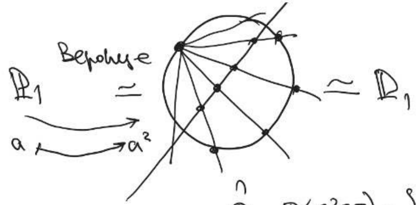
Лекция 2.04.2020

> "Устроить так, чтобы пролы не вылезали из своих нор и слушались телекрана, оказалось несложно. Вскоре они утратили способность сопротивляться не только Всемирной Власти, но и собственной лени, и даже болезням: прекратили работать и вымерли от простуды..."
>
> Д.Оруэлл. Из ненаписанного.

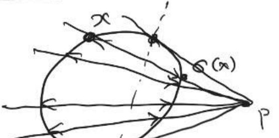


Гомография — это биекция, сохраняющая двойные отношения.

$$\hat{\mathbb{P}}_2 = \mathbb{P}(S^2 U) = \{ab \mid a, b \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)\}$$

$$[abcd]_{\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)} = [a^2b^2c^2d^2]_C \quad \dim U = 2$$

Пример: инволюция $\sigma : C \xrightarrow{\sim} C$, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$



$\forall \sigma : \sigma^2 = \mathrm{Id}$ $\exists!$ точка $p \in \mathbb{P}_2 \setminus C$:

$x \xleftrightarrow{\sigma} y \iff (xy) \ni p$

- если $\Bbbk$ - алг. замкнуто, то любая инволюция $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ имеет ровно 2 различных неподвижных точки.

Упр. Доказать утверждение алгебраически.

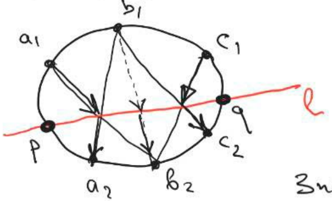
$\sigma : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$\sigma^2 = \mathrm{Id}$ $\quad A^2 \neq E$

$\Updownarrow$

$A^2 = \lambda E$, $\lambda \in \Bbbk^*$

- Для произвольной гомографии $\varphi: C \xrightarrow{\sim} C$



$\varphi: a_1 \to a_2\ b_1 \to b_2\ c_1 \to c_2$

и

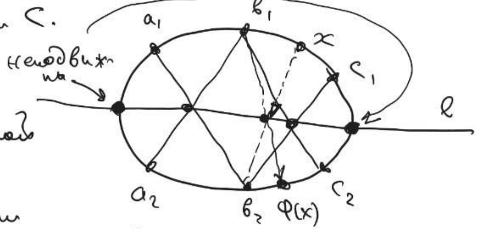
$(b_1: \ell \to C) \circ (b_2: C \to \ell)$

одинаково действуют на a_1, b_1, c_1

Значит совпадают!

p и q - неподвижные точки гомографии

Упр: разобрать случай, когда $p = q$, т.е. когда прямая ℓ (где ℓ соединяет перекрёстные точки: $(a_1 b_2) \cap (a_2 b_1)$ и $(c_1 b_2) \cap (c_2 b_1)$) касается коники C.

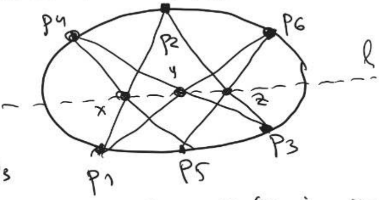


Выводы:

(1) $\varphi(x)$ строится одной линейкой (!!)

(2) неподвижные точки гомографии строятся одной линейкой.

