31 марта 2020. Двойные отношения.

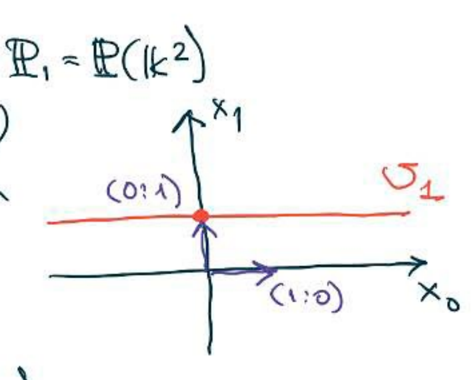
"Длительная самоизоляция в виртуальной реальности может кончиться реальным дурдомом..."

К.Прутков. Из ненаписанного.

Мы занимаемся проективной прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1)$

$U_1 = \{x_1 = 1\}$, $t = \frac{x_0}{x_1}$ – афф. координата

$t = 0 \to (0:1)$ $\quad t = \infty \to (1:0)$



Гомографии $\varphi: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$$

Группа гомографий $PGL_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc \neq 0 \right\} / \Bbbk^* E$

$t = \frac{x_0}{x_1}$ $\quad t \longmapsto \frac{at+b}{ct+d}$ $\quad$ Факт: Гомография однозначно задаётся действием на 3 точки

$\exists!$ гомография $\varphi_{p_1 p_2 p_3}: p_1, p_2, p_3 \to \infty, 0, 1$

$$t \longmapsto \frac{t - p_2}{t - p_1} \cdot \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2}$$

Двойное отношение: $\varphi_{p_1 p_2 p_3}(p_4) = [p_1, p_2, p_3, p_4]$

$$\frac{p_4 - p_2}{p_4 - p_1} \cdot \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} = \frac{\det(p_2, p_4)\det(p_1, p_3)}{\det(p_1, p_4)\det(p_2, p_3)}$$

$$\frac{x_0}{x_1} - \frac{y_0}{y_1} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_1 y_1} = \frac{\det(x, y)}{x_1 y_1} = \frac{\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}}{x_1 y_1}$$

Факт! $p_1 p_2 p_3 p_4$ переводятся в $q_1 q_2 q_3 q_4$ гомогр-ей тогда и только тогда, когда $[p_1 \dots p_4] = [q_1 \dots q_4]$

Док-во: $\varphi: p_1 p_2 p_3 p_4 \to \infty, 0, 1, [p_1 \dots p_4]$

$\psi: q_1 q_2 q_3 q_4 \to \infty, 0, 1, [q_1 \dots q_4]$

Если $[p_1 \dots p_4] = [q_1 \dots q_4] \Rightarrow \psi^{-1} \circ \varphi: p_i \to q_i \ \forall i$

Если $\exists \eta: p_1 \dots p_4 \to q_1 \dots q_4$

$\psi \circ \eta: p_1 \dots p_4 \to \infty, 0, 1, [q_1 \dots q_4]$ совпадает с φ на $p_1, p_2, p_3 \Rightarrow [p_1 \dots p_4] = [q_1 \dots q_4]$

Факт: $\varphi: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ биекция и сохраняет двойные отношения $\Rightarrow \varphi$ гомография

Проверим: $[\infty, 0, 1, a] = a$

Поучительное упр-е: проверить прямым вычислением $\frac{(1-\infty)(a-0)}{(a-\infty)(1-0)} = a$

$$\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$ Сходится?

$\varphi: a, b, c, t \to \infty, 0, 1, \varphi(t)$

Дробно линейная функция $\to$ $\frac{(c-a)(t-b)}{(t-a)(c-b)} = [\infty, 0, 1, \varphi(t)] = \varphi(t)$

Как двойное отношение $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ меняется при перестановках точек?

$$[p_1 \dots p_4] = \frac{\det(p_1 p_3)\det(p_2 p_4)}{\det(p_1 p_4)\det(p_2 p_3)}$$

Пара непересекающихся транспозиций не меняет Д.О.

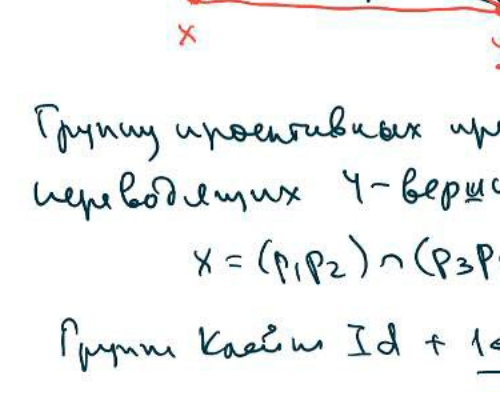
$\{(1\,2\,3\,4) \quad (2\,1\,4\,3) \quad (3\,4\,1\,2) \quad (4\,3\,2\,1)\}$

