§22. Аффинные квадрики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ бесконечно и характеристика $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

22.1. Проективное оснащение аффинного пространства. Рассмотрим векторное пространство $V = \Bbbk^n$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и вложим ассоциированное с ним аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = U_{x_0} = e_0 + V$ в проективизацию $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ векторного пространства $W = \Bbbk \cdot e_0 \oplus V$ с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Бесконечно удалённую гиперплоскость этой карты обозначим через $L_\infty = \operatorname{Ann}(x_0) = \mathbb{P}(V)$. Точки $u \in L_\infty$ представляют собою направления в U_0 в том смысле, что каждая проективная прямая $(pu) \subset \mathbb{P}_n$, где $p \in U_0$, $u \in L_\infty$, пересекает аффинную карту U_0 по аффинной прямой с параметрическим уравнением $p + ut$, где t пробегает $\Bbbk$.

22.1.1. Вложение аффинной группы в проективную. Напомню[1], что *аффинная группа*

$$\operatorname{Aff}(U_0) \simeq V \rtimes \operatorname{GL}(V)$$

состоит из биективных аффинных отображений[2] $\mathbb{A}(U_0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}(U_0)$ и является полупрямым произведением[3] нормальной *подгруппы сдвигов*[4] $V \subset \operatorname{Aff}(U_0)$ и полной линейной группы $\operatorname{GL}(V)$, вложенной в $\operatorname{Aff}(U_0)$ как стабилизатор начальной точки $e_0 \in \mathbb{A}(U_0)$. Будем называть две фигуры в $\mathbb{A}(U_0)$ *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинное преобразование, переводящее одну их них в другую.

Предложение 22.1

Аффинная группа $\operatorname{Aff}(U_0)$ канонически изоморфна подгруппе проективной группы $\operatorname{PGL}(W)$, образованной всеми проективными преобразованиями $\mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, переводящими в себя бесконечно удалённую гиперплоскость L_∞ аффинной карты U_0.

Доказательство. Пусть аффинное отображение $\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_0$ переводит точку $e_0 + v$ в точку $\varphi(e_0) + D_\varphi(v)$, и его дифференциал $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ является линейным изоморфизмом. Тогда линейное отображение $f : W \to W$, $x_0 e_0 + v \mapsto x_0\varphi(e_0) + D_\varphi(v)$, переводит в себя гиперплоскость $V = \operatorname{Ann}(x_0) \subset W$. Если $x_0 e_0 + v \in \ker f$, то $x_0\varphi(e_0) = -D_\varphi(v) \in V = \operatorname{Ann}(x_0)$, откуда $x_0 = 0$ и $v \in \ker D_\varphi = 0$. Тем самым, $f \in \operatorname{GL}(W)$. Проективизация $\overline{f} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$ переводит в себя бесконечно удалённую гиперплоскость $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ и аффинную карту U_0, причём $f|_{U_0} = \varphi$.

Наоборот, если задаваемое линейным автоморфизмом $f : W \xrightarrow{\sim} W$ проективное преобразование $\overline{f} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$ переводит в себя гиперплоскость $L_\infty = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$, то $f(V) \subset V$, и так как $\operatorname{im} f \not\subset V$, вектор $f(e_0) = \lambda e_0 + u$, где $u \in V$ и $\lambda \neq 0$. Линейный изоморфизм $g = \lambda^{-1} f : W \xrightarrow{\sim} W$ переводит каждый вектор $e_0 + v \in U_0$ в вектор $e_0 + \lambda^{-1}u + \lambda^{-1}f(v) \in U_0$. Таким образом, проективное преобразование $\overline{f} = \overline{g}$ отображает аффинную карту U_0 в себя и действует на ней как аффинное преобразование с дифференциалом $\lambda^{-1}f|_V$, переводящее точку e_0 в точку $e_0 + \lambda^{-1}u$. □

[1] См. n° 2.2 на стр. 28.

[2] См. n° 2.1 на стр. 24.

[3] См. n° 2.3 на стр. 30.

[4] Т. е. преобразований $\tau_v : \mathbb{A}(U_0) \to \mathbb{A}(U_0)$, $p \mapsto p + v$, с тождественным дифференциалом $D_{\tau_v} = \operatorname{Id}_V$.

22.1.2. Проективное замыкание аффинной квадрики. Аффинной квадрикой в $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ называют фигуру $Q = \{v \in \mathbb{A}^n \mid f(v) = 0\}$, заданную неоднородным уравнением степени два

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) = 0\,, \quad \text{где}$$
$$f_0 = \beta_{00} \in \Bbbk,\; f_1(x_1, \dots, x_n) = 2\sum_{j=1}^{n} \beta_{0j} x_j \in V^*\,,\; f_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j \in S^2 V^*\,. \tag{22-1}$$

Проективное замыкание[1] $\overline{Q} = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ аффинной квадрики $Q \subset U_0$ является множеством нулей однородной квадратичной формы $q(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 f_0 + x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n)$ с матрицей Грама $B = \left(\beta_{ij}\right)$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, которую иногда называют *расширенной* матрицей Грама аффинной квадрики Q. При $x_0 = 1$ уравнение $q(x) = 0$ превращается в уравнение (22-1). Поэтому $\overline{Q} \cap U_0 = Q$. Пересечение проективной квадрики $\overline{Q}$ с бесконечно удалённой гиперплоскостью $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ обозначается $Q_\infty \overset{\text{def}}{=} \overline{Q} \cap L_\infty = \overline{Q} \smallsetminus Q \subset \mathbb{P}(V)$ и называется *асимптотической квадрикой* аффинной квадрики Q. Эта квадрика задаётся однородной компонентой второй степени $f_2 = q|_V \in S^2 V^*$ неоднородного многочлена (22-1) и имеет матрицу Грама $B_\infty = \left(\beta_{ij}\right)$ с $1 \leqslant i, j \leqslant n$, которая является правой нижней угловой $n \times n$-подматрицей расширенной матрицы Грама B.

Предложение 22.2
Пусть непустые аффинные квадрики $Q', Q'' \subset U_0$ имеют в $\mathbb{P}_n$ проективные замыкания $\overline{Q}'$ и $\overline{Q}''$. Тогда Q' и Q'' аффинно конгруэнтны если и только если существует такое проективное преобразование $g : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, что $g(\overline{Q}') = \overline{Q}''$ и $g(L_\infty) = L_\infty$.

