

§11. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства на поле \mathbb{R} , см. §3 на стр. 34. Евклидово скалярное произведение¹ векторов u и w обозначается через (u, w) или через $u \cdot w$. Напомним, что оно билинейно, симметрично и положительно.

11.1. Ортонормальные базисы. Набор векторов v_1, \dots, v_k в евклидовом пространстве называется *ортонормальным*, если все векторы в нём попарно перпендикулярны, т. е. $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортонормальный набор ненулевых векторов автоматически линейно независим, так как скалярно умножая на вектор v_i равенство

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

получаем $\lambda_i (v_i, v_i) = 0$, откуда все $\lambda_i = 0$.

Ортонормальный набор векторов e_1, \dots, e_k называется *ортонормальным*, если все его векторы имеют длину 1, т. е. $(e_i, e_i) = 1$ при всех i . Такой набор автоматически образует базис в своей линейной оболочке, и разложение $v = \sum x_i e_i$ произвольного вектора $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ по этому базису имеет коэффициенты $x_i = (e_i, v)$, а скалярное произведение векторов $u = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ равно $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Проверьте оба эти факта.

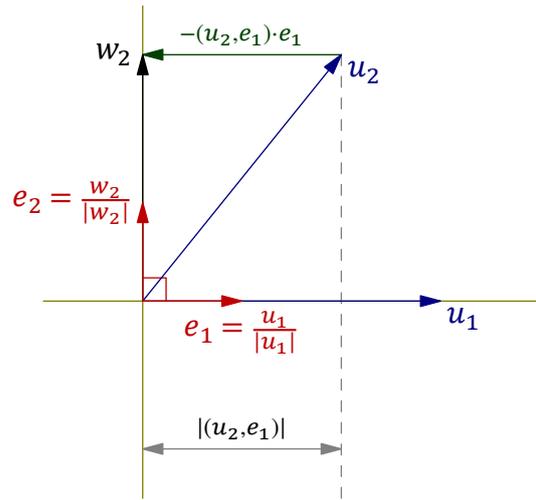


Рис. 11◊1. Второй шаг ортогонализации.

Предложение 11.1

Пусть не все векторы u_1, \dots, u_m ненулевые. Тогда в их линейной оболочке существует такой ортонормальный базис e_1, \dots, e_n , что при каждом k линейная оболочка векторов u_1, \dots, u_k лежит в линейной оболочке векторов e_1, \dots, e_k .

Доказательство. Выбрасывая из набора нулевые векторы, будем считать, что все $u_i \neq 0$. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём $e_1 = u_1 / |u_1|$. По построению $|e_1| = 1$ и u_1 лежит в одномерном пространстве, натянутом на e_1 . Допустим по индукции, что для векторов u_1, \dots, u_k уже построены такие ортонормальные векторы e_1, \dots, e_i , что $i \leq k$ и

$$\text{span}(e_1, \dots, e_i) = \text{span}(u_1, \dots, u_k). \quad (11-1)$$

Положим $w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{v=1}^i (u_{k+1}, e_v) \cdot e_v$, см. рис. 11◊1. Для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(w_{i+1}, e_j) = (u_{k+1}, e_j) - (u_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, т. е. вектор w_{i+1} ортогонален подпространству (11-1). Если $w_{i+1} = 0$, то вектор u_{k+1} лежит в подпространстве (11-1) и индуктивное предположение выполняется для наборов u_1, \dots, u_{k+1} и e_1, \dots, e_i . Если $w_{i+1} \neq 0$, полагаем $e_{i+1} = w_{i+1} / |w_{i+1}|$ и заключаем, что индуктивное предположение выполняется для наборов u_1, \dots, u_{k+1} и e_1, \dots, e_{i+1} . \square

¹См. опр. 3.1 на стр. 34.

СЛЕДСТВИЕ 11.1

В каждом конечномерном евклидовом пространстве имеется ортонормальный базис. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1

Описанный в доказательстве [предл. 11.1](#) способ построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортгонализацией Грама–Шмидта*.

