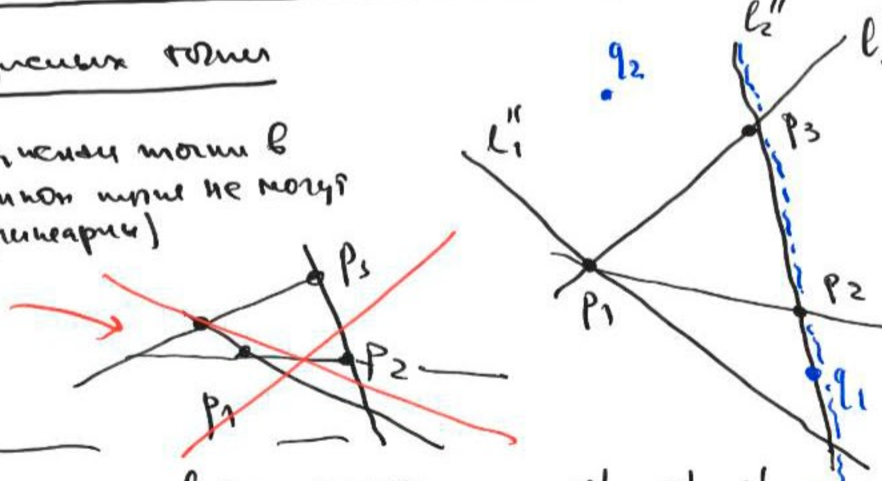
$\Uparrow$

- Коники C: полярой данной точки p отн. C является данная прямая ℓ, образуют линейную систему коразмерности 2

- **Три базисных точки**

(Упр: 3 базисных точки в невырожденном пучке не могут быть коллинеарны)

4 Б.Т. $\rightarrow$



$\boxed{\text{Пучок состоит из всех коник, проходящих через точки } p_2, p_3 \text{ и касающихся прямой } \ell_1'' \text{ в точке } p_1}$

$S' = \ell_1' \cup \ell_2'$

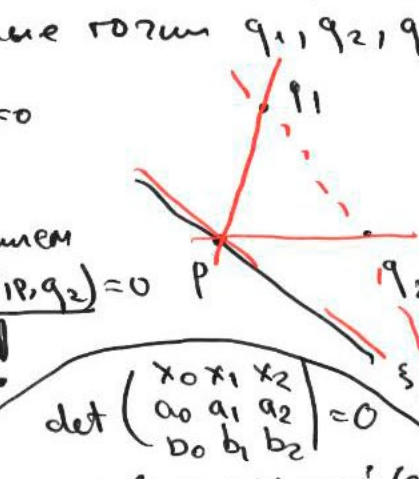
$S'' = \ell_1'' \cup \ell_2''$ касается ℓ_1'' в точке p_1

Все коники, касающиеся ℓ_1'' в p_1 — это система коразмерности 2 $\Rightarrow$ прохождение через p_2 и p_3 это максимум 2 линейно-незав. условия

$\Downarrow$

это как минимум пучок!

Пример использования: Написать уравнение коники, касающейся прямой $\xi(x) = 0$ в точке p: $\xi(p) = 0$ и проходящей через три заданные точки q_1, q_2, q_3



Коники через q_1, q_2, касающиеся $\xi = 0$ в p составляют пучок (S_1, S_2) где

$S_1 = (pq_1) \cup (pq_2)$ задаётся уравнением

$f_1(x) = \det(x, p, q_1) \cdot \det(x, p, q_2) = 0$

$S_2 = (rp) \cup (q_1q_2)$ задаётся ур-ем:

$f_2(x) = \underbrace{\det(x\, r\, p)}_{\xi} \det(x q_1 q_2) = 0$

$= \xi(x) \cdot \det(x q_1 q_2) = 0$

! $\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ это уравнение прямой (ab)

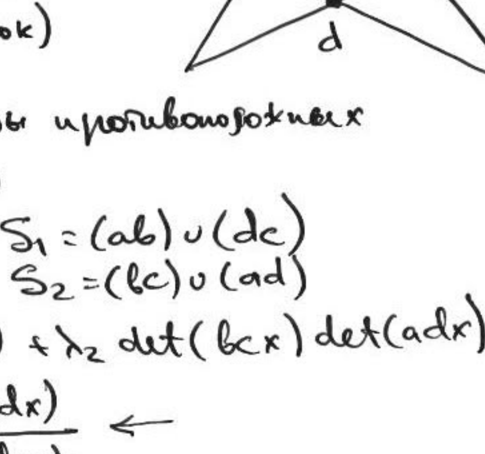
– подобрать λ_1 и λ_2 так, чтобы $\lambda_1 f_1(q_3) + \lambda_2 f_2(q_3) = 0$

$\lambda_1 = -f_2(q_3) \qquad \lambda_2 = f_1(q_3)$

Ответ: $-f_2(q_3) f_1(x) + f_1(q_3) f_2(x)$, где f_1, f_2 — те же что и выше

- Пучок с четырьмя базисными точками a, b, c, d (простой пучок)

(Упр: доказать, что все коники, проходящие через 4 данные точки, никакие 3 из которых не коллинеарны, образуют пучок)



