§9. Вариации на тему определителей

9.1. Объём и барицентрические координаты. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задан набор из $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих в одной гиперплоскости. Поместим это пространство внутрь $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\Bbbk \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1,0) + V$, проходящей через точку $(1,0) \in \Bbbk \oplus V$ и имеющей направляющее векторное подпространство $V \subset \Bbbk \oplus V$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}$ аффинный координатный репер с началом в точке $o = (0,0) \in \Bbbk \oplus V$ и базисными векторами

$$e_0 = \overrightarrow{op}_0\,,\ e_1 = \overrightarrow{op}_1\,,\ e_2 = \overrightarrow{op}_2\,,\ \dots\,,\ e_n = \overrightarrow{op}_n\,.$$

Гиперплоскость $\Pi = \mathbb{A}^n$ проходит через концы этих базисных векторов и задаётся уравнением

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\,.$$

Поэтому координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \Pi$ можно воспринимать как такой набор весов с суммой 1, что центр тяжести точек p_i, взятых с весами x_i, оказывается в точке a, ибо

$$x_0\overrightarrow{ap}_0 + x_1\overrightarrow{ap}_1 + \dots + x_n\overrightarrow{ap}_n = \overrightarrow{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_i e_i = 0\,.$$

Этот набор весов называют *барицентрическими координатами* точки a относительно точек p_i. Таким образом мы получаем биекцию между точками $a \in \mathbb{A}^n$ и наборами весов $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ с суммой $\sum x_i = 1$. Основным результатом этого раздела является

Предложение 9.1

Барицентрические координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \mathbb{A}^n$ относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ равны отношениям объёмов n-мерных ориентированных параллелепипедов, натянутых на векторы, ведущие из точки a во все точки p_ν кроме p_i, и на векторы, идущие из точки p_i во все остальные точки p_ν:

$$x_i = \frac{\det\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right)}{\det\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)}\,. \tag{9-1}$$

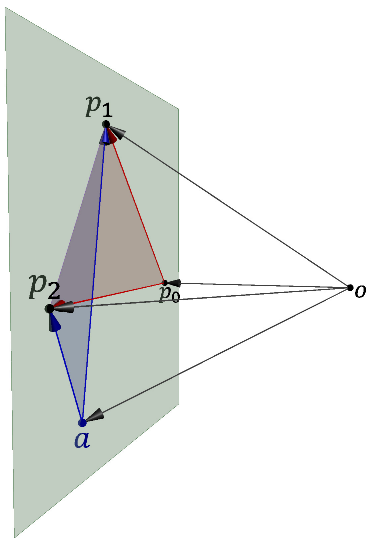
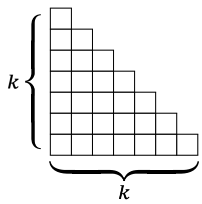


Рис. 9◇1. Барицентрические координаты как отношения объёмов

9.1.1. Неформальный геометрический комментарий. Координата x_i вектора $\overrightarrow{oa}$ в базисе из векторов $e_i = \overrightarrow{op}_i$ вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{op}_0, \dots, \overrightarrow{op}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{op}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{op}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{op}_0, \dots, \overrightarrow{op}_n\right)}. \tag{9-2}$$

