Лекция 14 апреля. Пучки квадрик.

А что если следом за вирусом нас атакуют марсианцы? Надо готовиться прям сейчас!

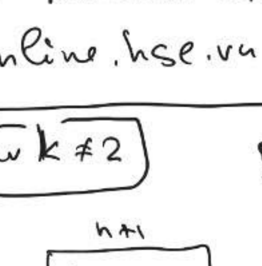
В этой лекции мы считаем, что $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ алгебраически замкнуто

Контрольная будет 30 апреля $\approx 10^{00} - 12^{00}$ на сайте online.hse.ru

пока не окончательное время.

---

char $\mathbb{k} \neq 2$ $\quad \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пространство квадрик в $\mathbb{P}_n$



это $\mathbb{P}(S^2V^*) = \mathbb{P}_N$

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Имеется точная биекция между точками $\mathbb{P}_N$ и геометрическими квадриками в $\mathbb{P}_n$

Линейные подпространства в $\mathbb{P}_N$ наз. линейными системами квадрик. Если размерность линейной системы 1, 2, 3, то система называется пучком, связкой, сетью

pencil, net, web

Пучок квадрик — это прямая $L \subset \mathbb{P}_N$

$L = (PQ) \quad P = V(f) \quad Q = V(g) \quad f, g \in S^2V^*$

$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0$

$$L = \{ q = t_0 f + t_1 g \mid (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \}$$

$\underbrace{t_0 f(x) + t_1 g(x) = 0}_{q(x)} \qquad t_0 t_1 \in \mathbb{k}$

если $f(x) = g(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow$ Все квадрики пучка содержат $P \cap Q$

$P \cap Q = \bigcap\limits_{q \in (PQ)} V(q)$ — не зависит от выбора базиса P, Q и прямой $L \subset \mathbb{P}_N$

Базисное множество пучка

Пусть квадратичные формы f и g имеют матрицы Грама F и G. Тогда можно определить

характеристический многочлен $\chi_{F,G}(t_0, t_1) \overset{\text{def}}{=}$

однородный степени $n+1$ $\longrightarrow \det(t_0 F + t_1 G) \in \mathbb{k}[t_0, t_1]$

Он зависит
- от выбора базиса в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$
- от выбора базиса F, G в пучке квадрик.
- от выбора самих матриц F, G в классе пропорц.

$\triangleright$ замена базиса в $\mathbb{P}_n$: $F, G \longmapsto CFC^T \quad CGC^T$ матрицы

$\chi_{F,G} \longrightarrow \chi_{F,G} \cdot \det C^2$

$\triangleright$ замена базиса в пучке L $\quad (F,G) \to (F,G) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

вектор элементами которого служат матрицы $\quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Это замена переменных $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$

$\triangleright$ замена уравнений не пропорциональные $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda t_0 \\ \mu t_1 \end{pmatrix}$

χ определён пучком однозначно с точностью до линейных преобразований координат на прямой $L \subset \mathbb{P}_N$.

Инвариант пучка — это набор корней многочлена $\chi_{F,G}$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}^2)$ с точностью до гомографии $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$. Корни = такие $\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$, что квадрики $t_0 F + t_1 G$ вырождены

$$\boxed{\text{Либо } \chi_{FG} \equiv 0 \quad (\text{все квадрики в пучке } L \text{ вырождены})}$$

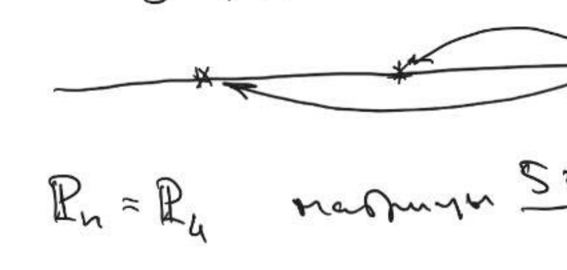
$t_0 F + t_1 G \qquad \chi(t_0 F + t_1 G) \qquad \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda t_0 \\ \mu t_1 \end{pmatrix}$