(3) Ещё одно доказательство теоремы Паскаля

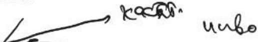


$x\,y\,z$ коллинеарны поскольку они лежат на перекрёстной оси гомографии

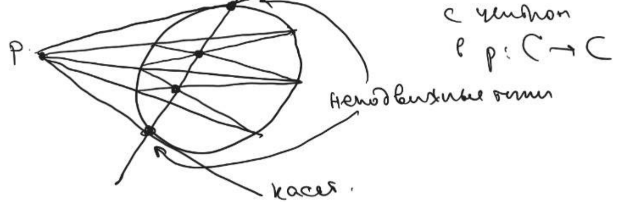
$C \xrightarrow{\varphi} C$: $p_4 \to p_1$ $p_2 \to p_5$ $p_6 \to p_3$

противоположные стороны соединяют "перекрёстные точки" - прямые вида $(x\,\varphi(y))$ и $(y\,\varphi(x))$ одной линейкой.

(4) Построение касательных



исходящие



Полярное преобразование

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ $\quad$ $V(q) \subset \mathbb{P}_n$ гладкая квадрика с уравнением $q(x)=0$, где $q \in S^2V^*$

$q : V \to \Bbbk$ — квадратичная форма

$\tilde{q} : V \times V \to \Bbbk$ $\quad$ $\tilde{q}(u,w) = \frac{1}{2}\left(q(u+w) - q(u) - q(w)\right)$

$\tilde{q}(v,v) = q(v) \quad \forall v \in V$

q и $\tilde{q}$ однозначно определяют друг друга, $\tilde{q}$ билинейна и симметрична.

$\tilde{q}$ стоит столько же, сколько линейный оператор

$\hat{q} : V \to V^*$, $v \mapsto \hat{q}(v) : V \to \Bbbk$ $\quad$ $u \mapsto \tilde{q}(u,v)$

корреляция.

Если форма q невырождена ($\Leftrightarrow \hat{q}$ изоморфизм)

то корреляция задаёт проективное преобразование

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$$

$$v \longmapsto \hat{q}(v)$$

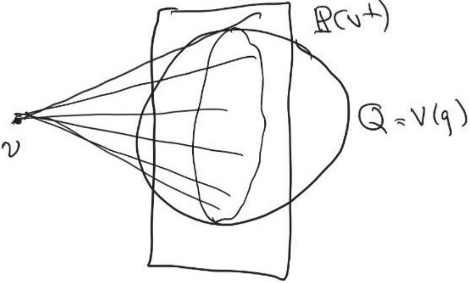
пр-во гиперплоскостей в $\mathbb{P}(V)$.

$\xi \in V^*$, $\xi \neq 0$ отвечает гиперплоскость $\operatorname{Ann} \xi \subset \mathbb{P}(V)$ = гиперпл.

$\operatorname{Ann} \hat{q}(v) = \{ u \mid \tilde{q}(u,v) = 0 \}$

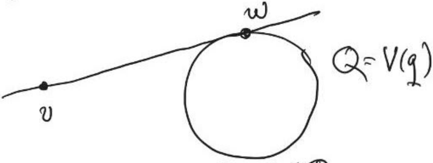
$\overset{\parallel}{\mathbb{P}(v^\perp)}$ с уравнением $\xi(x)=0$.

полярная гиперплоскость точки $v\in\mathbb{P}_n$ (поляра точки v)   точка v наз. полюсом гиперплоскости $\mathbb{P}(v^\perp)$.



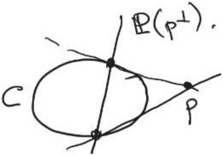
Полярная гиперплоскость $\mathbb{P}(v^\perp)$ пересекает квадрику Q по видимому из точки v контуру квадрики, т.е. по ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных из v.

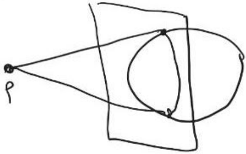
Прямая (v,w) касается Q $\Longleftrightarrow$ ограничение $q|_{(vw)}$ вырождено или $\equiv 0$.



$w\in Q$ $v\notin Q$

$$G_{vw}=\begin{pmatrix} q(v) & \tilde q(v,w) \\ \tilde q(v,w) & \underset{=q(w)}{0} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\tilde q(v,w)=0}$$





$\hat{q}: V \to V^*$ линеен, биективен

$\bar{q}: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n^*$ линейная биекция

имеется для любой гладкой квадрики, в том числе пустой!