Доказательство. Согласно предл. 22.1, аффинные преобразования пространства U_0 суть проективные преобразования пространства $\mathbb{P}_n$, переводящие в себя бесконечно удалённую гиперплоскость $L_\infty \subset \mathbb{P}_n$. Если такое проективное преобразование g переводит $\overline{Q}'$ в $\overline{Q}''$, то его ограничение на карту $U_0 = \mathbb{P}_n \smallsetminus L_\infty$ переводит $Q' = \overline{Q}' \smallsetminus L_\infty$ в $Q'' = \overline{Q}'' \smallsetminus L_\infty$. Наоборот, если ограничение проективного преобразования g на карту U_0 переводит $Q' = \overline{Q}' \smallsetminus L_\infty$ в $Q'' = \overline{Q}'' \smallsetminus L_\infty$, то проективные квадрики $g(\overline{Q}')$ и $\overline{Q}''$ совпадают друг с другом всюду вне гиперплоскости L_∞. Идущая ниже лем. 22.1 утверждает, что тогда они совпадают всюду. □

Лемма 22.1
Если гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_n$ и непустая проективная квадрика $P \subset \mathbb{P}_n$ над бесконечным полем $\Bbbk$ таковы, что $P \not\subset H$ и $H \not\subset P$, то пересечение $P \cap H$ однозначно восстанавливается по дополнению $P \smallsetminus H$.

Доказательство. При $n = 1$ это следует из прим. 17.6 на стр. 208. Пусть $n \geqslant 2$ и $P = V(q)$. Если квадрика P гладкая, то над бесконечным полем в дополнении $P \smallsetminus H$ найдутся $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Упражнение 22.1. Убедитесь в этом.

Полярное преобразование[2] $\hat{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$ переводит эти точки в их касательные гиперплоскости и тем самым однозначно ими определяется. По полярному преобразованию однозначно с точностью до пропорциональности восстанавливается матрица Грама формы q, а значит, и сама квадрика P. Если квадрика P особа, но в дополнении $P \smallsetminus H$ есть гладкая точка a, рассмотрим

[1] См. n° 17.4.3 на стр. 213.
[2] См. n° 19.1 на стр. 233.

любое дополнительное к $\operatorname{Sing} P$ проективное подпространство $L \ni a$. По теор. 17.1 на стр. 209 квадрика P является линейным соединением подпространства $\operatorname{Sing} P$ и непустой гладкой квадрики $P' = P \cap L \ni a$. По уже доказанному, пересечение $P' \cap H'$ этой гладкой квадрики с гиперплоскостью $H' = H \cap L$ в пространстве L однозначно определяется дополнением $P' \smallsetminus H'$. Пересечение $\operatorname{Sing} P \cap H$ также однозначно восстанавливается по $P \smallsetminus H$, так как каждая прямая (ab) с $b \in \operatorname{Sing} P \cap H$ лежит на P и все точки этой прямой кроме точки b лежат в $P \smallsetminus H$. Поэтому пересечение $P \cap H$, будучи линейным соединением $P' \cap H$ с $\operatorname{Sing} P \cap H$, тоже однозначно восстанавливается по дополнению $P \smallsetminus H$. Ну а если в дополнении $P \smallsetminus H$ есть особая точка a, то любая прямая (ab) с $b \in P \cap H$ целиком лежит на квадрике и пересекает H ровно по точке b. Значит, и в этом случае пересечение $P \cap H$ восстанавливается по $P \smallsetminus H$. □

Определение 22.1

Аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ с проективным замыканием $\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ и асимптотической квадрикой $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ называется *гладкой центральной*, если обе квадрики $\overline{Q}$, Q_∞ гладкие, *параболоидом* — если $\overline{Q}$ гладкая, а Q_∞ особая, (*простым*) *конусом* — если $\overline{Q}$ особая, а Q_∞ гладкая, и *цилиндром* — если обе проективные квадрики $\overline{Q}$, Q_∞ особы.

22.2. Гладкие центральные квадрики. Если обе проективные квадрики $\overline{Q}$ и $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ гладкие, бесконечно удалённая гиперплоскость L_∞ не является касательной к $\overline{Q}$ трансверсально, и её полюс c относительно $\overline{Q}$ лежит в $U_0 \smallsetminus Q$. Он является *центром симметрии* аффинной квадрики Q, так как по предл. 19.1 на стр. 234 на любой проходящей через c прямой, пересекающей квадрику в точках a и b, а бесконечно удалённую гиперплоскость — в точке d, выполняется равенство $[d, c, a, b] = -1$, означающее, что точка c является барицентром точек a, b.

На языке уравнений, квадрика Q центральна если и только если оба определителя $\det B$, $\det B_\infty$ отличны от нуля. Центр c, будучи полюсом гиперплоскости $x_0 = 0$, удовлетворяет линейному уравнению $cB = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Его однородные координаты пропорциональны верхней строке присоединённой матрицы $B^\vee$ расширенной матрицы Грама[1]:

$$c = (1 : -B_{01}/B_{00} : \ldots : (-1)^n B_{0n}/B_{00}).$$

Так как вектор c ортогонален подпространству V, любой набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$, составляющий ортогональный базис формы $f_2 = q|_V$, образует вместе с c ортогональный базис для формы q в W. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ относительно этого базиса квадратичная форма q записывается в виде $a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 0$, где все $a_i \neq 0$. В карте U_0 в аффинном репере с началом в точке $c \in U_0$ и осями, направленными вдоль векторов v_i, это уравнение приобретает вид $b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \cdots + b_nx_n^2 = 1$, где $b_i = -a_i/a_0$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это уравнение можно упростить и дальше: умножая базисные векторы на подходящие константы, получаем $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные аффинные квадрики аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ уравнение приводится к виду

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{p+s}^2 = \pm 1\,, \quad \text{где} \quad r \geqslant s \geqslant 0\,,\ r + s = n \tag{22-2}$$

и при чётном n и $r = s = n/2$ в правой части стоит[2] $+1$. При $r > s$ и правой части $+1$ проективное замыкание $\overline{Q}$ квадрики (22-2) имеет сигнатуру $(r, s+1)$ и планарность s. При $r > s$ и

[1] Через B_{ij} здесь и далее обозначается определитель $n \times n$-подматрицы расширенной матрицы Грама B, стоящий в дополнении к её i-той строке и j-тому столбцу.

[2] При $r = s = n/2$ смена знака у обоих частей и перенумерация переменных превращает уравнение (22-2) с правой частью -1 в аналогичное уравнение с правой частью $+1$.

правой части -1 квадрика $\overline{Q}$ имеет сигнатуру $(r+1, s)$ и планарность $(s-1)$. При чётном n и $r = s = n/2$ квадрика $\overline{Q}$ имеет планарность $n/2$.

Асимптотическая квадрика $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ аффинной квадрики (22-2) задаётся в том же базисе пространства $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ уравнением $x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+s}^2 = 0$ и является $(s-1)$-планарной. Мы заключаем, что если центральная квадрика $\overline{Q}$ имеет тип[1] $Q_{d,m}$, то её асимптотическая квадрика имеет тип $Q_{d-1,m-1}$, если правая часть уравнения (22-2) равна -1 или $d = 2m$, и имеет тип $Q_{d-1,m}$, если правая часть уравнения (22-2) равна $+1$ и $d \neq 2m$. Таким образом, все аффинные квадрики (22-2) попарно аффинно не конгруэнтны.

