

Грассмановы многочлены и определители

ГЛ5♦1. Две строки матрицы 3×3 -матрицы заполнены целыми числами так, что нод чисел в каждой из них равен единице и строки не пропорциональны над \mathbb{Q} . Всегда ли возможно заполнить целыми числами третью строку так, чтобы определитель оказался единичным?

ГЛ5♦2*. Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы 3×3 . Первый выигрывает, если в результате получится вырожденная матрица. Кто победит?

ГЛ5♦3. Сколько матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

ГЛ5♦4. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всевозможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n \times n$. Найдите сумму определителей всех этих матриц.

ГЛ5♦5 (теорема об окаймляющих минорах). Докажите, что матрица A с такой невырожденной $m \times m$ подматрицей, что все содержащие её $(m + 1) \times (m + 1)$ подматрицы вырождены, имеет $\text{rk } A = m$.

ГЛ5♦6*. Вычислите $\det \left(x^{j-i-1 \pmod n} \right)$, где $1 \leq j, j \leq n$.

ГЛ5♦7. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$.

ГЛ5♦8 (матричная теорема о деревьях). Вершины связного графа Γ без кратных рёбер¹ и петель² занумерованы числами от 1 до n . Матрица $A = (a_{ij})$ имеет диагональные элементы a_{ii} , равные взятому со знаком минус количеству рёбер, сходящихся в i -той вершине, а остальные элементы a_{ij} равны единице, если вершины i и j соединены ребром, и нулю — если не соединены. Докажите, что:

а) $\det A = 0$

б*) все алгебраические дополнения A_{ii} к элементам главной диагонали отличны от нуля и равны между собой

в*) Γ дерево если и только если все $A_{ii} = 1$.

ГЛ5♦9. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.

ГЛ5♦10*. Докажите, что для любых двух матриц $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ в $\mathbb{k}[x, y]$ выполнено равенство

$$\det(xA + yB) = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \text{tr} (A_k B_k^\vee),$$

где A_k и B_k^\vee суть матрицы размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$,

клетки которых нумеруются k -элементными подмножествами $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ и которые имеют в позиции IJ , соответственно, минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|} b_{\hat{I}\hat{J}}$ к IJ -тому минору матрицы B .

ГЛ5♦11. Для данной матрицы $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ обозначим через $L_A, R_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ линейные операторы, переводящие матрицу $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, соответственно, в матрицы

а) $L_A(X) = A \cdot X$ б) $R_A(X) = X \cdot A$ в*) $\text{Ad}_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}$.

Вычислите следы и определители этих операторов.

ГЛ5♦12*. Для заданной матрицы $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ обозначим через $S^2 A$ линейный оператор на пространстве однородных многочленов второй степени от n переменных, переводящий многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ в многочлен $f(y_1, \dots, y_n)$, где $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A$. Найдите его след и определитель.

¹Т. е. любые две вершины графа соединяются не более, чем одним ребром.

²Т. е. рёбер, ведущих из вершины в неё саму.

Персональный табель _____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (5.11.2019)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9а			
б			
10			
11а			
б			
в			
12			