$x^2+y^2=-1$

$\varnothing$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

$x=x_1/x_0$

$y=x_2/x_0$

$\hat{q}$ имеет матрицу, совпадающую с матрицей Грама.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto (x_0\, x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\xi}{\underset{\shortparallel}{(x_0,\ x_1,\ x_2)}}$$

$$\xi\ \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto (x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2}$$

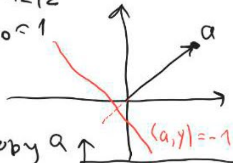
$a=(1,a_1,a_2) \longmapsto$ прямую с уравнением

$-y_0=a_1y_1+a_2y_2$

которая в аффинной карте $y_0=1$

выглядит как $\underline{a_1y_1+a_2y_2=-1}$

прямая, перпендикулярная вектору a и нах. на расстоянии $\frac{1}{|a|}$ от нуля по другую сторону от вектора a.



картинка в карте U_0, где $y_0=1$

Квадрики восстанавливаются по полярному преобразованию $\bar{q}: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ как ГМТ, лежащих на своих полярах: $\tilde{q}(p,p)=0 \Leftrightarrow p\in p^\perp$

Пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре

$\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$

Факт Над бесконечным полем две непустые гладкие квадрики совпадают: $V(q_1)=V(q_2)$ в $\mathbb{P}_n$ если и только если $q_1=\lambda q_2$ в S^2V^*, $\lambda\in\Bbbk\setminus 0$.

Вытекает из того, что поляритеты $\hat{q}_1:\mathbb{P}_n\to\mathbb{P}_n^\times$

$\hat{q}_2:\mathbb{P}_n\to\mathbb{P}_n^\times$

совпадают во всех точках квадрики $V(q_1)=V(q_2)$

$$p\in V(q)\Rightarrow \hat{q}(p)=\mathbb{P}(p^\perp)=T_pQ \text{ в } \mathbb{P}_n$$

Замечание: На гладкой квадрике над бесконечным полем всегда можно указать $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

$\Downarrow$

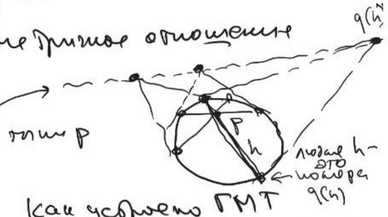
из того, что $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ одинаково действуют на эти точки, вытекает, что $\hat{q}_1=\hat{q}_2\cdot\lambda$ $\lambda\in\Bbbk\setminus 0$

$\Swarrow$

$q_1=q_2\cdot\lambda$

Сопряжённость: Точки a и b наз. сопряжёнными отн. гладкой квадрики $Q=V(q)$, если a лежит на поляре $b \iff \tilde{q}(a,b)=0$, т.е. a и b перпендикулярны отн. $\tilde{q} \iff b$ лежит на поляре a

Сопряжённость — симметричное отношение

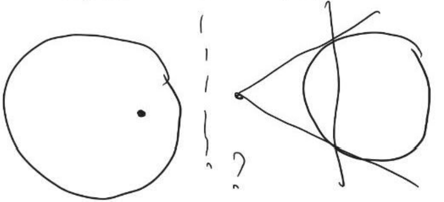


p сопряжена всем точкам $q(h)$

$\Updownarrow$

$\{q(h)\}$ = поляра точки p

Как устроено ГМТ пересечения пар касательных, восстановленных к окружности в концах всевозможных хорд, проходящих через данную точку p



$Q = V(q)$ – гладкая квадрика в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

$B = V(\beta)$ – любая квадрика в $\mathbb{P}_n$

$b \in B \longmapsto \Pi_b = \mathbb{P}(b_q^{\perp}) \leftarrow$ поляра точки b отн. квадрики Q.

↗ точки в $\mathbb{P}_n^{\times}$

$\mathbb{P}_n$
B
$\mathbb{P}_n^{\times}$

$\bar{q}(B)$ образ квадрики B при полярном преобразовании.