Среди них имеется ровно одна пустая — это квадрика $\sum x_i^2 = -1$ планарности -1, задаваемая уравнением $\sum x_i^2 = -1$. Также имеется ровно одна непустая квадрика без точек на бесконечности — это квадрика $\sum x_i^2 = 1$ планарности нуль. Она называется *эллипсоидом*. Все остальные квадрики имеют непустую асимптотическую квадрику $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$ и называются *гиперболоидами*. Квадрики планарности нуль исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом* $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$. Через каждую точку всех остальных непустых квадрик (22-2) можно провести лежащую на квадрике прямую.

Упражнение 22.2. Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две компоненты связности, тогда как все остальные квадрики (22-2) связны.

22.3. Параболоиды. Аффинная квадрика Q является параболоидом если и только если её проективное замыкание $\overline{Q}$ гладко и касается бесконечно удалённой гиперплоскости L_∞. В этом случае асимптотическая квадрика Q_∞ имеет ровно одну особую точку c, которая одновременно является полюсом гиперплоскости L_∞ и одномерным ядром матрицы B_∞.

На языке уравнений, у параболоида $\det B \neq 0$, а $\det B_\infty = 0$. Точка касания

$$c = (0 : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n}) \in \overline{Q} \cap L_\infty ,$$

понимаемая как направление в исходном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$, называется *направлением оси параболоида*. В силу предл. 14.5 на стр. 176, квадратичная форма $f_2 = q|_V$ невырождено ограничивается на любую $(n-2)$-мерную не проходящую через c гиперплоскость $H = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V) = L_\infty$. Так как ограничение формы q на двумерное подпространство $U^\perp \subset W = \Bbbk \oplus V$ в этом случае тоже невырождено, а содержащееся в $U^\perp$ одномерное пространство $c = V^\perp \subset U^\perp$ изотропно, подпространство $U^\perp$ является гиперболической плоскостью. Выберем в ней гиперболический базис u_0, u_n так, чтобы $u_0 \in U_0$, а $u_n \in c$, и дополним его ортонормальным базисом $u_1, \dots, u_{n-1}$ подпространства U до базиса $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$ в W. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ относительно этого базиса квадратичная форма q запишется как $a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2 x_0 x_n = 0$. В аффинном репере карты U_0 с началом в точке u_0 и базисными векторами $u_1, \dots, u_n$ аффинное уравнение параболоида приобретает вид $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_{n-1} x_{n-1}^2 = 2 x_n$, где $b_i = -a_i$. Над алгебраически замкнутым полем оно упрощается дальше до $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2 x_n$, и мы заключаем, что все параболоиды над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ аффинное уравнение параболоида преобразуется к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 = 2 x_n , \quad \text{где} \quad r \geqslant s \geqslant 0 ,\; r + s = n - 1 . \tag{22-3}$$

[1] Напомю, что через $Q_{d,m} \subset \mathbb{P}_n$ мы обозначаем гладкую вещественную квадрику размерности d и планарности m, см. n° 19.3.1 на стр. 241.

Параболоид (22-3) имеет планарность s. Поэтому при разных s параболоиды (22-3) аффинно не конгруэнтны. Нуль-планарный параболоид $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2\,x_n$ называется *эллиптическим*, а все остальные — *гиперболическими*. В силу сл. 19.4 на стр. 241 асимптотическая квадрика аффинного параболоида с проективным замыканием типа $Q_{d,m}$ является простым конусом с вершиной c над гладкой проективной квадрикой типа $Q_{d-2,m-1}$.

22.4. Простые конусы. Аффинная квадрика Q является простым конусом, если её расширенная матрица Грама имеет $\det B = 0$, но правый нижний угловой $n \times n$-минор этой матрицы $B_{00} = \det B_\infty \neq 0$. В этом случае $\operatorname{rk} B = n$ и проективная квадрика $\overline{Q}$ имеет единственную особую точку $(c_0 : c_1 : \dots : c_n) = (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n})$ — верхнюю строку присоединённой матрицы $B^\vee$, лежащую в $\ker B$, поскольку $B^\vee B = \det B \cdot E = 0$. Поместим начало аффинной координатной системы карты U_0 в точку $c = (1, -B_{01}/B_{00}, \dots, (-1)^n B_{0n}/B_{00}) \in U_0$ и направим оси координат вдоль векторов какого-нибудь ортогонального базиса невырожденной квадратичной формы $f_2 = q|_V$. В таком репере квадрика Q запишется аффинным уравнением

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0\,,$$

одновременно являющимся однородным уравнением асимптотической квадрики $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$. Над алгебраически замкнутым полем это уравнение упрощается до $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$. Тем самым, все простые конусы над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем $\mathbb{R}$ уравнение конуса приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \dots + x_{r+s}^2\,, \quad \text{где} \quad r \geqslant s \geqslant 0 \text{ и } r + s = n\,. \tag{22-4}$$

Это однородное уравнение задаёт в $\mathbb{P}(V)$ проективную квадрику планарности $s - 1$. Поэтому аффинный конус (22-4) имеет планарность s. В частности, все конусы (22-4) попарно аффинно не конгруэнтны. Обратите внимание, что 0-планарный аффинный конус $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ является конусом над пустой проективной квадрикой $Q_{n-1,-1}$ и состоит из единственной точки — своей расположенной в начале координат вершины.

22.5. Цилиндры. Согласно опр. 22.1, аффинная квадрика Q является цилиндром, если и $\overline{Q}$, и Q_∞ особы, т. е. $\det B = \det B_\infty = 0$.

Упражнение 22.3. Убедитесь, что это эквивалентно условию $\operatorname{Sing} \overline{Q} \cap L_\infty \neq \varnothing$.

Если выбрать в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ так, чтобы векторы e_i с $i > r$ составили базис в $\ker q \cap V$, то уравнение аффинной квадрики квадрики Q не будет зависеть от последних $n - r$ координат. Поэтому любой цилиндр является прямым произведением аффинного пространства $\mathbb{A}^{n-r}$, параллельного последним $n - r$ базисным векторам, и не имеющей особенностей на бесконечности аффинной квадрики в дополнительном к нему аффинном пространстве $\mathbb{A}^r$. Эта квадрика принадлежит к одному из уже рассмотренных выше трёх типов.

