

### Линейные операторы

**Терминология.** С каждым линейным оператором  $F : V \rightarrow V$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  связаны *характеристический многочлен*  $\chi_F(t) = \det(t \cdot \text{Id}_V - F) \in \mathbb{k}[t]$  и аннулирующий  $F$  многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, который обозначается  $\mu_F(t) \in \mathbb{k}[t]$  и называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ . Корни характеристического многочлена называются *собственными числами*<sup>1</sup> оператора  $F$ . Множество собственных чисел оператора  $F$  называется его *спектром* и обозначается  $\text{Spec } F$ . Подпространство  $V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \ker(\lambda \text{Id}_V - F) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$  называется *собственным подпространством* оператора  $F$ , а векторы  $v \in V_\lambda$  — *собственными векторами* с собственным значением  $\lambda \in \text{Spec } F$ . Подпространство  $K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id}_V - F)^m$  называется *корневым подпространством*, отвечающим собственному числу  $\lambda$ . Подпространство  $U \subset V$  называется *инвариантным* для  $F$ , если  $F(U) \subset U$ . Оператор  $F$  называется *диагонализуемым*, если в  $V$  имеется базис из собственных векторов оператора  $F$ .

**ГС9♦1.** Найдите собственные числа, собственные подпространства<sup>2</sup> и выясните, диагонализуем ли линейный оператор  $F : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ , имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -18 & -9 & 1 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} -2 & 16 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{в)} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & -5 \\ 2 & 20 & -12 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -14 & -5 & -10 \\ 14 & 8 & 13 \end{pmatrix} \\ \text{д)} \begin{pmatrix} 12 & -21 & -8 & 0 \\ 10 & -19 & -8 & 0 \\ -12 & 24 & 11 & 0 \\ -10 & 30 & 20 & -1 \end{pmatrix} & \text{е)} \begin{pmatrix} -8 & -12 & -1 & 1 \\ 7 & 11 & 1 & -1 \\ -14 & -24 & -3 & 2 \\ -3 & -9 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \text{ж)} \begin{pmatrix} 13 & -8 & -2 & 2 \\ 33 & -20 & -5 & 4 \\ -18 & 10 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 13 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

**ГС9♦2.** Найдите размерности корневых подпространств и минимальный многочлен линейного оператора  $F : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ , имеющего в стандартном базисе матрицу

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{pmatrix} -9 & -5 & -11 & 6 \\ 27 & 14 & 27 & -14 \\ -25 & -12 & -22 & 11 \\ -37 & -18 & -35 & 18 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} -11 & -5 & 0 & -2 \\ 40 & 17 & 2 & 4 \\ -24 & -8 & -5 & 4 \\ -28 & -10 & -5 & 3 \end{pmatrix} & \text{в)} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 1 \\ -21 & -10 & -12 & -3 \\ -17 & -5 & 3 & 1 \\ -29 & -11 & -8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

**ГС9♦3.** В пространстве  $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$  многочленов степени не выше  $n$  с вещественными коэффициентами найдите собственные числа и собственные подпространства линейных операторов

$$\text{а)} f(x) \mapsto f(ax+b), \text{ где } a, b \in \mathbb{R} \text{ — заданные числа } \text{б)} f(x) \mapsto xf'(x) \text{ в)} f(x) \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

**ГС9♦4.** Найдите характеристический многочлен оператора умножения на класс  $[x]_f$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[x]/(f)$ , где  $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$  — заданный многочлен.

**ГС9♦5.** Опишите все инвариантные подпространства и минимальный многочлен диагонализуемого оператора.

**ГС9♦6.** Найдите степень минимального многочлена оператора ранга 1.

**ГС9♦7.** Пусть оператор  $F$  аннулируется многочленом  $f(t) \in \mathbb{k}[t]$ . Покажите, что а) все собственные числа  $F$  являются корнями  $f$  б)  $f$  делится в  $\mathbb{k}[t]$  на  $\mu_F$ .

**ГС9♦8.** Пусть подпространство  $U \subset V$  инвариантно относительно оператора  $F : V \rightarrow V$ . Докажите, что а) характеристический многочлен ограничения  $F|_U : U \rightarrow U$  делит характеристический многочлен оператора  $F$  б) если  $F$  диагонализуем, то и  $F|_U$  диагонализуем.

**ГС9♦9.** Существует ли оператор  $F$  с характеристическим и минимальным многочленами

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \chi(t) = (t^6 - 1), \mu(t) = (t^3 - 1) & \text{б)} \chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3, \mu(t) = (t - 1)(t - 2) \\ \text{в)} \chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5, \mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3? & \text{Если да, то приведите пример.} \end{array}$$

<sup>1</sup>Или *собственными значениями*.

<sup>2</sup>Т. е. укажите в каждом собственном подпространстве некоторый базис.