Через Q и B будем обозначать также и матрицы Грама форм q и β.

? Что это за фигура.

V(β) задаётся уравнением

$$\boxed{x^t B x = 0}, \text{ где } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

полярное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n^{\times}$ $\boxed{x \longmapsto \xi = x^t Q}$ отн. V(q)

$\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ в двойств. базисе в V^*

Q обратима $x = (\xi Q^{-1})^t = Q^{-1}\xi^t$ ($Q = Q^t$ – симметрич.)

подставляем в $x^t B x = 0$

$$(Q^{-1}\xi^t)^t B Q^{-1}\xi^t = \xi \underbrace{Q^{-1} B Q^{-1}}_{\text{симм. матрица}} \xi^t = 0$$

$\hat q(B)$ — это квадрика с матрицей Грама

$\cap$ $\qquad Q^{-1}BQ^{-1}$

$\mathbb{P}_n^\times \qquad$ в двойственном базисе пр-ва $\mathbb{P}_n^\times$

Полярное преобразование переводит квадрики в квадрики того же ранга (в частности гладкие — в гладкие).

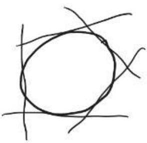
Важный частный случай

При $B = Q$ мы получаем в качестве $\hat q(Q) \subset \mathbb{P}_n^\times$ множество всех касательных гиперплоскостей к Q — это

$p \in Q = V(q)$

$\hat q(p) = \mathbb{P}(p^\perp) = T_pQ$

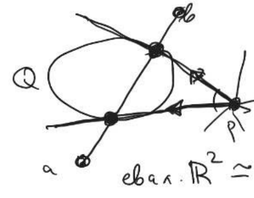
гладкая квадрика с матрицей Грама $Q^{-1}QQ^{-1} = Q^{-1}$ в двойственном базисе.



$\longrightarrow$ Мн-во всех касательных к гладкой конике C это гладкая коника $C^\times$ в $\mathbb{P}_2^\times$

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{квадратичное преобразование}} \begin{pmatrix} df - e^2 & ec - bf & \\ & \text{и т.д.} & \end{pmatrix}$$

$Q^\times = Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} Q^\vee \sim$ матрица 2×2 миноров



Найти угол между касательными.

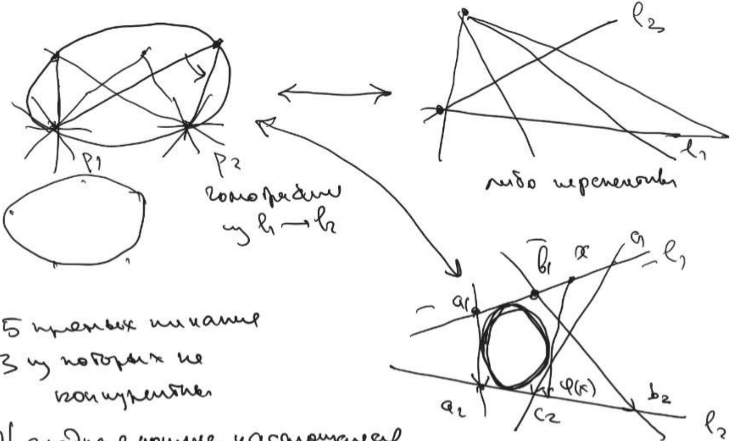
Задать $p^\perp$ явным уравнением

$\overset{\perp}{p} Q \leftarrow$ н-ти ур-м прямой

евкл. $\mathbb{R}^2 \simeq U_0 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Q^x $T^{(1)}$ $T^{(2)}$ – две касательные – это пересечение двойств. квадрики Q^x с прямой p^x

---



5 прямых никакие 3 из которых не конкурентны

∃! гладкая коника, касающаяся всех пяти прямых

Важный вывод: Всякая неперспективная гомография между прямыми l_1 и l_2 задаётся касательными к гладкой конике, которая однозначно задаётся этой гомографией