Пример 22.1 (вещественные аффинные кривые второй степени)

Полный список непустых аффинных «кривых второй степени» в $\mathbb{R}^2$ с точностью до аффинной конгруэнтности таков:

- *эллипс* $x_1^2 + x_2^2 = 1$, гладкая центральная квадрика с пустой асимптотической квадрикой; проективное замыкание типа $Q_{1,0}$, асимптотическая квадрика типа $Q_{0,-1}$
- *гипербола* $x_1^2 - x_2^2 = 1$, гладкая с центральная квадрика с гладкой непустой асимптотической квадрикой, состоящей из точек $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$; проективное замыкание типа $Q_{1,0}$, асимптотическая квадрика типа $Q_{0,0}$

- *парабола* $x_1^2 = x_2$, касающаяся бесконечно удалённой прямой в точке $(0 : 0 : 1)$; проективное замыкание типа $Q_{1,0}$, асимптотическая квадрика — конус над пустой квадрикой в $\mathbb{P}_0$

- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 = 0$, конус над гладкой пустой асимптотической квадрикой типа $Q_{0,-1}$

- *пара пересекающихся прямых* $x_1^2 - x_2^2 = 0$, конус над гладкой непустой асимптотической квадрикой типа $Q_{0,0}$

- *пара параллельных прямых* $x_1^2 = 1$, цилиндр над гладкой непустой квадрикой в $\mathbb{A}^1$

- *двойная прямая* $x_1^2 = 0$, циллиндр над двойной точкой в $\mathbb{A}^1$.

Пример 22.2 (вещественные аффинные квадратичные поверхности)
Полный список непустых аффинных «квадратичных поверхностей» в $\mathbb{R}^3$ вдвое длиннее предыдущего списка «кривых». Он состоит из семи цилиндров над этими «кривыми», задаваемых теми же уравнениями, но только в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3), и называемых соответственно эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, двойной прямой, парой пересекающихся и парой параллельных плоскостей и двойной плоскостью. Кроме семи цилиндров есть три гладких центральных поверхности:

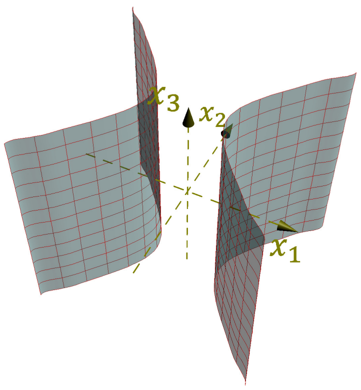

Рис. 22◇1. Цилиндр $x_1^2 - x_2^2 = 1$

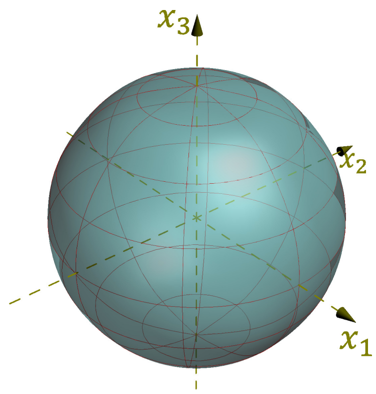

Рис. 22◇2. Эллипсоид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

- *эллипсоид* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ с проективным замыканием $Q_{2,0}$ и гладкой пустой асимптотической коникой $Q_{1,-1}$; эллипсоид компактен и 0-планарен (см. рис. 22◇2)

- *двуполостный гиперболоид* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ с тем же самым проективным замыканием $Q_{2,0}$ и гладкой непустой асимптотической коникой $Q_{1,0}$; двуполостный гиперболоид 0-планарен и имеет две компоненты связности (см. рис. 22◇4)

- *однополостный гиперболоид* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$ (см. рис. 22◇3), проективным замыканием которого является квадрика Сегре $Q_{2,1}$, имеющая непустое пересечение с любой плоскостью и пересекающая каждую некасательную плоскость по гладкой непустой конике $Q_{1,0}$; однополостный гиперболоид связен и заметается двумя семействами прямых

два параболоида:

- *эллиптический параболоид* $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ (см. рис. 22◇5) с 0-планарным проективным замыканием $Q_{2,0}$, которое касается бесконечно удалённой плоскости $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$, и асимптотической коникой, которая является конусом с вершиной в этой точке над пустой гладкой квадрикой $Q_{0,-1}$

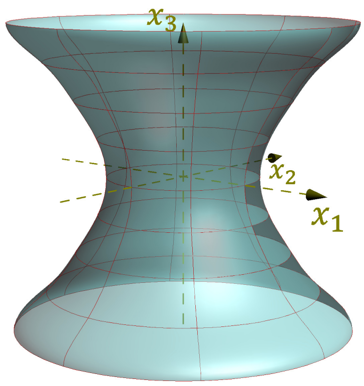

Рис. 22◇3. Гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$

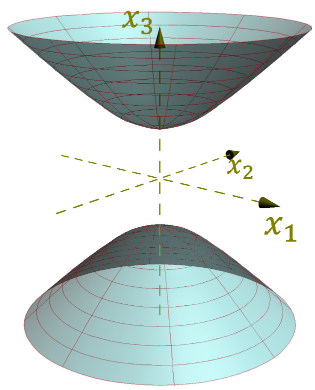

Рис. 22◇4. Гиперболоид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$

- *гиперболический параболоид* $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$ (см.рис. 22◇7) с 1-планарным проективным замыканием $Q_{2,1}$ и асимптотической коникой, являющейся конусом с вершиной в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$ над непустой гладкой квадрикой $Q_{0,0}$; гиперболический параболоид заметается двумя семействами прямых, в частности, пересекает бесконечность по паре прямых $x_1 = \pm x_2$

и два простых конуса над разными гладкими асимптотическими кониками:

- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, конус над пустой гладкой коникой
- *эллиптический конус* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, конус над не пустой гладкой коникой (см. рис. 22◇6)

Итого, 14 непустых попарно аффинно неконгуэнтных фигур.

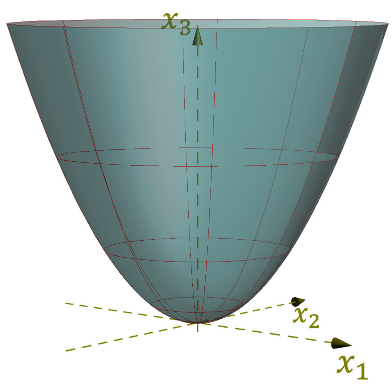

Рис. 22◇5. Параболоид $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$

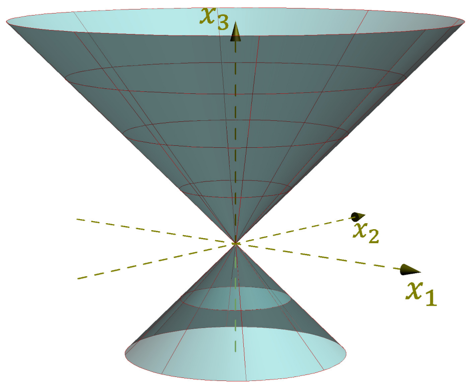

Рис. 22◇6. Конус $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

Предложение 22.3

Каждый параболоид в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^{n-1}$.

