Выпуклые фигуры

ГЛ9◇1. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством **а)** вершин **б)** крайних точек.

ГЛ9◇2. На прямоугольном столе лежит несколько салфеток прямоугольной формы со сторонами, параллельными краям стола. Докажите, что **а)** если любые две салфетки пересекаются, то и все салфетки пересекаются **б*)** если каждая салфетка пересекается как минимум с 3/4 остальных, то есть салфетка, пересекающаяся со всеми. **в*)** Обобщите эти факты на старшие размерности.

ГЛ9◇3 (лемма Радона). Докажите, что любой конечный набор из не менее $n + 2$ различных точек в $\mathbb{R}^n$ всегда разбивается на два непересекающихся поднабора с пересекающимися выпуклыми оболочками.

ГЛ9◇4* (лемма Каратеодори). Докажите, что каждая точка из выпуклой оболочки любого множества точек в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой комбинацией не более $n + 1$ этих точек.

ГЛ9◇5*. Докажите, что любое конечное покрытие аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ аффинными полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $n + 1$ полупространств.

ГЛ9◇6* (теорема Хелли). Имеется множество замкнутых выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$, в котором есть компактная фигура и любые $n+1$ фигур имеют непустое пересечение. Докажите, что пересечение всех этих фигур непусто.

ГЛ9◇7*. Докажите, что любое пятно на скатерти, расстояние между каждыми двумя точками которого не превышает 1, накрывается блюдцем радиуса $1/\sqrt{3}$.

ГЛ9◇8 (двойственные конусы). *Двойственным* к выпуклому многогранному конусу $\sigma \subset V$ называется конус $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma\ \xi(v) \geqslant 0\}$, лежащий в двойственном к V пространстве V^*. Покажите, что $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$, т. е. $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geqslant 0\ \ \forall \xi \in \sigma^\vee\}$.

ГЛ9◇9. Верно ли что σ и $\sigma^\vee$ имеют одинаковое число одномерных граней?

ГЛ9◇10. Покажите, что минимальная по включению грань выпуклого многогранного конуса σ является векторным подпространством и равна $\sigma \cap (-\sigma)$, где $-\sigma \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid -v \in \sigma\}$.

ГЛ9◇11. Докажите, что следующие условия на выпуклый многогранный конус $\sigma \subset V$ эквивалентны: **а)** σ не содержит ненулевых векторных подпространств **б)** $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ **в)** $\sigma^\vee$ линейно порождает V^* **г)** $\exists\ \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \operatorname{Ann}(\xi) = \{0\}$.

ГЛ9◇12. Покажите, что выпуклый многогранный конус η является гранью выпуклого многогранного конуса σ если и только если $\eta \subset \sigma$ и $\forall\ v_1, v_2 \in \sigma\ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$.

ГЛ9◇13. Сопоставим k-мерной грани τ выпуклого многогранного конуса[1] $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ множество $\operatorname{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset V^*$. Покажите, что при всех $k \leqslant \dim \sigma$ таким образом получается корректно определённая и обращающая включения биекция между k-мерными гранями конуса σ и $(n-k)$-мерными гранями двойственного конуса $\sigma^\vee$.

ГЛ9◇14* (двойственность Гейла). Обозначим $\sigma_+ \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma_+^\vee \subset \mathbb{R}^{n*}$ положительные гиперокктанты двойственных координатных пространств. Покажите, что **а)** любые векторное подпространство $U \subset \mathbb{R}^n$, класс $w \in \mathbb{R}^n/U$ и ковектор $\xi \in U^*$ корректно задают: (1) векторное подпространство $\operatorname{Ann} U \subset \mathbb{R}^{n*}$, класс $\xi \in \mathbb{R}^{n*}/\operatorname{Ann} U$ и линейный функционал $w \in (\operatorname{Ann} U)^*$ (2) аффинные пространства $U_w \overset{\text{def}}{=} w + U \subset \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, $U_\xi^\vee \overset{\text{def}}{=} \xi + \operatorname{Ann} U \subset \mathbb{A}(\mathbb{R}^{n*})$ и выпуклые многогранники $M_w = U_w \cap \sigma_+$, $M_\xi^\vee = U_\xi^\vee \cap \sigma_+^\vee$ в них (3) предпорядки $p \leqslant_\xi q \iff \xi(\overrightarrow{pq}) \geqslant 0$ на U_w и $\eta \leqslant_w \zeta \iff \eta(w) \leqslant \zeta(w)$ на $U_\xi^\vee$ **б)** $M_w \neq \varnothing$ если и только если для всех таких $\xi \in U^*$, что $M_\xi^\vee \neq \varnothing$, у $M_\xi^\vee$ имеются $\leqslant_w$-минимальные точки **в)** если $M_w \neq \varnothing$ и $M_\xi^\vee \neq \varnothing$, то $\leqslant_\xi$-минимальные точки в M_w и $\leqslant_w$-минимальные точки в $M_\xi^\vee$ образуют такие грани $\Gamma_\xi \subset M_w$ и $\Gamma_w \subset M_\xi^\vee$, что при каждом $i = 1, \dots, n$ i-й координатный функционал в $\mathbb{R}^n$ зануляется на Γ_ξ или i-й координатный функционал в $\mathbb{R}^{n*}$ зануляется на Γ_w.

[1] Случай $\dim \sigma < n$ тоже допускается.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 9 (03.02.2020)

№	**дата**	**кто принял**	**подпись**
1а			
б			
2а			
б			
в			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14а			
б			
в			