Особые коники — это 3 пары противоположных сторон 4-вершинника $abcd$

Это пучок (S_1, S_2), где $S_1 = (ab) \cup (dc)$, $S_2 = (bc) \cup (ad)$

$\lambda_1 \det(abx)\det(dcx) + \lambda_2 \det(bcx)\det(adx) = 0$

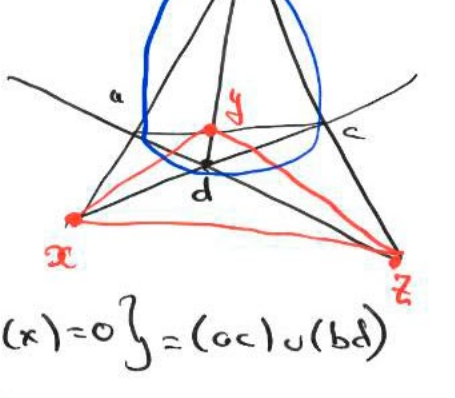
$-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{\det(bcx)\det(adx)}{\det(abx)\det(dcx)}$ $\leftarrow$

Упр: Получить все предыдущие пучки как вырождение регулярного, происходящие когда $d \to c$

$abcd \to *$ $\quad b, c, d \to *$ $\quad \begin{cases} a \leftrightarrow b \\ d \leftrightarrow c \end{cases}$

Факт $\triangle xyz$ автополярен относительно любой коники, проходящей через a, b, c, d.

(!)



$f(x) = 0$ проходит через $abcd$

$\Downarrow$

- f является линейной комбинацией $\{f_x(x) = 0\} = (ab) \cup (cd)$ и $\{f_y(x) = 0\} = (ac) \cup (bd)$
- $f = \lambda f_x + \mu f_z$ где $\{f_z(x) = 0\} = (ad) \cup (cb)$
- $f = \lambda' f_y + \mu' f_z$

$x \in \ker \hat{f}_x \Rightarrow \tilde{f}_x(x, y) = 0$ и $\tilde{f}_x(x, z) = 0$

$y \in \ker \hat{f}_y \Rightarrow \tilde{f}_y(y, x) = 0$ и $\tilde{f}_y(y, z) = 0$

$z \in \ker \hat{f}_z \Rightarrow \tilde{f}_z(z, x) = \tilde{f}_z(z, y) = 0$

$\boxed{f = \lambda f_x + \mu f_z}$ Мы знаем, что $\tilde{f}_x(x, z) = 0$ и $f_z(x, z) = 0$ тогда $\tilde{f}(x, z) = 0$; аналогично $\tilde{f}_z(y, z) = f_z(x, z) = 0$

влечёт $\tilde{f}(y, z) = 0 \Rightarrow$ что $x \in$ поляре z и $y \in$ поляре $z \Rightarrow$ поляра z — это прямая $(x\, y)$

Почему (xz) — это поляра т. y? $\Leftrightarrow \boxed{\tilde{f}(y, z) = \tilde{f}(y, x) = 0}$ это потому,

$\tilde{f}(y, z) = 0$ я знаю, что $\tilde{f}_y(y, z) = 0$ и $\tilde{f}_z(y, z) = 0$

поэтому $\tilde{f}(y, z) = \lambda f_y(y, z) + \mu f_z(y, z) = 0$

$\tilde{f}(y, x) = 0$ $\quad f_y(yx) = 0 \quad f_x(yx) = 0 \Rightarrow$

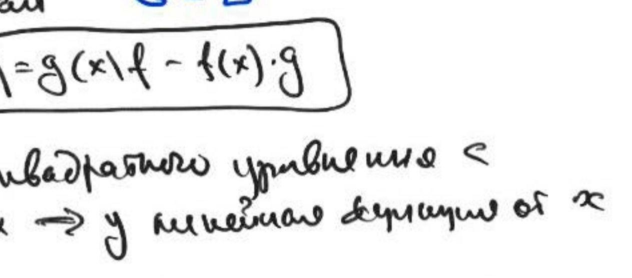
$\Rightarrow \tilde{f}(y, x) = \lambda f_y(yx) + \mu f_x(y, x) = 0$

Инволюция Дезарга Пусть есть пучок коник $L \subset \mathbb{P}_5$ и прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ не проходит через базисные точки L (не является компонентой никакой особой коники в L)

L задаёт на ℓ инволюцию Дезарга:

$L: \ell \xrightarrow{\sim} \ell$ x и y переставляются $\Leftrightarrow$ $\exists$ квадрика $q \in L$: $q \cap \ell = \{x y\}$

отображение $x \mapsto y$ полиномиально.



уравнение коники $q \in L$, проходящей через x полиномиально зависит от x. $L = (\underset{f}{P}\underset{g}{Q})$ $\boxed{q = g(x) f - f(x) \cdot g}$

y — это второй корень квадратного уравнения с данным корнем $x \Rightarrow y$ линейная функция от x

У инволюции Дезарга 2 неподвижных точки $\Rightarrow$ в любом пучке есть ровно 2 коники, касающиеся данной прямой, не проходящей через базисные точки пучка

- Задание для продвинутых: сравнить "конику 12 точек" с "окружностью 9 точек"