Доказательство. Пусть проективное замыкание $\overline{P} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ параболоида $P \subset \mathbb{R}^n$ касается бесконечной гиперплоскости L_∞ в точке p. Проекция из точки p на любую не проходящую через p проективную гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_n$ задаёт биекцию между точками параболоида $P = \overline{P} \smallsetminus L_\infty = P \smallsetminus T_p\overline{P}$ и точками аффинной гиперплоскости $H \smallsetminus T_p\overline{P} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Поскольку координаты точки $x \in P$ и её проекции $t \in H$ являются рациональными функциями друг друга[1], эта биекция является гомеоморфизмом. □

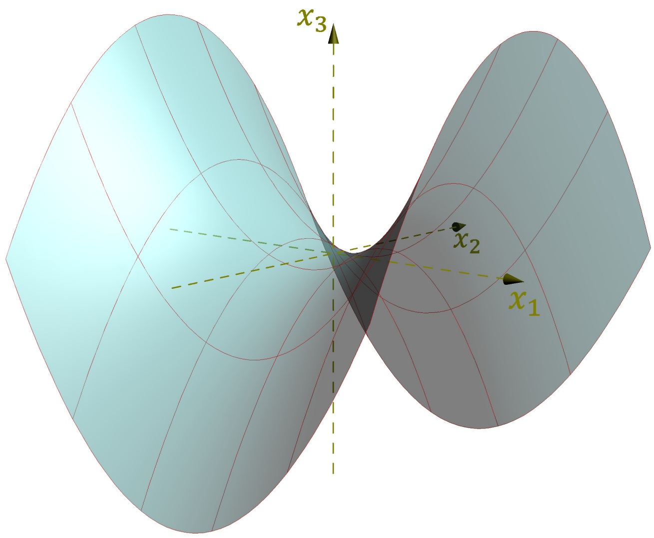

Рис. 22◇7. Гиперболический параболоид $x_1^2 - x_2^2 = 2\,x_3$

Предложение 22.4

Гладкая центральная аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ размерности n с проективным замыканием типа $Q_{n,m}$ гомеоморфна цилиндру $\mathbb{R}^m \times S^{n-m}$, где $S^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n+1-m}$ — единичная сфера, если её асимптотическая квадрика Q_∞ имеет тип $Q_{n-1,m-1}$, и гомеоморфна цилиндру $S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, если асимптотическая квадрика имеет тип $Q_{n-1,m}$.

Доказательство. Если $\overline{Q} \simeq Q_{n,m}$ и $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m-1}$, квадрика Q задаётся в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением

$$1 + x_1^2 + \dots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2\,.$$

Разобьём $\mathbb{R}^{n+1}$ в произведение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1-m}$. Пересечение квадрики Q со слоем $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$ над любой точкой $w = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ является сферой в $\mathbb{R}^{n-m+1}$ с центром в нуле и квадратом радиуса $1 + (w, w)$, где $(\,*\,,\,*\,)$ — стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^m$. Отображение

$$(w, u) \mapsto \left(w, \frac{u}{\sqrt{1 + (w, w)}} \right),$$

осуществляющее в каждом слое $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$ гомотетию с коэффициентом $\big(1 + (w, w)\big)^{-1/2}$, задаёт гомеоморфизм между квадрикой Q и цилиндром $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$. Если $\overline{Q} \simeq Q_{n,m}$ и $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m}$, то Q имеет уравнение $x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = x_{m+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 + 1$. Применяя к $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}$ то же рассуждение, что и выше, получаем гомеоморфизм $Q \xrightarrow{\sim} S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. □

[1] Напомню, что $\widetilde{q}(t, t) \cdot (p - x) = 2\widetilde{q}(t, p) \cdot t$, ср. с прим. 17.7 на стр. 211.

Упражнение 22.4. Выведите из предыдущих предложений, что единственной с точностью до аффинной конгруэнтности несвязной гладкой нецилиндрической аффинной квадрикой является двуполостный гиперболоид с уравнением $1 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = x_n^2$.

22.6. Квадрики в евклидовом пространстве. Зафиксируем на пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$ евклидову структуру так, чтобы стандартный базис был ортонормален, и обозначим через

$$(* , *) : V \times V \to \mathbb{R}$$

евклидово скалярное произведение. Тогда каждой квадратичной форме $f \in S^2V^*$ биективно сопоставится[1] самосопряжённый линейный оператор $\varphi_f : V \to V$, матрица которого в любом ортонормальном базисе пространства V совпадает с матрицей Грама формы f в этом базисе, и который однозначно характеризуется тем, что $(u, \varphi_f w) = \widetilde{f}(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Согласно теор. 15.7 на стр. 188 этот оператор диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства V, который таким образом является ортогональным для квадратичной формы f. Диагональные элементы матрицы Грама равны собственным числам оператора φ_f, а базисные векторы являются собственными векторами этого оператора. Мы будем называть всякий базис с такими свойствами *каноническим базисом* квадратичной формы f. Обратите внимание, что если все собственные числа матрицы Грама формы f в произвольном ортонормальном базисе пространства V различны, то канонический базис определён однозначно с точностью до смены знаков и перенумерации базисных векторов.

22.6.1. Центральные квадрики. Пусть гладкая центральная аффинная квадрика $Q \subset \mathbb{A}(V)$ задаётся в стандартных координатах на $V = \mathbb{R}^n$ аффинным уравнением

$$f_0 + f_1(x) + f_2(x) = 0\,, \quad \text{где} \quad f_i \in S^iV^*\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Аффинный репер с началом в центре c квадрики Q и евклидово ортонормальными базисными векторами $u_1, \dots, u_n$, образующими канонический базис асимптотической квадратичной формы f_2, называется *каноническим репером* квадрики Q, а его координатные оси — *главными осями* квадрики Q. Таким образом, главные оси направлены вдоль собственных векторов матрицы Грама квадратичной формы f_2. Аффинное уравнение квадрики Q в каноническом репере имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 1\,, \tag{22-5}$$

где каждый коэффициент $a_i = -q(u_i, u_i) \,/\, q(c, c) = -f_2(u_i, u_i) \,/\, f(c) = -\alpha_i \,/\, f(c)$, а α_i — собственное значение оператора φ_{f_2} на собственном векторе u_i. Поскольку ни собственные значения оператора φ_{f_2}, ни значение многочлена f в точке $c \in \mathbb{A}(V)$ не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов a_i канонического уравнения (22-5) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным инвариантом гладкой центральной квадрики: одна такая квадрика переводится в другую движением объемлющего евклидова пространства если и только если у этих квадрик одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов a_i их канонических уравнений (22-5). Положительные числа $\ell_i \overset{\text{def}}{=} |a_i|^{1/2}$ называются *полуосями* гладкой центральной квадрики. При $a_i > 0$ число ℓ_i равно расстоянию от центра квадрики до точки её пересечения с i-той главной осью. Обратите внимание, что коэффициенты $a_i = -\alpha_i / f(c)$, а с ними — и полуоси вычисляются по аффинному

[1] См. n° 14.2.4 на стр. 174, а также сл. 20.2 на стр. 255.

