Линейные отображения и матрицы

ГЛ4◇1. На клетчатой бумаге нарисован по линиям сетки прямоугольник и во все внешние клетки, имеющие общую точку с его контуром, записаны числа. Всегда ли возможно написать в каждую клетку прямоугольника по числу так, чтобы любое из них равнялось среднему арифметическому чисел из четырёх клеток, имеющих общую сторону с рассматриваемой? Если да, то много ли способов это сделать?

ГЛ4◇2. Вершины куба надписаны числами $b_1, b_2, \dots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё шесть чисел на грани так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Найдите все наборы $b_1, b_2, \dots, b_8$, для которых задача имеет решение, и для каждого из них найдите все решения задачи.

ГЛ4◇3 (проекторы). Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ имеет $F^2 = F$. Покажите, что $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$ и F проектирует V на $\operatorname{im} F$ вдоль $\ker F$.

ГЛ4◇4 (инволюции). Пусть нетождественный линейный оператор $F : V \to V$ имеет $F^2 = E$. Покажите, что $V = V_+ \oplus V_-$, где $V_\pm = \{v \in V \mid F(v) = \pm v\}$.

ГЛ4◇5. Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

ГЛ4◇6. Обозначим через $U_1, U_2 \subset \Bbbk^n$ и $W_1, W_2 \subset \Bbbk^m$ линейные оболочки строк и столбцов матриц $A_1, A_2 \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$. Какие импликации имеются между условиями
а) $\operatorname{rk}(A_1 + A_2) = \operatorname{rk}(A_1) + \operatorname{rk}(A_2)$ **б)** $U_1 \cap U_2 = 0$ **в)** $W_1 \cap W_2 = 0$?

ГЛ4◇7 (неравенство Фробениуса). Для любых трёх линейных операторов $A, B, C : V \to V$ докажите соотношения
а) $\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im}(BA) + \dim(\operatorname{im} A \cap \ker B)$
б) $\dim \operatorname{im}(BA) + \dim \operatorname{im}(AC) \leqslant \dim \operatorname{im} A + \dim \operatorname{im}(BAC)$

ГЛ4◇8 (нильпотентные матрицы). Ненулевая матрица $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что сумма нильпотентных матриц A и B нильпотентна **а)** всегда **б)** если $[A, B] = 0$ **в*)** если $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$?

ГЛ4◇9. Покажите, что каждая матрица $A \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ удовлетворяет квадратному уравнению вида $A^2 + \alpha A + \beta E = 0$ с подходящими $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, и решите в $\operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ уравнения
а) $X^2 = 0$ **б)** $X^3 = 0$ **в)** $X^2 = -E$.

ГЛ4◇10. Верно ли, что каждая квадратная матрица, перестановочная с заданной диагональной матрицей A, все диагональные элементы которой попарно различны, имеет вид $f(A)$ для некоторого многочлена $f(x) \in \Bbbk[x]$?

ГЛ4◇11*. Пусть $n \times n$-матрицы A, B, C, D обратимы. Явно вычислите $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$ в предположении, что матрицы $A - BD^{-1}C$, $C - DB^{-1}A$, $B - AC^{-1}D$, $D - CA^{-1}B$ тоже обратимы.

ГЛ4◇12*. Найдите все такие матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, что для всех $X \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ с $\operatorname{tr} X = 0$ выполняется равенство $\operatorname{tr}(AX) = 0$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (15.10.2019)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8а			
б			
в			
9а			
б			
в			
10			
11			
12			