Над полем $\mathbb{R}$ стоящие в числителе и знаменателе этой формулы объёмы параллелепипедов можно заменить на объёмы пирамид, отсекаемых от этих параллелепипедов гиперплоскостью Π, см. рис. 9◊1. Эти $(n+1)$-мерные пирамиды имеют общую вершину o, а их основаниями служат лежащие в гиперплоскости Π n-мерные пирамиды с вершинами, соответственно, в точках $p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n$ и в точках $p_0, \dots, p_n$. В самом деле, отношение объёма пирамиды, натянутой на линейно независимые векторы $v_1, \dots, v_n$ к объёму параллелепипеда, натянутого на те же векторы, зависит только от размерности и вычисляется следующим наглядным способом. Определим «n-мерную ступенчатую пирамиду высоты k» как стопку n-мерных кубиков со стороной 1, лежащих в положительном гипероктанте пространства $\mathbb{R}^n$ на плоскости $x_n = 0$ так, что днища кубиков самого нижнего слоя образуют $(n-1)$-мерную ступенчатую пирамиду высоты k в плоскости $x_n = 0$, днища кубиков следующего, второго снизу этажа образуют $(n-1)$-мерную ступенчатую пирамиду высоты $k-1$ в плоскости $x_n = 1$ и т. д. вплоть до единственного самого верхнего кубика, лежащего на плоскости $x_n = k-1$. Обозначим объём такой пирамиды[1] через Π_k^n. Например, при $n = 2$ двумерная ступенчатая пирамида высоты k имеет вид



и состоит из $\Pi_k^2 = k(k+1)/2$ квадратиков[2]. Трёхмерная пирамида высоты k имеет на нижнем этаже Π_k^2 кубиков, надстраивающих предыдущую картинку вверх вдоль третьей координатной оси, её второй этаж состоит из Π_{k-1}^2 кубиков, надстраивающих вверх такую же двумерную пирамидку высоты $k-1$ и т. д. Таким образом, трёхмерная пирамида состоит из

$$\Pi_k^3 = \Pi_1^2 + \dots + \Pi_k^2 = k(k+1)(k+2)/6$$

трёхмерных кубиков.

Упражнение 9.1 (по анализу и комбинаторике). Убедитесь, что

$$\Pi_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

и выведите отсюда, что объём вещественного n-мерного параллелепипеда в $n!$ раз больше объёма n-мерной пирамиды с вершинами в какой-нибудь вершине этого параллелепипеда и всех вершинах, соединённые с нею ребром.

Например, площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0, \overrightarrow{op}_1$, вдвое больше площади треугольника op_1p_2, а объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0, \overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_2$, вшестеро больше объёма тетраэдра $op_1p_2p_3$.

[1] Т. е. число кубиков, из которых она состоит.

[2] По этой причине число $\Pi_k^2 = \binom{k+1}{2}$ часто называют *k-тым треугольным числом* и обозначают T_k.

Поэтому над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики нуль уместно называть величину

$$\omega(\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n)/n!$$

объёмом ориентированного n-мерного симплекса $[op_1 \dots p_n]$ с вершинами в точках $o, p_1, \dots, p_n$. Такой симплекс представляет собою пирамиду, которая отрезается от натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n$ параллелограмма с вершиной в точке o гиперплоскостью, проходящей через все соединённые с o ребром вершины $p_1, \dots, p_n$.

Сформулированное выше предл. 9.1 вытекает из формулы (9-2) в силу того, что объёмы $(n+1)$-мерных пирамид с общей вершиной и лежащими в одной n-мерной гиперплоскости основаниями относятся точно также, как n-мерные объёмы этих оснований. И хотя идущее ниже доказательство предл. 9.1 не будет использовать объёмы пирамид, описанную только что геометрическую интерпретацию полезно держать в голове.

Лемма 9.1
Для любого k-мерного подпространства U в m-мерном векторном пространстве W и таких векторов $u_1, u_2, \dots, u_k,\ v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_{m-k} \in W$, что векторы

$$w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ u_1, u_2, \dots, u_k$$

составляют базис пространства W, выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)}, \tag{9-3}$$

в котором ω_k и ω_m это любые ненулевые формы k-мерного и m-мерного объёмов в пространствах U и W соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы и составляют базис в U. Согласно предл. 8.4 на стр. 105,

$$\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0\,.$$

Определим на подпространстве U ещё одну форму объёма ω' равенством

$$\omega'(v_1', v_2', \dots, v_k') \overset{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ v_1', v_2', \dots, v_k')$$

для любых векторов $v_1', v_2', \dots, v_k' \in U$.