уравнению f квадрики в произвольном ортонормальном базисе евклидова пространства и не меняются при умножении этого уравнения на константу.

С конформной точки зрения векторы $c, u_1, \dots, u_n \in W = \mathbb{R} \oplus V$, составляющие канонический репер, являются вершинами автополярного относительно проективной квадрики $\overline{Q}$ симплекса[1] в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$, а выходящие из вершины c гиперграни этого симплекса пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ по $(n-1)$-мерному симплексу, автополярному относительно гладкой *абсолютной квадрики* $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ в пространстве $L_\infty = \mathbb{P}(V)$. Эта квадрика не имеет вещественных точек и задаёт на пространстве V *конформную структуру*.

Предложение 22.5

Для любого эллипсоида $Q = V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ с положительно определённой асимптотической квадратичной формой f_2 характеристический многочлен $\det(tE - F_e)$ матрицы Грама F_e формы f_2 в любом евклидово ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V не зависит от выбора этого ортонормального базиса. Симметричным образом, характеристический многочлен $\det(tE - G_v)$ матрицы Грама G_v евклидова скалярного произведения в любом базисе $\boldsymbol{v}$ пространства V, ортонормальном для асимптотической формы f_2, не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Матрица $C_{e'e}$, выражающая евклидово ортонормальный базис $\boldsymbol{e}'$ через евклидово ортонормальный базис $\boldsymbol{e}$, удовлетворяет соотношению $G_{e'} = C_{e'e}^t G_e C_{e'e}$, где $G_{e'} = G_e = E$ суть матрицы Грама евклидова скалярного произведения в этих базисах. Поэтому $C_{e'e}^t = C_{e'e}^{-1}$. Из формулы, связывающей матрицы Грама асимптотической квадратичной формы тех же базисов: $F_e' = C_{e'e}^t F_e C_{e'e} = C_{e'e}^{-1} G_e C_{e'e}$, вытекает, что матрицы $F_{e'}$ и F_e подобны и, стало быть, имеют равные характеристические многочлены. Второе утверждение доказывается аналогично. □

Пример 22.3 (вариации на теоремы Аполлония)

Уравнение эллипсоида в аффинном репере с началом в центре c этого эллипсоида после умножения на подходящую константу приобретает вид $f_2(v) = 1$, где $f_2 \in S^2V^*$ — асимптотическая квадратичная форма эллипсоида, а $v \in V$ — радиус вектор, ведущий из центра эллипсоида в переменную точку пространства.

Упражнение 22.5. Убедитесь, что векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ тогда и только тогда составляют ортонормальный базис квадратичной формы f_2, когда $2n$ точек $c \pm v_i$ лежат на эллипсоиде и для каждого i две проходящие через точки $c \pm v_i$ параллельные плоскости с направляющим векторным пространством, порождённым $(n-1)$ векторами v_ν с $\nu \neq i$, обе касаются эллипсоида.

Такие векторы $v_1, \dots, v_n$ называются *сопряжёнными радиусами* эллипсоида. Из предл. 22.5 вытекает, что для каждого $k = 1, 2, \dots, n = \dim V$ сумма всех главных миноров[2] матрицы Грама G_v евклидовых скалярных произведений набора $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ сопряжённых радиусов эллипсоида не зависит от $\boldsymbol{v}$. При $k = n$ это означает, что евклидов объём параллелепипеда, натянутого на сопряжённые радиусы эллипсоида не зависит от выбора сопряжённых радиусов, а при $k = 1$ — что сумма квадратов длин сопряжённых радиусов эллипсоида одинакова для всех

[1] Это означает, что полюсом каждой $(n-1)$-мерной гиперграни симплекса относительно квадрики $\overline{Q}$ является противолежащая этой грани вершина симплекса.

[2] Т. е. сумма определителей всех $k \times k$-подматриц в G_v, главная диагональ которых содержится в главной диагонали G_v. Согласно прим. 9.2 на стр. 118 эта сумма, умноженная на $(-1)^k$, равна коэффициенту при t^{n-k} в характеристическом многочлене $\det(tE - G_v)$.

наборов сопряжённых радиусов. Эти два утверждения про пару сопряжённых радиусов эллипса на плоскости известны как *теоремы Аполлония*.

Если провести параллельные сопряжённым радиусам v_i прямые $\ell_i = \{a + v_i t\}$ через произвольную не лежащую на эллипсоиде точку a, то каждая из n прямых пересечёт эллипсоид в точках $a_i' = a + v_i t_i'$ и $a_i'' = a + v_i t_i''$, где t_i' и t_i'' являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + 2\widetilde{q}(v_i, a) + q(a) = 0\,,$$

в котором $q \in S^2(\mathbb{R}c \oplus V)^*$ — однородная квадратичная форма, задающая проективное замыкание эллипсоида[1]. Поскольку произведение длин $|a_i' - a| \cdot |a_i'' - a| = t_i' t_i'' |v_i|^2 = q(a)|v_i|^2$, мы заключаем, что сумма таких произведений по всем n сопряжённым направлениям

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i' - a| \cdot |a_i'' - a| = q(a) \cdot \operatorname{tr} G_v$$

тоже не зависит от выбора набора сопряжённых направлений.

