# Квадрики в $\mathbb{R}^n$

**ГЛ14◇1.** Верно ли, что любые две гладкие центральные аффинные квадрики, имеющие одну и ту же асимптотическую квадрику, обладают общим аффинным гиперплоским сечением?

**ГЛ14◇2.** Эллипсоид $E \subset \mathbb{R}^3$ с полуосями попарно разной длины секут плоскостями, проходящими через его центр $z$ и не лежащую на главных осях точку $a \in E$. Для скольких сечений отрезок $[z, a]$ является главной полуосью?

**ГЛ14◇3.** Зависит ли длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, описанного около данного эллипсоида[1] в $\mathbb{R}^n$, от расположения параллелепипеда **а)** при $n = 2, 3$ **б*)** при любом $n$?

**ГЛ14◇4 (теорема Аполлония).** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задан эллипсоид $E$ с центром $z$. Направления $v_1, \dots, v_n \in L_\infty$ называются *сопряжёнными*, если симплекс $z, v_1, \dots, v_n$ автополярен относительно $E$. Точки $a_1, \dots, a_n \in E$ называются *сопряжёнными*, если сопряжены направления $\overrightarrow{za}_1, \dots, \overrightarrow{za}_n$. Верно ли, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ у всех наборов сопряжённых точек $a_1, \dots, a_n \in E$ сумма определителей Грама $\sum_{i_1<\dots<i_k} G(\overrightarrow{za}_{i_1}, \dots, \overrightarrow{za}_{i_k})$ одна и та же **а)** при[2] $n = 2$ **б*)** при любом $n$?

**ГЛ14◇5.** Рассмотрим тройки прямых, проходящих через фиксированную точку $x$ внутри эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^3$. Пусть они пересекают $E$ по парам точек $a_1$, $b_1$; $a_2$, $b_2$; $a_3$, $b_3$. Покажите, что **а)** $|a_1x| \cdot |xb_1| + |a_2x| \cdot |xb_2| + |a_3x| \cdot |xb_3| = \mathrm{const}$ если направления прямых сопряжены **б)** $|a_1x|^{-1} \cdot |xb_1|^{-1} + |a_2x|^{-1} \cdot |xb_2|^{-1} + |a_3x|^{-1} \cdot |xb_3|^{-1} = \mathrm{const}$ если прямые попарно перпендикулярны.

**ГЛ14◇6.** Для произвольных $k$ точек $p_1, \dots, p_k$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ образуем симметричную $k \times k$ матрицу $D_{p_1,\dots,p_k} \stackrel{\text{def}}{=} \left(|p_ip_j|^2\right)$ квадратов расстояний между ними и обозначим через $C_{p_1,\dots,p_k}$ матрицу размера $(k+1)\times(k+1)$, получающуюся приписыванием к $D_{p_1,\dots,p_k}$ строки единиц сверху, столбца единиц слева и нуля в левый верхний угол. Покажите, что **а)** $\det C_{p_0,p_1,\dots,p_n}$ равен умноженному на $(-1)^{n+1}2^n$ определителю Грама векторов[3] $\overrightarrow{p_0p}_1, \overrightarrow{p_0p}_2, \cdots, \overrightarrow{p_0p}_n$ **б)** $(n+1)$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ лежат в одной гиперплоскости если и только если $\det C_{p_0,p_1,\dots,p_n} = 0$ **в)** $(n+2)$ точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ лежат на одной сфере или в одной гиперплоскости если и только если $\det D_{p_0,p_1,\dots,p_{n+1}} = 0$ **г)** квадрат диаметра шара, описанного около симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, равен $-2\det D_{p_0,p_1,\dots,p_n} / \det C_{p_0,p_1,\dots,p_n}$.

**ГЛ14◇7*.** Дана симметричная матрица $D = \left(d_{ij}^2\right)$ размера $(n+1)\times(n+1)$, в которой все $d_{ii} = 0$ и $d_{ij} = d_{ji} > 0$ при $i \neq j$. Покажите, что $n$-мерный симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ с длинами сторон $|p_ip_j| = d_{ij}$ существует если и только если для каждого $r = 2, 3, \dots, (n+1)$ и каждой главной $r \times r$-подматрицы[4] $D' \subset D$ определитель $(r+1)\times(r+1)$-матрицы $C'$, которая получается из $D'$ дописыванием строки единиц сверху, столбца единиц слева и нуля в левом верхнем углу, либо нулевой, либо имеет знак $(-1)^r$.

[1] Это означает, что каждая грань параллелепипеда касается эллипсоида.

[2] В этом случае теорема Аполлония утверждает, что сумма квадратов длин $|za_1|^2 + |za_2|^2$ и площадь треугольника $\triangle\, za_1a_2$ обе не зависят от выбора пары сопряжённых точек $a_1$, $a_2$ на эллипсе.

[3] Обратите внимание, что тут сравниваются определители матриц *разного* размера.

[4] Т. е. подматрицы, главная диагональ которой содержится в главной диагонали матрицы $D$.

Персональный табель ________________________________________. **Листок № 14 (23 апреля 2019)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3а | | | |
| б | | | |
| 4а | | | |
| б | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| 7 | | | |