Упражнение 9.2. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на U.

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе $u_1, u_2, \dots, u_k$,

$$\frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega'(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega'(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k},\ u_1, u_2, \dots, u_k)}\,.$$

□

9.1.2. Доказательство предл. 9.1. Для каждого $\nu \neq i$ подставим в числитель дроби из формулы (9-2) разложения $\overrightarrow{op_\nu} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ap_\nu}$ и, пользуясь тем, что объём полилинеен и зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем этот числитель к виду

$$\omega\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right).$$

Аналогично, подставляя в знаменатель $\overrightarrow{op_\nu} = \overrightarrow{op_i} + \overrightarrow{p_ip_\nu}$ для всех $\nu \neq i$, преобразуем его в

$$\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{op_i}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right).$$

Так как $\overrightarrow{op_i}$ отличается от $\overrightarrow{oa}$ на линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{p_ip_\nu}$, знаменатель равен

$$\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right),$$

$$\text{а} \quad x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)}.$$

Остаётся применить лем. 9.1 для $k = n$, $U = V$, $m = n+1$, $W = \Bbbk \oplus V$, $w_1 = \overrightarrow{oa}$, $u_\nu = \overrightarrow{p_ip_\nu}$ и $v_\nu = \overrightarrow{ap}_\nu$, где ν пробегает отличные от i значения от 0 до n.

9.2. Грассмановы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ *грассмановых многочленов* от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные ξ_i не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,, \tag{9-4}$$

где символ «$\wedge$» обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, каждый грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Для каждого набора $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ строго возрастающих слева направо номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ имеется грассманов моном

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\,, \tag{9-5}$$

знак которого при перестановке $g \in S_m$ переменных $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}$ меняется по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\,. \tag{9-6}$$

Мономы (9-5), занумерованные всевозможными подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, составляют базис алгебры $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ как векторного пространства над $\Bbbk$ и перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \varnothing \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \varnothing \end{cases} \tag{9-7}$$

где $\operatorname{sgn}(I, J) = \pm 1$ обозначает знак *тасующей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k$, в котором $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

[1]Если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

Если наборы $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus I$ дополнительны друг к другу, то согласно упр. 8.5 на стр. 102 этот знак $\operatorname{sgn}(I, J) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+m(m+1)/2}$.

Единственный моном старшей степени $\xi_{\text{top}} \overset{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$ аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (9-5), отвечающие всевозможным k-элементным подмножествам I. Размерность всей грассмановой алгебры $\dim \Bbbk \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = 2^n$.

Два грассмановых монома степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$\left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\right) \wedge \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}\right) = \\ = (-1)^{km} \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}\right) \wedge \left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\right),$$

ибо при переносе каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i происходит m транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов η и ω

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta\,. \tag{9-8}$$

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 9.3. Опишите *центр*[1] грассмановой алгебры.

9.2.1. Грассманова алгебра векторного пространства. Если в векторном пространстве V выбран базис $e_1, \dots, e_n$, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ от базисных векторов пространства V обозначается ΛV и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства V. Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством V и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени k является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ из k произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени k через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры ΛV в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V\,,$$

где $\Lambda^0 V \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

9.2.2. Линейные замены переменных. Если векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ по формуле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\,C$, где $C = \left(c_{ij}\right) \in \operatorname{Mat}_{k \times \ell}(\Bbbk)$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m} = \left(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\right) \wedge \left(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\right) = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g \in S_m} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \cdots c_{i_{g(n)} j_n} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,,$$

[1] Т. е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ из m возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрице выражающей векторы $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$.

В частности, если наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства V, то базисные грассмановы мономы e_J пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы f_I при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ-тый минор $\left(c_{IJ}\right)$ матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$, выражающей $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{f}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{\boldsymbol{fe}}$ и называется m-той *внешней степенью* матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$.