Пример 22.4 (ортооптическая сфера центральной квадрики)
Одним из многомерных обобщений директора[2] центральной коники на евклидовой плоскости является ГМТ пересечения n попарно перпендикулярных гиперплоскостей $T_1, \dots, T_n$, касающихся заданной центральной квадрики Q в аффинном евклидовом пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$, где $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$, и зафиксируем в пространстве W такой базис $e_0, e_1, \dots, e_n$, что вектор e_0 является центром квадрики Q, а векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют евклидово ортонормальный базис пространства V, в котором матрица Грама асимптотической квадрики Q_∞ диагональна. Умножая уравнение квадрики на ненулевую константу, мы можем считать, что в однородных координатах $x_0, x_1, \dots, x_n$ относительно выбранного базиса проективное замыкание $\overline{Q} = V(q)$ квадрики Q задаётся квадратичной формой

$$-x_0^2 + b_1 x_1^2 + \cdots + b_n x_n^2\,.$$

Каждая проходящая через заданную точку $a = (1 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}_n$ гиперплоскость $T \subset \mathbb{P}_n$ является точкой проективного пространства $a^\times = \mathbb{P}(\operatorname{Ann} a) \subset \mathbb{P}(W^\times)$. Мы отождествим его с $\mathbb{P}(V^*)$ при помощи линейного изоморфизма $V^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ann} a$, $\xi \mapsto \xi - \xi(a) \cdot x_0$, который сопоставляет ненулевому ковектору $\xi \in V^*$ проходящую через точку a гиперплоскость T_ξ, задаваемую в однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ линейным уравнением

$$\xi(x_1, \dots, x_n) - x_0 \cdot \xi(a_1, \dots, a_n) = 0\,. \tag{22-6}$$

Перпендикулярность гиперплоскостей T_ξ и T_η означает, что задающие их ковекторы $\xi, \eta \in V^*$ евклидово перпендикулярны. Таким образом, проходящие через точку a попарно перпендикулярные гиперплоскости $T_1, \dots, T_n$ образуют в $\mathbb{P}(V^*)$ автополярный симплекс для двойственной к абсолютной квадрике $A \subset \mathbb{P}(V)$ квадрики $A^\times \subset \mathbb{P}(V^*)$, матрица Грама которой в двойственном к евклидово ортонормальному базису $e_1, \dots, e_n$ базисе $x_1, \dots, x_n$ равна E. Изоморфизм $V^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ann} a$ переводит этот базис пространства V^* в базис пространства $\operatorname{Ann} a$, состоящий из

[1] Коэффициент при t^2 равен $\widetilde{q}(v_i, v_i) = f_2(v_i) = 1$, поскольку векторы v_i образуют ортонормальный базис формы f_2.

[2] См. n° 21.3.1 на стр. 264.

форм $x_i - a_i x_0$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Условие касания гиперплоскостей T_i с квадрикой Q означает, что задающие эти плоскости линейные формы $\xi_i - \xi_i(a) \cdot x_0$ лежат на двойственной к $\overline{Q}$ квадрике $\overline{Q}^{\times} \subset \mathbb{P}(W^*)$, имеющей в базисе $x_0, x_1, \dots, x_n$ пространства W^* диагональную матрицу Грама с диагональными элементами -1, b_1^{-1}, … , b_n^{-1}. Ограничение этой формы на подпространство $a^{\times}$ имеет в базисе из форм $x_i - a_i x_0$ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^{-1} - a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & b_2^{-1} - a_2^2 & -a_2 a_3 & \cdots & -a_2 a_n \\ -a_3 a_1 & -a_3 a_2 & b_3^{-1} - a_3^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1} a_n \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & -a_n a_{n-1} & b_n^{-1} - a_n^2 \end{pmatrix}. \tag{22-7}$$

Согласно теор. 19.2 на стр. 238 лежащий на такой квадрике набор точек $\xi_1, \dots \xi_n$, одновременно автополярный относительно квадрики с единичной матрицей Грама, существует если и только если матрица (22-7) бесследна. Точки a, для которых это условие выполняется, образуют сферу с тем же центром e_0, что и квадрика Q, и квадратом радиуса, равным $\sum a_i^2 = \sum b_i^{-1}$. Эта сфера называется *ортооптической сферой* квадрики Q. Для эллипсоида квадрат радиуса ортооптической сферы равен сумме квадратов полуосей. Для гиперболоида он может оказаться отрицательным, и в этом случае множество вещественных точек ортооптической сферы пусто. Например, директор гиперболы на плоскости является непустой окружностью если и только если содержащий ветвь гиперболы угол между её асимптотами острый. При этом одна из двух перпендикулярных касательных, опущенных из каждой точки пересечения директора с асимптотами, касаются гиперболы в бесконечно удалённой точке. Для равнобокой гиперболы с перпендикулярными касательными на директоре имеется ровно одна вещественная точка — центр гиперболы, и опущенные из него касательные суть асимптоты. Если содержащий ветвь гиперболы угол между асимптотами тупой, директор имеет отрицательный радиус и не имеет вещественных точек.

22.6.2. Параболоиды. Пусть проективное замыкание $\overline{P} \subset \mathbb{P}(W)$ параболоида $P \subset \mathbb{A}(V)$ касается бесконечно удалённой гиперплоскости $\mathbb{P}(V)$ в точке p. Обозначим через $U = p^{\perp} \subset V$ евклидово ортогональное дополнение к одномерному подпространству $p \subset V$. Подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ имеет коразмерность 2 в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ и сопряжение относительно гладкой квадрики $\overline{P}$ задаёт на пучке проходящих через L гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}(W)$ инволюцию[1]. Двумя неподвижными точками этой инволюции являются проходящие через L касательные гиперплоскости к квадрике $\overline{P}$. Одной из них является бесконечность L_∞, касающаяся $\overline{P}$ в точке p. Обозначим вторую гиперплоскость через L_0, и пусть она касается $\overline{P}$ в точке $c \in U_0 = \mathbb{A}(V)$. Эта точка называется *вершиной*, а прямая (cp), выходящая из вершины в направлении $p \in \mathbb{P}(V)$, называется *осью* параболоида P.

Так как подпространство U трансверсально к p, ограничение асимптотической квадратичной формы f_2 квадрики P на подпространство U невырождено. Следовательно, в U существует

[1] Которая переводит две плоскости друг в друга если и только если каждая из них проходит через полюс другой, см. n° 19.1 на стр. 233.

евклидово ортонормальный базис $u_1, \dots, u_{n-1}$, в котором форма $f_2|_U$ имеет диагональную матрицу Грама с диагональными элементами, равными ненулевым собственным числам α_i самосопряжённого оператора[1] φ_{f_2}, а ортонормальные векторы u_i являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями α_i. Поскольку прямая (cp) сопряжена подпространству $L = \mathbb{P}(U)$ относительно квадрики $\overline{P}$, расширенная квадратичная форма q, задающая квадрику $\overline{P}$, ограничивается на неё невырождено, а значит, линейная оболочка изотропных векторов $p \in V$ и $c \in U_0$ является гиперболической плоскостью для квадратичной формы q. Аффинный репер с началом в вершине c и евклидово ортонормальными базисными векторами $u_1, \dots, u_{n-1}, p$ называется *каноническим репером* параболоида P, если в аффинных координатах относительно этого репера параболоид P задаётся уравнением вида

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n\,, \tag{22-8}$$

где число положительных коэффициентов в левой части не меньше, чем число отрицательных, и каждый коэффициент $a_i = -q(u_i, u_i)\,/\,\widetilde{q}(c,p) = -f_2(u_i,u_i)\,/\,\widetilde{q}(c,p) = -\alpha_i\,/\,\widetilde{q}(c,p)$, где α_i — ненулевое собственное значение оператора φ_{f_2} на собственном векторе u_i. Условие на знаки коэффициентов в левой части (22-8) однозначно фиксирует направление n-того единичного базисного вектора $p \in V$. Если все собственные числа асимптотической матрицы Грама B_∞ различны, то канонический репер параболоида единствен с точностью до перенумерации и смены знаков первых $(n-1)$ базисных векторов. Так как ни собственные значения оператора φ_{f_2}, ни значение симметричной билинейной формы $\widetilde{q}$ на *однозначно* определяемых параболоидом P векторах $c \in U_0 = e_0 + V$ и $p \in V$ не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов a_i канонического уравнения (22-8) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным евклидовым инвариантом параболоида: один гиперболоид переводится в другой движением объемлющего евклидова пространства если и только если они имеют одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов a_i канонических уравнений (22-8).