$x^t F x = 0$

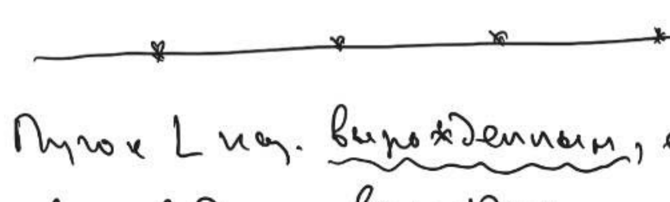
$$\begin{pmatrix} t_0 a + t_1 e & t_0 b + t_1 f \\ t_0 b + t_1 f & t_0 c + t_1 g \end{pmatrix} = t_0 \underset{F}{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}} + t_1 \underset{G}{\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}$$

$\det(*)$

$\chi(t_0, t_1)$ — квадратичная форма.



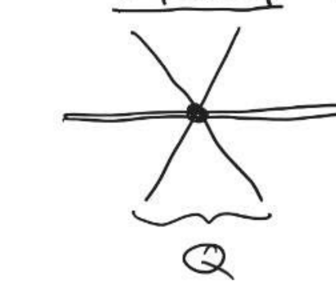
$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_4 \quad$ матрицы $5 \times 5 \qquad \chi(t_0, t_1)$ — мн-н степени 5



5 корней.

Пучок L наз. вырожденным, если $\chi \equiv 0 \Leftrightarrow$ все квадрики вырождены.

Пример $L = (PQ)$, $\operatorname{Sing}(P) \cap \operatorname{Sing}(Q) \ni p$



все квадрики в пучке вырождены $\quad P = V(f)$, $Q = V(g)$

$p \in \ker \hat{f} \cap \ker \hat{g}$

$\forall t_0, t_1 \; p \in \ker(t_0 \hat{f} + t_1 \hat{g})$

Напоминание $\hat{q} : V \to V^*$ оператор корреляции

$v \longmapsto \hat{q}(v) : V \to \mathbb{k}$

$u \longmapsto \tilde{q}(u, v)$

поляризация преобразование

$q \in S^2V^* \longleftrightarrow \tilde{q}(u,w) : V \times V \to \mathbb{k}$ симм. и билинейна.

$q(v) = \tilde{q}(v, v)$

$$\tilde{q}(u,w) = \frac{q(u+w) - q(u) - q(w)}{2}$$

Пучок наз. невырожденным, если $\chi_{F,G} \not\equiv 0 \Rightarrow$ в пучке имеется конечное число особых квадрик, а именно, $n+1$ штук с учётом кратностей.

$\operatorname{mult}(S)$ — кратность квадрики $S = \lambda F + \mu G$ наз. кратность корня $(\lambda : \mu)$ в характеристическом многочлене $\chi_{F,G}(t_0, t_1)$. = max. степень m: $\chi_{F,G}(t_0, t_1)$ делится на $\det^m \begin{pmatrix} t_0 & \lambda \\ t_1 & \mu \end{pmatrix}$ в $\mathbb{k}[t_0, t_1]$

У каждой особой квадрики $S \subset \mathbb{P}_n$ есть геом. инвариант — $\dim \underset{\mathbb{P}(\ker \hat{q})}{\underbrace{\operatorname{Sing} S}} = \operatorname{cork} S - 1 \qquad S = V(q)$

$\operatorname{rk} S = \dim \operatorname{im} \hat{q}$

$\dim \ker \hat{q} = \operatorname{cork} S$

Факт: $\operatorname{mult} S > \dim \operatorname{Sing} S$ — В невыр. пучке

$\operatorname{mult} S \geq \operatorname{cork} S$ ← коранг матрицы Грама. (размерность $\ker \hat{q}$)

на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

Док-во: Выберем в L базис (S, G), где G — неособая. Над $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ G можно сделать единичной $(n+1) \times (n+1)$-матрицей в некотором базисе пр-ва V. $\quad \chi(S + tE)$ особой квадрике S отвечает корень $t = 0$. ($t = \infty$ это E)

Как связана кратность этого корня с рангом матрицы S?