тождественное + все перестановки циклового типа $\boxplus$

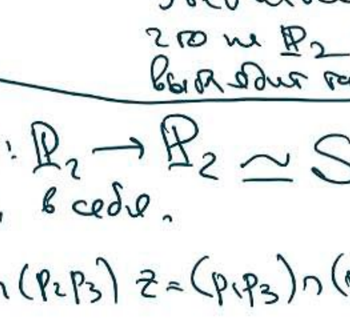
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ она же D_2 она же V_4 группа Клейна

$V_4 \lhd S_4$ $\quad$ • Есть эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ с ядром V_4

На $\mathbb{P}_2$: 4 диагонали = 4 точки $\quad S_4$ = собств. группа куба



Δxyz ассоциирован с 4-вершинником $p_1 p_2 p_3 p_4$



Убедиться что на $\mathbb{P}_2$ это выполняется

Группу проективных преобразований $\varphi: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2 \simeq S_4$ переводящих 4-вершинник $p_1 \dots p_4$ в себя.

$x = (p_1 p_2) \cap (p_3 p_4)$ $\quad y = (p_1 p_4) \cap (p_2 p_3)$ $\quad z = (p_1 p_3) \cap (p_2 p_4)$

Группа Клейна $Id + \underline{1 \leftrightarrow 2 \text{ и } 3 \leftrightarrow 4}$ $\quad \underline{1 \leftrightarrow 3 \text{ и } 2 \leftrightarrow 4}$ $\quad \underline{1 \leftrightarrow 4 \text{ и } 2 \leftrightarrow 3}$

$(2\,1\,3\,4)$: $x \mapsto x$ $\ y \leftrightarrow z$ $\quad \sigma_x: \begin{matrix} x \mapsto x \\ y \leftrightarrow z \end{matrix}$ $\quad S_4 \twoheadrightarrow S_3$

$(1\,3\,2\,4)$ $y \mapsto y$ $\ x \leftrightarrow z$ $\quad \sigma_y: \begin{matrix} y \mapsto y \\ x \leftrightarrow z \end{matrix}$ $\quad$ порождается отраж. σ_x, σ_y

• стабилизатор вершины 4 изоморфно отображается на S_3

$[p_1 p_2 p_3 p_4] = t$ $\quad p_1 p_2 p_3 \longmapsto \infty\, 0\, 1$

$[p_2 p_1 p_3 p_4] = \frac{1}{t}$ $\quad p_1 p_2 p_3 \longmapsto 0\, \infty\, 1$ $\quad t \to \frac{1}{t}$

образ p_4 при преобразовании $p_2 p_1 p_3 \to \infty\, 0\, 1$

$[p_1 p_3 p_2 p_4] = 1 - t$ $\quad p_1 p_2 p_3 \longmapsto \infty\, 1\, 0$ $\quad t \mapsto 1 - t$

$[p_3 p_2 p_1 p_4] = \frac{t}{t-1}$ $\quad p_1 p_2 p_3 \longmapsto 1\, 0\, \infty$ $\quad \frac{t}{t-1}$

$[p_2 p_3 p_1 p_4] = \frac{t-1}{t}$ $\quad p_1 p_2 p_3 \longmapsto 1\, \infty\, 0$ $\quad \frac{t-1}{t}$

$[p_3 p_1 p_2 p_4] = \frac{1}{1-t}$ $\quad p_1 p_2 p_3 \to 0\, 1\, \infty$ $\quad \frac{1}{1-t}$

Для общего значения t имеется 6 разных значений. Их можно получить, переставляя первые 3 точки.

Специальные конфигурации точек $\quad [p_1, p_2, p_3, p_4] \neq \infty, 0, 1$

$t = \frac{1}{t}$ $\quad t = -1$ $\qquad t = 1 - t$ $\quad t = \frac{1}{2}$ $\qquad t = \frac{t}{t-1}$ $\quad t = 2$

Орбита длины 3

$t = \frac{t-1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{1-t} \Leftrightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$\frac{t^3+1}{t+1}$ $\quad t$ – это $\sqrt[3]{-1}$ отличный от -1.