ПРИМЕР 11.1 (УРАВНЕНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Линейное неоднородное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$ на координаты x_1, \dots, x_n относительно ортонормального базиса n -мерного евклидова пространства V можно переписать как уравнение на неизвестный вектор $x \in V$

$$(a, x) = d, \quad (11-2)$$

в котором вектор $a \in V$ и число $d \in \mathbb{R}$ заданы. На геометрическом языке это уравнение гласит, что ортогональная проекция вектора x на вектор¹ a равна

$$x_a = a \cdot \frac{(a, x)}{(a, a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{d}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|}.$$

Концы векторов x с таким свойством замечают в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ вдоль вектора a , если $d > 0$, и в противоположную сторону, если $d < 0$ (см. [рис. 11♦2](#)).

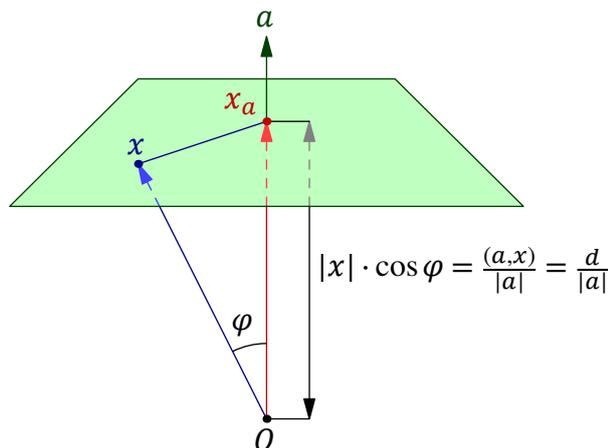


Рис. 11♦2. ГМТ $x : (a, x) = d$.

ПРИМЕР 11.2 (СРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР)

Покажем, что в евклидовом аффинном пространстве \mathbb{A}^n ГМТ x , равноудалённых от двух заданных точек $p_0 \neq p_1$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p_1}$ и проходящую через середину $(p_0 + p_1)/2$ отрезка $[p_0, p_1]$. Эта гиперплоскость называется *срединным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_1]$. Равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений $(\overline{x p_0}, \overline{x p_0}) = (\overline{x p_1}, \overline{x p_1})$, т. е. равенству

$$(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x),$$

где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки $O \in \mathbb{A}^n$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем $(p_0, p_0) - 2(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2(p_1, x)$ или, что то же самое,

$$2(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0). \quad (11-3)$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0p_1} = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, ибо последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1 .

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (11-3).

¹См. [предл. 3.1](#) и [опр. 3.2](#) на стр. 35.

11.2. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов евклидова пространства V

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k) \quad (11-4)$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений — матрицу

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, w_j)) \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R}), \quad (11-5)$$

в i -й строке и j -м столбце которой находится скалярное произведение (u_i, w_j) . Матрица (11-5) называется *матрицей Грама* наборов векторов (11-4). Если воспринимать эти наборы векторов как матрицы с элементами из V , а под произведением векторов $a, b \in V$ понимать их скалярное произведение $ab \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$, то матрица Грама будет описываться равенством

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ это строка из векторов, а \mathbf{u}^t — столбец, транспонированный к строке $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Если наборы векторов \mathbf{u} и \mathbf{w} линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ и $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{e} \cdot C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{f} \cdot C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$, где $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{r \times m}(\mathbb{R})$ и $C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} \in \text{Mat}_{s \times k}(\mathbb{R})$ некие матрицы, то матрица Грама $G_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$ пересчитывается через матрицу Грама $G_{\mathbf{e}\mathbf{f}}$ по формуле

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}. \quad (11-6)$$

При $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора u_1, \dots, u_m . В этом случае обозначение $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ сокращается до $G_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, u_j)) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$, а правило преобразования (11-7) приобретает вид

$$G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}. \quad (11-7)$$

Определитель $\Gamma_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \det G_{\mathbf{u}}$ называется *определителем Грама* набора векторов \mathbf{u} . Ортонормальность набора векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$ означает, что его матрица Грама $G_{\mathbf{e}} = E$, и в этом случае определитель Грама $\Gamma_{\mathbf{e}} = \det E = 1$.

Предложение 11.2

Для любого набора векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ выполняется неравенство $\Gamma_{\mathbf{u}} \geq 0$, которое обращается в равенство если и только если этот набор линейно зависим. Если набор \mathbf{u} линейно независим, а набор векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ составляет ортонормальный базис в линейной оболочке $\text{span}(u_1, \dots, u_m)$, то $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$, где матрица $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ составлена из столбцов координат векторов u_j в ортонормальном базисе \mathbf{e} .