9.3. Соотношения Лапласа. Для набора возрастающих чисел $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ положим $\deg J \overset{\text{def}}{=} m$, $|J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$ и условимся обозначать через

$$\hat{J} = \left(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$$

дополнительный к J набор из $\deg \hat{J} = n - m$ возрастающих номеров.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, столбцы которой обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и будем воспринимать как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$. Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису $e_1, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$. Для любых двух мультииндексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ грассмановы мономы $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m}$ и $\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{\hat{i}_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\hat{i}_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$ и перемножаются по форм. (9-7) на стр. 114, которая с учётом упр. 8.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{9-9}$$

Выражая мономы α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (9-9) через базисные мономы e_K, получаем

$$\left(\sum_K e_K a_{KJ}\right) \wedge \left(\sum_L e_L a_{L\hat{I}}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

где K пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Так как правая часть (9-9) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{9-10}$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (9-10) даёт формулу для вычисления определителя[1]

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \tag{9-11}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n-мерного параллелепипеда через объёмы его m-мерных и $(n - m)$-мерных граней.

через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n-m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор a_{KJ}. Произведение $(-1)^{|K|+|J|}a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ}$.

Упражнение 9.4. Для любых матриц $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \mathrm{Mat}_m(\Bbbk)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ покажите, что $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

При $I \neq J$ соотношение (9-10) имеет вид $\sum_K a_{KJ}\hat{a}_{IK} = 0$ и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части формулы (9-11) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{IK}$ к минорам a_{IK}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m}\hat{A}^t = \det A \cdot E \tag{9-12}$$

на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, в котором (IJ)-тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|}a_{\hat{J}\hat{I}}\,.$$

Упражнение 9.5. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK}\hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{9-13}$$

Пример 9.1 (соотношения Плюккера)
Рассмотрим 2×4 матрицу $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ и обозначим через A_{ij} её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Шесть чисел A_{ij} не могут принимать произвольные значения. Они связаны квадратичным *соотношением Плюккера*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0\,, \tag{9-14}$$

которое получается при раскрытии нулевого определителя 4×4 матрицы $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ по первым двум строкам.

Упражнение 9.6. Убедитесь в этом и для любых шести чисел A_{ij}, удовлетворяющих соотношению (9-14), явно предъявите 2×4 матрицу A с 2×2 минорами A_{ij}.

Пример 9.2 (определитель пучка матриц)
Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB). Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет

вид t_0A+t_1B, где $t_0, t_1 \in \Bbbk$, а её определитель $\det(t_0A+t_1B)$ является однородным многочленом степени n от t_0, t_1. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ}\hat{b}_{IJ}\,, \tag{9-15}$$

где суммирование идёт по всем k-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Для этого обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ столбцы матриц A и B, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1) \wedge (t_0a_2 + t_1b_2) \wedge \dots \wedge (t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n\,.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобках. Если обозначить номера этих k скобок через $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\Big(\sum_J e_J a_{JI}\Big) \wedge \Big(\sum_K e_K b_{K\hat{I}}\Big) = \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} \sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI} b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} b_{\hat{J}\hat{I}}\end{aligned}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0A + t_1B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (9-15). В обозначениях из (9-12) её можно переписать в виде

$$\det(t_0A + t_1B) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t\right) t_0^k t_1^{n-k}\,, \tag{9-16}$$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 9.1. Равенство $\Pi_k^n = \binom{n+k-1}{n}$ доказывается индукцией по n при помощи суммирования по треугольнику Паскаля. Предел отношения $\binom{n+k-1}{n}/k^n$ при фиксированной размерности n и $k \to \infty$ равен $1/n!$.

Упр. 9.3. При чётном n центр алгебры $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 9.4. Разложите определитель по первым n столбцам.

Упр. 9.5. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 9.6. Если $A_{12} \neq 0$, то можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix} .$$

Равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно квадратичному соотношению Плюккера[1].

[1]См. формулу (9-14) на стр. 117.