$[p_1 p_2 p_3 p_4] = -1$

в аффинной карте, где $p_1 = \infty$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$

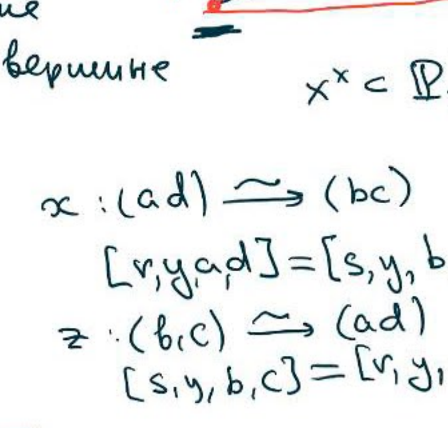
точка p_2 – центр "отрезка" $p_3 p_4$ = равновесный барицентр точек p_3 и p_4

$p_1 p_2 p_3 p_4$ наз гармоническими, если $[p_1 \dots p_4] = -1$

$\Updownarrow$

$[p_1 p_2 p_3 p_4] = [p_2, p_1, p_3, p_4]$

Пример: в любом 4-верш-ке $\forall$ вершины x, y, z ассоц. Δ-ка стороны треугольника гармоничны сторонам 4-вершинника в пучке прямых с центром в вершине треугольника.



$x^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$

$x^\times \simeq (ad) \simeq (bc)$ $\qquad x: (ad) \xrightarrow{\sim} (bc)$

$\boxed{[r y a d] = -1}$ $\qquad [r, y, a, d] = [s, y, b, c]$

$z: (b, c) \xrightarrow{\sim} (ad)$

$[s, y, b, c] = [r, y, d, a]$

$(13)(24)$ $[r y a d] = [r, y, d, a]$ $(13)(24)$ $\Rightarrow \underline{[r y a d] = -1}$

$[a d\, r y]$ $\quad [d\, a\, r y]$

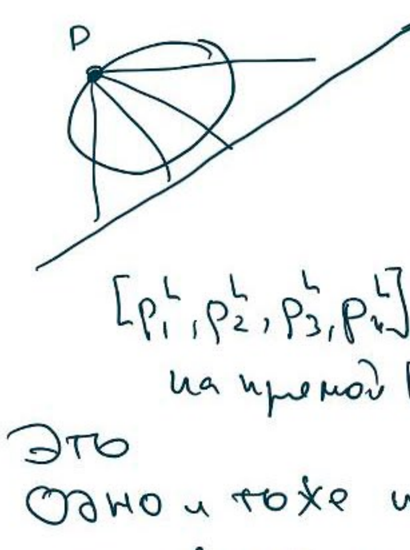
Гармоничность – это симметричное бинарное отношение на множестве неупорядоченных пар точек.

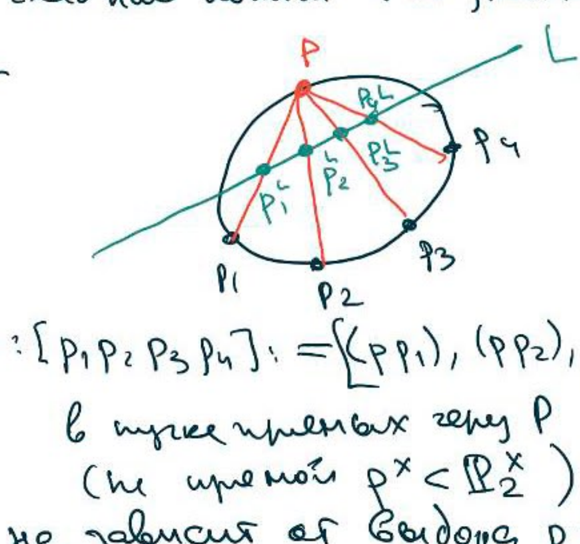
$[a b c d] = -1 \Rightarrow [b a c d] = -1$, $[a b d c] = -1$

$[\{a b\}, \{c d\}]$

Двойное отношение точек на конике

коника = гладкая непустая коника (по умолчанию)



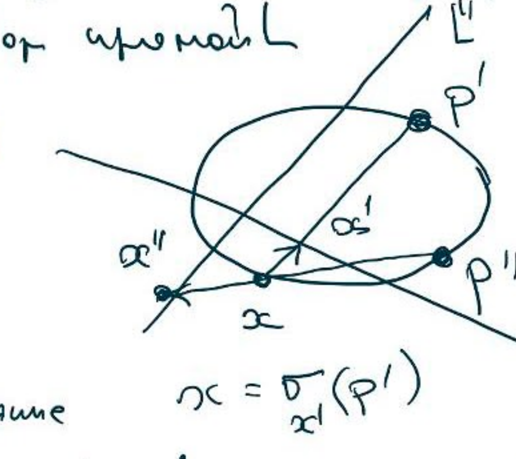


$[p_1^L, p_2^L, p_3^L, p_4^L] =: [p_1 p_2 p_3 p_4] := [(pp_1), (pp_2), (pp_3), (pp_4)]$

на прямой L $\quad$ в пучке прямых через p (на прямой $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$)

Это одно и тоже и не зависит от выбора $p \in C \setminus \{p_1 \dots p_4\}$, не зависит от выбора прямой L