Доказательство. Если $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i , то скалярно умножая это равенство на вектор u_ν , мы получаем при каждом ν равенство

$$\lambda_1 (u_\nu, u_1) + \lambda_2 (u_\nu, u_2) + \dots + \lambda_m (u_\nu, u_m) = 0,$$

означающее, что столбцы матрицы Грама $G_{\mathbf{u}} = ((u_i, u_j))$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, откуда $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det G_{\mathbf{u}} = 0$. Если же векторы u_1, \dots, u_m линейно независимы, то их линейная оболочка m -мерна, и по предл. 11.1 на стр. 132 в ней имеется ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$. Тогда $G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t C_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ согласно формуле (11-7), и $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} > 0$, т. к. матрица перехода $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ обратима¹ и её определитель ненулевой². \square

¹См. предл. 5.1 на стр. 65.

²См. сл. 8.4 на стр. 104.

11.2.1. Евклидов объём и ориентация. Зафиксируем в евклидовом пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и рассмотрим форму объёма $\omega_{\mathbf{e}}$, принимающую на этом базисе значение 1. Тогда квадрат объёма любого другого базиса $\mathbf{u} = \mathbf{e}C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ по предл. 11.2 равен определителю Грама этого базиса:

$$\omega_{\mathbf{e}}^2(\mathbf{u}) = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = \Gamma_{\mathbf{u}}. \quad (11-8)$$

В частности, квадрат объёма любого ортонормального базиса \mathbf{u} равен 1. Мы заключаем, что матрица перехода $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ между любыми двумя ортонормальными базисами \mathbf{e} и \mathbf{u} евклидова пространства V имеет определитель $\det C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = \pm 1$. Ортонормальные базисы \mathbf{e} и \mathbf{u} называются *одинаково ориентированными*, если $\det C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = +1$, и *противоположно ориентированными*, если $\det C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = -1$. Обратите внимание, что любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет.

Из сказанного вытекает, что все ортонормальные базисы евклидова пространства V имеют одинаковый по абсолютной величине объём при любом выборе формы объёма на V , и что на пространстве V имеются ровно две формы объёма, принимающие на всех ортонормальных базисах значения ± 1 . Эти две формы объёма отличаются друг от друга знаком, и выбор одной из них в качестве стандартной формы объёма на V называется *выбором ориентации* евклидова пространства V . Ориентация координатного пространства \mathbb{R}^n , принимающая на стандартном базисе значение $+1$, называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы v_1, \dots, v_n , вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* неориентированного параллелепипеда. Согласно формуле (11-8), квадрат евклидова объёма равен определителю Грама. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_1, \dots, v_n)}} = \sqrt{\det(v_i, v_j)}. \quad (11-9)$$

11.3. Евклидова двойственность. С каждым вектором v евклидова пространства V связан линейный функционал $g_v : V \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto (u, v)$, скалярного умножения на этот вектор. Сопоставление вектору $v \in V$ линейного функционала g_v задаёт линейное отображение

$$G_V : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto g_v, \quad (11-10)$$

которое называется *евклидовой корреляцией*.

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Убедитесь в линейности функционала g_v и отображения G_V .

Так как $G_V(v) = (v, v) \neq 0$ для любого $v \neq 0$, ковектор $g_v \neq 0$ при $v \neq 0$. Поэтому отображение (11-10) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Таким образом, любой линейный функционал на евклидовом векторном пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Убедитесь, что матрица отображения G_V в произвольном базисе \mathbf{v} пространства V и двойственном ему базисе \mathbf{v}^* пространства V^* совпадает с матрицей Грама $G_{\mathbf{v}}$ базиса \mathbf{v} .

11.3.1. Евклидово двойственный базис. Для любого базиса $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ в евклидовом пространстве V , прообразы $u_1^\times, \dots, u_n^\times \in V$ координатных функционалов $u_1^*, \dots, u_n^* \in V^*$ при изоморфизме (11-10) образуют в пространстве V базис, именуемый *евклидово двойственным* к базису \mathbf{u} и обозначаемый $\mathbf{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$. По определению, векторы этого базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (11-11)$$

На матричном языке эти соотношения означают, что матрица Грамаформ. (11-5) на стр. 134 $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = \mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = E$. Согласно форм. (11-7) на стр. 134 матрица $C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, линейно выражающая базис \mathbf{u}^\times через базис \mathbf{u} по формуле $\mathbf{u}^\times = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, удовлетворяет равенству $E = G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = G_{\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, т. е. обратна к матрице Грама базиса \mathbf{u} . Тем самым,

$$(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \cdot G_{\mathbf{u}}^{-1}. \quad (11-12)$$

Ортонормальность базиса равносильна тому, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Убедитесь, что $u_i^{\times\times} = u_i$.