$\chi(tE + S) = \det(tE + S) = t^{n+1} + t^n \cdot \operatorname{tr} S + t^{n-1} \cdot \sigma_2(S) \ldots$

$S = (s_{ij}) \qquad = t^{n+1} + \ldots + t^{n-k} \cdot \sigma_k(S) + \ldots$

сумма главных $k \times k$-миноров матрицы S

$\operatorname{cork} S = k \qquad \dim \ker \hat{q} = k$

$\operatorname{rk} S = n+1-k \Rightarrow$ все миноры порядка $> n+1-k$ зануляются

$\chi(tE + S) = t^{n+1} \ldots t^k \sigma_{n+1-k} + 0 \Rightarrow$ (посл. ненулевой)

$t = 0$ это корень кратности как минимум k.

Содержательный пример: пучки коник $L \subset \mathbb{P}_5$ (невырожденные)

- Базисное множество = пересечение всех коник пучка = $P \cap Q$ $\forall$ базиса P, Q на L. Может состоять из 1, 2, 3, 4 точек.

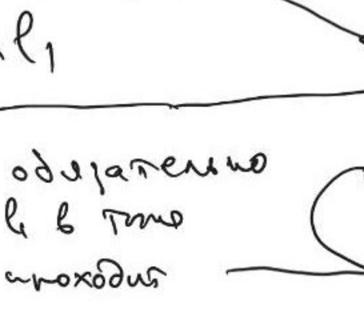
$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$

$\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$

- Вырожденные квадрики (Множество вырожденных квадрик в пучке L обозн. $\operatorname{Spec} L$ = множество корней χ_{PQ} с точностью до гомографии $L \to L$). = 3 точки на $\mathbb{P}_1$ с точностью до гомографии

1 точка кратности 3 $\quad$ 2 точки кратностей 1 и 2 и 3 точки кратности 1

Пучок с одной Б.Т.

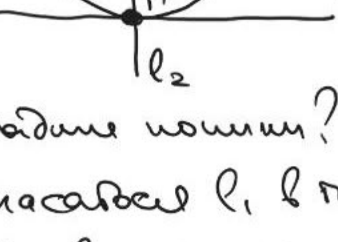


Особая квадрика ровно одна, это двойная прямая, касающаяся в базисной точке с любой гладкой квадрикой пучка.

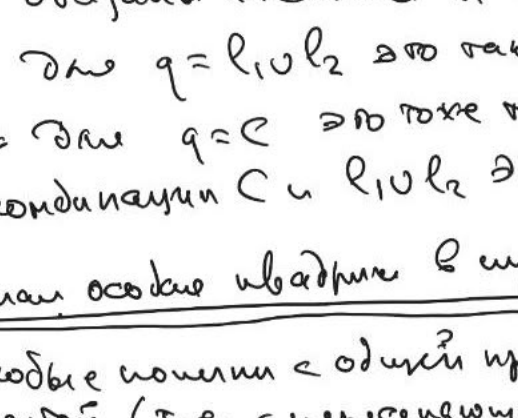
Пучки с 2 Б.Т.

$S_1 = \ell_1 \cup \ell_2$

$S_2 = 2(p_1 p_2)$



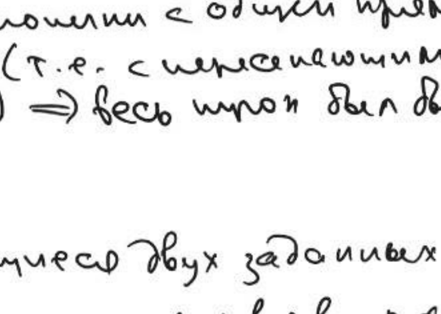
Эти картинки возникают только одновременно, а именно в пучке коник, касающихся двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$, $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$



Пучок с 2 Б.Т. и одной особой квадрикой

$\#B = 2 \quad \#\operatorname{Spec} = 1$

гладкая обязательно касается ℓ_1 в точке $p_1 = \ell_2 \cap \ell_1$ и проходит через p_2

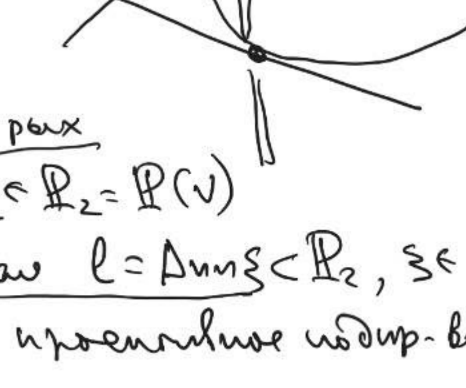


какова гладкая коника?