$(p'': C \to L'') \circ (p': L' \xrightarrow{\sim} C)$ это гомография $L' \xrightarrow{\sim} L''$



$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ $\uparrow$ алг. замыкание $\qquad x = \sigma_{x'}(p')$

двойные отношения соответственных точек на L' и на L'' одинаковы

Гладкие непустые коники = коники Веронезе

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U) \xrightarrow[\sim]{\exists \varphi} \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$$

$\cup \qquad\qquad\qquad \cup$

$C_2 = \{a^2 \mid a \in \mathbb{P}_1\}$ $\quad C$

$\forall$ гладкой $\neq \varnothing$ коники $C \subset \mathbb{P}_2$ $\exists \varphi: \mathbb{P}_2(S^2 U) \to \mathbb{P}_2$, $\varphi|_{C_2}: C_2 \xrightarrow{\sim} C$

$U \simeq \Bbbk^2$

$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$ – это неупорядоченные пары точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$

$[\varphi(p_1^2)\ \varphi(p_2^2)\ \varphi(p_3^2)\ \varphi(p_4^2)] \mathrel{!=} [p_1, p_2, p_3, p_4]$

на конике C в $\mathbb{P}_2$ $\qquad$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$

$\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_2$

$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{1:1} C_2 \xrightarrow[\varphi]{1:1} C \xrightarrow[p]{1:1} L$ $\qquad$ композиция – это гомография

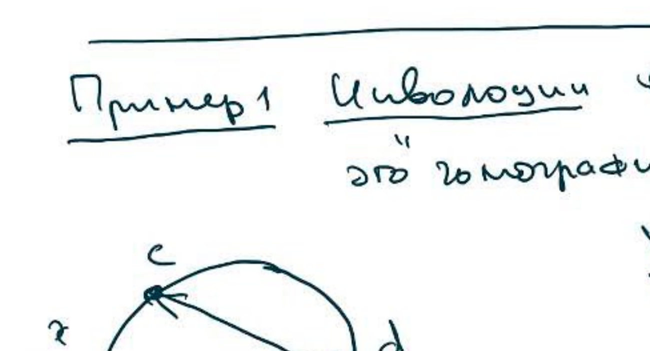
$a \longmapsto a^2$ $\qquad$ проекция $p: C \xrightarrow{\sim} L$

Гомография на конике $\overset{\text{def}}{=}$ это биекция, сохраняющая двойное отношение.

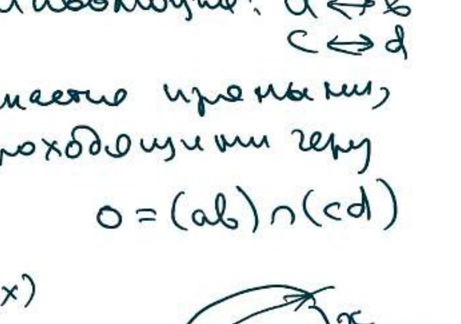
Пример 1 Инволюции $\varphi: C \to C$ это гомография с $\varphi^2 = Id$ $\qquad \varphi = Id$ тривиальная

$\varphi: C \to C$

Утв: Инволюция: $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$ высекается прямыми, проходящими через $o = (ab) \cap (cd)$

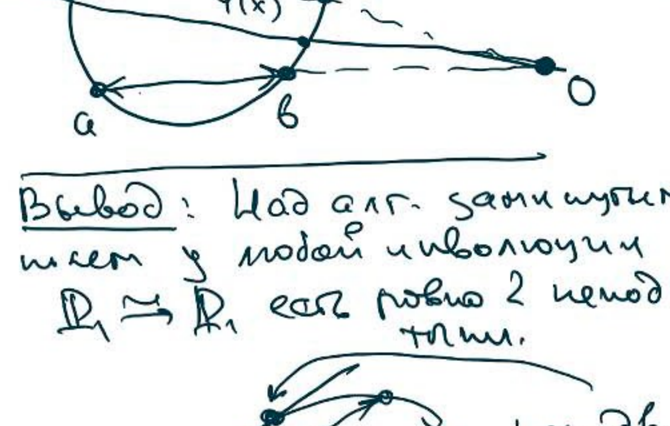


(ox)



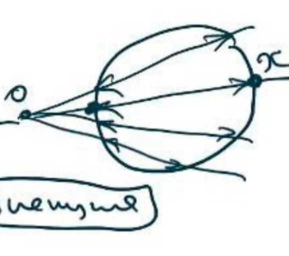
биекция

Вывод: Над алг. замкнутым полем у любой инволюции $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ есть ровно 2 неподв. точки.



неподв. точки

над $\mathbb{R}$



Над замкнутым полем $\forall$ двух инволюций $\exists!$ пара точек которые переставляются друг с другом обеими инв-ями