По определению двойственного базиса¹, каждый вектор $v \in V$ раскладывается по любому базису u_1, \dots, u_n с коэффициентами, равными скалярным произведениям этого вектора с соответствующими векторами двойственного базиса:

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times), \quad (11-13)$$

в чём легко удостовериться и непосредственно, скалярно умножив обе части этого равенства на u_i^\times для каждого i .

11.3.2. Ортогоналы. Прообраз аннулятора $\text{Ann}(U) \subset V^*$ данного подпространства $U \subset V$ при изоморфизме (11-10) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к U . По сл. 7.1 на стр. 90

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U \quad (11-14)$$

Из сл. 7.2 на стр. 90 и теор. 7.1 на стр. 90 вытекает, что соответствие $U \leftrightarrow U^\perp$ задаёт оборачивающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в V , и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств $U, W \subset V$ выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp. \quad (11-15)$$

¹См. п° 7.1.1 на стр. 86.

11.4. Ортогональное проектирование, расстояния и углы. Так как $(u, u) = 0$ только для $u = 0$, подпространства U и U^\perp трансверсальны и, следовательно, дополняют друг друга в силу соотношения (11-14). Таким образом, $V = U \oplus U^\perp$, т. е. каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^\perp}, \quad \text{где } v_U \in U, v_{U^\perp} \in U^\perp. \quad (11-16)$$

Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ этого разложения называются, соответственно *ортогональной проекцией* вектора v на U и его *нормальной составляющей* относительно U . Сопоставление каждому вектору $v \in V$ его ортогональной проекции на U задаёт линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \rightarrow U, \quad v = v_U + v_{U^\perp} \mapsto v_U,$$

которое называется *ортогональным проектированием* V на U .

Предложение 11.3

Ортогональная проекция $v_U \in U$ произвольного вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$ однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

$$1) v - v_U \in U^\perp \quad 2) \forall u \in U \quad (u, v) = (u, v_U) \quad 3) \forall u \in U \quad u \neq v_U \Rightarrow |v - u| > |v - v_U|$$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_i u_i \cdot (v, u_i^\times), \quad (11-17)$$

где u_1, \dots, u_m и $u_1^\times, \dots, u_m^\times$ — произвольные евклидово двойственные базисы в U .

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы v_U и $v - v_U$ являются компонентами вектора v в прямом разложении $V = U \oplus U^\perp$. Поскольку для любого вектора $u = v_U + w \in U$, где $w \in U$ отличен от нуля, выполняется строгое неравенство $(v - u, v - u) = (v_{U^\perp} - w, v_{U^\perp} - w) = (v_{U^\perp}, v_{U^\perp}) + (w, w) > (v_{U^\perp}, v_{U^\perp})$, ортогональная проекция v_U вектора v на подпространство U обладает свойством (3). А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидным образом единствен, это свойство равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор v_U , определённый по формуле (11-17), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по $u \in U$, достаточно убедиться, что оно выполняется для базисных векторов $u = u_1^\times, \dots, u_m^\times$, что очевидно: $(v_U, u_i^\times) = \sum_j (u_j, u_i^\times) \cdot (v, u_j^\times) = (v, u_i^\times)$ для каждого v . \square

Следствие 11.2

В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ для любого непустого аффинного подпространства $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$ и любой точки $a \notin \Pi$ существует единственная точка $a_\Pi \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

- 1) вектор $\overline{aa_\Pi}$ перпендикулярен любому вектору \overline{pq} с $p, q \in \Pi$
- 2) $|aq| > |aa_\Pi|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от a_Π .

Доказательство. Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in \mathbb{A}(V)$ с радиус-векторами $\overline{oa} \in V$. При этом аффинное подпространство Π превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in \mathbb{A}$ сопоставится её радиус вектор $v = \overline{oa} \in V$. Остаётся применить к ним [предл. 11.3](#). \square

11.4.1. Расстояние до подпространства. Точка $a_\Pi \in \Pi$ из сл. 11.2 называется *ортогональной проекцией* точки a на аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}(V)$. Длина $|a - a_\Pi|$ называется *расстоянием* от точки a до подпространства Π . По свойству (1) из предл. 11.3 это расстояние равно длине $|\overline{qp}_{U^\perp}|$ ортогональной проекции вектора \overline{qp} , где $q \in \Pi$ — любая точка, на ортогональное дополнение U^\perp к направляющему векторному пространству $U \subset V$ аффинного подпространства Π .