Пример 22.5 (ортооптическая плоскость)

В отличие от центральных квадрик, для параболоида $P \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ ГМТ пересечения n-ок его попарно перпендикулярных касательных гиперплоскостей $T_1, \dots, T_n$ представляет собою не сферу, а гиперплоскость, которая называется *директрисой* параболоида или *ортооптической плоскостью*. Чтобы убедиться в этом, надо повторить вычисление из прим. 22.4 на стр. 282, взяв в качестве базиса в $W = \mathbb{R}\, e_0 \oplus V$ канонический базис параболоида $e_1, e_2, \dots, e_n$, в котором вектор $e_0 \in P$ является вершиной параболоида, вектор $e_n \in V$ является точкой касания проективного замыкания $\overline{P}$ с гиперплоскостью L_∞, прямая $(e_0 e_n)$ полярна относительно $\overline{P}$ линейной оболочке векторов e_i с $1 \leqslant i \leqslant n-1$, а векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$ образуют евклидово ортонормальный базис пространства V. Умножая уравнение параболоида на ненулевую константу, можно считать, что в однородных координатах $x_0, x_1, \dots, x_n$ его матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22-9}$$

[1] Или, что то же самое, асимптотической матрицы Грама B_∞.

Пространство $a^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$ проходящих через точку $a = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}(V)$ гиперплоскостей $T \subset \mathbb{P}(W)$ состоит, как и в прим. 22.4, из точек вида $\xi - \xi(a)\, x_0 \in W^*$, где ξ пробегает V^*, но рассматривается как линейная форма на W, аннулирующая базисный вектор e_0. Попарная перпендикулярность друг другу n-ки таких гиперплоскостей $T_1, \dots, T_n \in a^\times$ означает, что отвечающие им n линейых форм ξ_i составляют автополярный относительно евклидовой квадрики $A^\times$ набор точек в $\mathbb{P}(V^*)$. Ограничение двойственной к (22-9) квадратичной формы на гиперплоскость $a^\times$ имеет в базисе из форм $\eta_i = x_i - a_i x_0$ матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & 0 & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & b_{n-1}^{-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 2a_n \end{pmatrix} \tag{22-10}$$

и наличие на такой квадрике n автополярных относительно единичной матрицы точек равносильно бесследности[1] матрицы (22-10), только теперь это условие выражается линейным по a уравнением $-2a_n = b_1^{-1} + \cdots + b_{n-1}^{-1}$, которое задаёт гиперплоскость, перпендикулярную оси параболоида и находящуюся от его вершины на расстоянии $|b_1^{-1} + \cdots + b_{n-1}^{-1}|$. Полюс этой гиперплоскости называется *фокусом* параболоида.

22.6.3. Конусы. Каноническим репером аффинного конуса $C \subset \mathbb{A}(V)$ называется система координат с началом в вершине c конуса и евклидово ортонормальными базисными векторами $u_1, \dots, u_n$, которые являются собственными векторами невырожденного самосопряжённого оператора φ_{f_2}. Аффинное уравнение конуса в этой системе координат имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 0\,. \tag{22-11}$$

Набор коэффициентов $(a_1 : \ldots : a_n)$ пропорционален набору $(\alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$ собственных чисел самосопряжённого оператора φ_{f_2}. Конус является двойной точкой если и только если все коэффициенты a_i одинакового знака. Отличный от двойной точки конус является линейным соединением вершины c и непустой гладкой квадрики в $L_\infty = \mathbb{P}(V)$, которая задаётся в базисе $u_1, \dots, u_n$ тем же самым уравнением (22-11). Поскольку непустая гладкая вещественная проективная квадрика определяет своё уравнение однозначно с точностью до пропорциональности, два отличных от двойной точки конуса евклидово конгруэнтны если и только если наборы собственных чисел $(\alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$ асимптотических квадратичных форм f_2 их аффинных уравнений в произвольном ортонормальном базисе отличаются друг из друга перестановкой элементов и умножением всех элементов на одну и ту же ненулевую константу.

[1] См. теор. 19.2 на стр. 238.

Упр. 22.1. Модифицируйте решение упр. 19.3 на стр. 233.

Упр. 22.3. Если $\dim \operatorname{Sing} \overline{Q} = 0$, то Q является конусом или цилиндром если и только если эта особая точка, соответственно, конечна или бесконечна. Если же $\dim \operatorname{Sing} \overline{Q} \geqslant 1$, то проективное подпространство $\operatorname{Sing} \overline{L}$ всегда пересекается с гиперплоскостью L_∞.

Упр. 22.4. Среди пространств вида $\mathbb{R}^m \times S^{n-m}$, где $0 \leqslant m \leqslant n$, несвязным является только $\mathbb{R}^n \times S^0 = \mathbb{R}^m \sqcup \mathbb{R}^m$.

Упр. 22.5. Ортормальность векторов v_i относительно формы f_2 на V означает, что задающая проективное замыкание эллипсоида квадратичная форма q на пространстве $W = \mathbb{R}\,c \oplus V$ имеет в базисе $c, v_1, \dots, v_n$ этого пространства вид

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \,. \tag{23-20}$$

Поэтому все векторы $c \pm e_i$ изотропны, и ортогонал к каждому такому вектору порождается им самим и векторами v_ν с $\nu \neq i$. Наоборот, если эти условия выполняются, то при каждом i линейная оболочка векторов v_ν с $\nu \neq i$ является ортогональным относительно формы q дополнением к двумерному пространству, натянутому на c и e_i, а из равенств

$$\widetilde{q}(c + e_i, c + e_i) = 0 = \widetilde{q}(c - e_i, c - e_i)$$

вытекает, что $\widetilde{q}(c, e_i) = 0$ и $\widetilde{q}(e_i, e_i) = -\widetilde{q}(c, c) = 1$, т. е. в базисе $c, v_1, \dots, v_n$ форма q имеет вид (23-20).