- Все квадрики пучка обязаны касаться ℓ_1 в точке p_1. $\quad \tilde{q}(p_1) = \operatorname{Ann} \ell_1 \quad$ для $q = \ell_1 \cup \ell_2$ это так. Для $q = C$ это тоже так. $\Leftarrow$ $\forall$ линейной комбинации C и $\ell_1 \cup \ell_2$ это так.

- $\ell_1 \cup \ell_2$ это единственная особая квадрика в пучке! иначе были бы 2 особые коники с одной прямолинейной компонентой. (т.е. с пересекающимися множествами особенностей) $\Rightarrow$ весь пучок был бы вырожден.

Теорема: Коники, касающиеся двух заданных прямых ℓ_1 и ℓ_2 в заданных точках $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$, $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ образуют невырожденный пучок, в котором имеется ровно 2 особых коники: двойная прямая $(p_1 p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$. Базисное множество такого пучка — $\{p_1, p_2\}$.



Док-во:

Коники относительно которых поляра заданной точки $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ является заданная прямая $\ell = \operatorname{Ann} \xi \subset \mathbb{P}_2$, $\xi \in V^*$ образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(V^*)$ проективное подпр-во коразмерности 2:

рассмотрим линейное отображение

$p : \underbrace{S^2V^* \longrightarrow V^*}_{\text{сюръективно.}}, \quad q \longmapsto \hat{q}(p) \in V^*$

(6) (3)

$\hat{q}(p) : V \to \mathbb{k}$

$u \longmapsto \tilde{q}(u, p)$

$\forall \xi \in V^* \; \exists q \in S^2V^* : \xi(u) = \tilde{q}(u, p) \; \forall u \in V.$

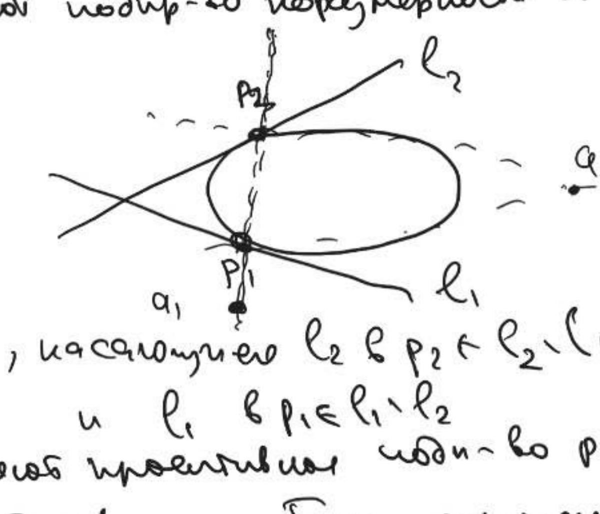
Упр: Убедитесь в этом до четверга!

$\dim \ker p = 3$

$\forall \xi \in V^*, \xi \neq 0$. Прообраз линейного подпр-ва $\mathbb{k} \cdot \xi$ имеет размерность $1 + 3 = 4$ в S^2V^*

$\{ q \mid \hat{q}(p) = \xi \}$ — линейное подпр-во коразмерности два

$\operatorname{Ann} \xi = \ell_1$, $p = p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2 \Rightarrow$ коники, касающиеся заданной прямой ℓ_1 в заданной точке $p_1 \in \ell_1$ составляют подпр-во коразмерности 2 в $\mathbb{P}_5$.



Коники, касающиеся ℓ_2 в $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ и ℓ_1 в $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ составляют проективное подп-во размерности $\geq 5 - 2 - 2 = 1 \qquad$ Если размерность ≥ 2

Построим пучок с $\#B = 2$ и $\#\operatorname{Sing} L = 2$.