Пример 11.3 (расстояние от точки до гиперплоскости)

Направляющим векторным пространством гиперплоскости Π с уравнением¹ $(a, x) = d$ является ортогонал a^\perp к вектору a . Расстояние от произвольно заданной точки p до гиперплоскости Π равно расстоянию между их ортогональными проекциями на одномерное подпространство, порождённое вектором a . Точка p проецируется в вектор $a \cdot (a, p)/(a, a)$, гиперплоскость Π — в вектор $a \cdot (x, p)/(a, a) = a \cdot d/(a, a)$. Разность между ними имеет длину

$$|(a, p) - d| \cdot |a|/(a, a) = |(a, p) - d|/|a|.$$

Пример 11.4 (евклидов объём через площадь основания и высоту)

Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор $\mathbf{w} = (v, u_1, \dots, u_n)$ из $n + 1$ векторов и обозначим через U линейную оболочку его поднабора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, состоящего из последних n векторов. Вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = v_U + v_{U^\perp}$, где $v_U \in U$, а вектор v_{U^\perp} лежит в одномерном ортогональном дополнении U^\perp к подпространству U в линейной оболочке W набора векторов \mathbf{w} . Вектор v_{U^\perp} называется *высотой* параллелепипеда (v, u_1, \dots, u_n) , опущенной из вершины v на основание \mathbf{u} . Длина этой высоты равна расстоянию от вершины v до подпространства U или, что то же самое, длине ортогональной проекции v_{U^\perp} вектора v на U^\perp . Так как вектор v_U является линейной комбинацией векторов u_i , в координатах относительно любого ортонормального базиса в W ориентированный объём натянутого на векторы \mathbf{w} параллелепипеда равен

$$\det(v, u_1, \dots, u_n) = \det(v - v_U, u_1, \dots, u_n) = \det(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)}}.$$

Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца определителя Грама векторов $v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n$ является стоящий в левом верхнем углу квадрат $|v_{U^\perp}|^2$. Поэтому

$$\text{Vol}^2(v, u_1, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \Gamma_{(u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \text{Vol}^2(u_1, \dots, u_n).$$

Иначе говоря, $(n + 1)$ -мерный евклидов объём параллелепипеда \mathbf{w} равен произведению n -мерного евклидова объёма Vol_n основания \mathbf{u} на длину опущенной на него высоты:

$$\text{Vol}_{n+1}(v, u_1, \dots, u_n) = |v_{U^\perp}| \cdot \text{Vol}_n(u_1, \dots, u_n). \quad (11-18)$$

Пример 11.5 (расстояние между аффинными подпространствами)

Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$, ассоциированном с евклидовым векторным пространством V , аффинные подпространства $K = p + U$ и $L = q + W$, с направляющими векторными пространствами $U, W \subset V$. Пусть эти пространства не пересекаются, то есть² $\overline{pq} \notin U + W$. Для любых двух векторов $x = p + u \in K$ и $y = q + w \in L$ расстояние $|y - x| = |\overline{pq} - (w - u)|$

¹См. прим. 11.1 на стр. 133.

²См. предл. 4.4 на стр. 55.

достигает своего минимума по $u \in U$, $w \in W$ тогда и только тогда, когда вектор $w - u = \overline{p\vec{q}}_{U+W}$ является ортогональной проекцией вектора $\overline{p\vec{q}}$ на подпространство $U + W$ и этот минимум равен расстоянию между вектором $\overline{p\vec{q}}$ и подпространством $U + W$, т. е. длине ортогональной проекции $\overline{p\vec{q}}_{(U+W)^\perp}$ на подпространство $(U + W)^\perp$. Он называется *расстоянием* между аффинными подпространствами K , L и обозначается

