

Линейные операторы на конечномерном пространстве

- ГЛ6♦1.** Найдите собственные числа, собственные подпространства и минимальный многочлен оператора $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ на пространстве $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов степени не выше n .
- ГЛ6♦2.** Линейный оператор $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет матрицу с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Когда он диагонализуем?
- ГЛ6♦3.** Пусть $m \geq n$. Верно ли, что для любой пары линейных отображений $F: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ и $G: \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^n$ отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t) = t^{m-n}$?
- ГЛ6♦4.** Пусть минимальный многочлен оператора $F: V \rightarrow V$ является произведением попарно взаимно простых многочленов g_i . Покажите, что $V = \bigoplus U_i$, где $F(U_i) \subset U_i$ и минимальный многочлен ограничения $F|_{U_i}$ равен g_i при всех i .
- ГЛ6♦5.** Вектор $v \in V$ называется *циклическим* для оператора $F: V \rightarrow V$, если векторы вида $F^k(v)$, где $k \geq 0$, линейно порождают V .
- Приведите пример линейного оператора без циклических векторов.
 - Пусть характеристический многочлен χ_F неприводим. Докажите, что $\deg \chi_F = \dim V$ и каждый ненулевой вектор $v \in V$ является циклическим для F .
- ГЛ6♦6*.** Пусть оператор $F: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ имеет $\text{tr } F^k = 0$ при всех $1 \leq k \leq n$. Верно ли, что F нильпотентен?
- ГЛ6♦7*.** Всякая ли квадратная матрица сопряжена¹ своей транспонированной?
- ГЛ6♦8*.** Пусть минимальный многочлен оператора $F: V \rightarrow V$ имеет степень $\dim V$. Покажите, что всякий перестановочный с F линейный оператор является многочленом от F .
- ГЛ6♦9*.** Пусть поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, и оператор $G: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ перестановочен со всеми операторами, которые перестановочны с оператором $F: \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$. Обязательно ли G является многочленом от F ?
- ГЛ6♦10.** Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.
- ГЛ6♦11.** Имеются ли в пространстве $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ линейные подпространства размерности $(n+1)$, состоящие из попарно коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов?

¹Матрицы $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ называются *сопряжёнными* если $A = CBC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$.

Персональный табель _____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (19.11.2019)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			
9			
10			
11			