$$|K, L| = |\overline{p\vec{q}}_{(U+W)^\perp}| \quad (11-19)$$

Если $K \cap L \neq \emptyset$, т. е. $\overline{p\vec{q}} \in U + W$, мы полагаем $|K, L| = 0$, что согласуется с равенством (11-19), так как $\overline{p\vec{q}}_{(U+W)^\perp} = 0$ в этом случае. Если векторы v_1, \dots, v_k составляют базис подпространства $U + W$, то вектор $\overline{p\vec{q}}_{(U+W)^\perp}$ является опущенной из вершины q высотой параллелепипеда, натянутого на векторы $\overline{p\vec{q}}, v_1, \dots, v_k$, и длину этой высоты можно вычислять при помощи формулы (11-18):

$$|K, L| = \frac{\text{Vol}_{k+1}(\overline{p\vec{q}}, v_1, \dots, v_k)}{\text{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\frac{\Gamma(\overline{p\vec{q}}, v_1, \dots, v_k)}{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}}, \quad (11-20)$$

где Vol_m означает m -мерный евклидов объём.

11.4.2. Угол между вектором и подпространством. Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве V векторное подпространство $U \subset V$ и вектор $v \in V$, не лежащий ни в U , ни в U^\perp . Тогда абсолютная величина ориентированного угла¹ $0 < |\angle(v, u)| < \pi/2$ между этим вектором и ненулевыми векторами $u \in U$ достигает своего минимума на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе u , равном ортогональной проекции v_U вектора v на подпространство U . В самом деле, наименьшему значению угла отвечает наибольшее значение его косинуса

$$\cos(\angle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|} = \frac{(v_U, u)}{|v| \cdot |u|} = (v_U / |v_U|, u / |u|) \cdot \frac{|v_U|}{|v|}$$

(второе равенство выполняется в силу свойства (2) из предл. 11.3 на стр. 137). Второй множитель не зависит от u , а первый в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца² не превосходит произведения длин $|v_U / |v_U|| \cdot |u / |u|| = 1$ и в точности равен этому произведению если и только если векторы v_U и u сонаправлены. Угол $\varphi \in [0, \pi/2]$, однозначно определяемый из равенства

$$\cos \varphi = |v_U| / |v|$$

называется *евклидовым углом* между ненулевым вектором v и подпространством U . При $v \in U$ и $v \in U^\perp$ эта формула даёт $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно, так как $v_U = v$ и $v_U = 0$ в этих случаях. Обратите внимание, что возникающие в этих двух крайних случаях углы по-прежнему являются минимальными среди углов между вектором v и ненулевыми векторами $u \in U$.

Так как $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin \varphi$, евклидов угол φ между вектором v и подпространством U также можно вычислять при помощи форм. (11-18) на стр. 138:

$$\sin \varphi = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\sqrt{\Gamma(v, u_1, \dots, u_k)}}{|v| \sqrt{\Gamma(u_1, \dots, u_k)}}, \quad (11-21)$$

где u_1, \dots, u_k — произвольный базис подпространства U .

¹См. 3-9 на стр. 39.

²См. формулу (3-4) на стр. 35.

11.5. Векторные произведения. Зафиксируем в n -мерном евклидовом векторном пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и условимся записывать векторы $v \in V$ строками их координат в этом базисе. Сопоставим каждому набору из $n - 1$ векторов $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ матрицу A размера $(n - 1) \times n$, по строкам которой записаны координаты этих векторов в базисе \mathbf{e} , и назовём *векторным произведением* векторов v_1, \dots, v_{n-1} вектор

$$[v_1, \dots, v_{n-1}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n A_i e_i = (A_1, \dots, A_n), \quad (11-22)$$

i -я координата A_i которого равна взятому со знаком $(-1)^{i-1}$ определителю дополнительной к i -тому столбцу $(n - 1) \times (n - 1)$ -подматрицы в A , точно так же, как это было во втором правиле Крамера из н° 8.4.3 на стр. 109. Векторное произведение замечательно тем, что для любого вектора $u \in V$ выполняется равенство

$$\omega_{\mathbf{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = (u, [v_1, \dots, v_{n-1}]), \quad (11-23)$$

где $\omega_{\mathbf{e}}$ — единственная форма ориентированного объёма на V , принимающая на ортонормальном базисе \mathbf{e} значение 1.

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Докажите соотношение (11-23).

Иначе говоря, вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является прообразом линейного функционала

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \omega_{\mathbf{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

при изоморфизме $V \simeq V^*$ из форм. (11-10) на стр. 135, сопоставляющем вектору $v \in V$ ковектор $g_v : V \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto (u, v)$. В частности, векторное произведение не меняется при замене ортонормального базиса \mathbf{e} на любой другой ортонормальный базис той же ориентации¹ и меняет знак при выборе вместо \mathbf{e} ортонормального базиса противоположной ориентации. Геометрически, векторное произведение однозначно определяется следующими своими свойствами.

Предложение 11.4

Вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ перпендикулярен векторам v_1, \dots, v_{n-1} , и его длина равна евклидову объёму $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_{n-1} . Если эта длина ненулевая, то направление вектора $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ таково, что матрица перехода от базиса

$$[v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}$$

к базису \mathbf{e} имеет положительный определитель.

Доказательство. Подставляя в формулу (11-23) вектор $u = v_i$, получаем

$$(v_i, [v_1, \dots, v_{n-1}]) = \omega_{\mathbf{e}}(v_i, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0,$$

что доказывает первое утверждение. Подставляя $u = [v_1, \dots, v_{n-1}]$, получаем

$$\omega_{\mathbf{e}}([v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}) = |[v_1, \dots, v_{n-1}]|^2 \geq 0.$$

В силу первого утверждения вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является высотой параллелепипеда, объём которого стоит в левой части последней формулы. Согласно прим. 11.4 этот объём равен произведению длины $|[v_1, \dots, v_{n-1}]|$ на евклидов объём $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_{n-1} . Отсюда вытекают второе и третье утверждения. \square

¹См. н° 11.2.1 на стр. 135.

Следствие 11.3

Векторы $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы если и только если $[v_1, \dots, v_{n-1}] = 0$. \square

Пример 11.6 (расстояние между подпространствами, продолжение прим. 11.5)

Формулу из прим. 11.5 для минимального расстояния между непересекающимися аффинными подпространствами $p+U$ и $q+W$ в евклидовом аффинном пространстве $A(V)$ можно переписать как

$$\frac{\text{Vol}_{k+1}(\overline{qp}, e_1, \dots, e_k)}{\text{Vol}_k(e_1, \dots, e_k)} = \frac{|\det(\overline{qp}, e_1, \dots, e_k)|}{|[e_1, \dots, e_k]|},$$

где e_1, \dots, e_k — любой базис пространства $U+W$, а определитель в правой части — это определитель матрицы координат указанных в нём векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе пространства V .

Пример 11.7 (векторное произведение в \mathbb{R}^3)

Векторное произведение в \mathbb{R}^3 , заданное с помощью стандартного ортонормального базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$, представляет собою бинарную операцию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, w) \mapsto [u, w]$, и часто обозначается¹ $u \times w$. Формула (11-23) в этом случае утверждает, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

равен скалярному произведению вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ с вектором

$$\begin{aligned} [b, c] &\stackrel{\text{def}}{=} (b_2c_3 - b_3c_2, -b_1c_3 + b_3c_1, b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (11-24)$$

в чём несложно убедиться, раскладывая по первому столбцу определитель

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1) = (a, [b, c]).$$

Так как $(b, [b, c]) = \det(b, b, c) = 0$ и $(c, [b, c]) = \det(c, b, c) = 0$, вектор $[b, c]$ перпендикулярен векторам b и c , а квадрат его длины $([b, c], [b, c]) = \text{Vol}_3([b, c], b, c) = |[b, c]| \cdot \text{Vol}_2(b, c)$, откуда $|[b, c]| = \text{Vol}_2(b, c)$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.7. Убедитесь, что векторное произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ кососимметрично, т. е. $v \times v = 0$ для всех v , и не ассоциативно, но удовлетворяет правилу Лебница²

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.8. Докажите для векторных произведений в \mathbb{R}^3 равенства

а) $[a, [b, c]] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b)$ б) $[a, b], [a, c] = a \cdot \det(a, b, c)$

в) $([a, b], [c, d]) = \det \begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$

¹В английской литературе векторное произведение даже и называется *cross-product*.

²Которое часто записывают в виде $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ и называют *тождеством Якоби*.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 11.4. Значение линейной формы g_{v_j} на базисном векторе v_i равно (v_i, v_j) , т. е. столбец координат этой формы в двойственном базисе v^* состоит из произведений (v_i, v_j) .

Упр. 11.6. Запишите все векторы строками их координат в базисе e и разложите

$$\det(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(u, v_1, \dots, v_{n-1})$$

по первой строке u .