§8. Объёмы и определители

8.1. Объём n-мерного ориентированного параллелепипеда. Ненулевая функция от n аргументов из n-мерного векторного векторного пространства V

$$\omega : V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk$$

называется *объёмом ориентированного параллелепипеда* или *формой n-мерного объёма*, если она обладает теми же двумя свойствами, что и форма площади из n° 1.3 на стр. 11, а именно[1]:

1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$

2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, v, \dots).$$

На геометрическом языке эти свойства, как и раньше, означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, как на рис. 8◇1, умножается на λ при умножении любого ребра на λ, и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n-1)$-мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на рис. 8◇2).

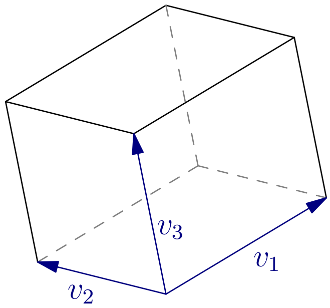

Рис. 8◇1. Параллелепипед.

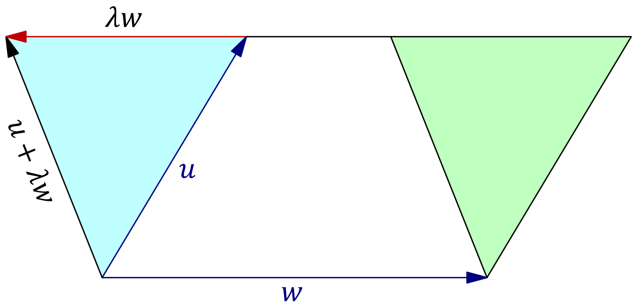

Рис. 8◇2. Параллельный перекос.

Дословно также, как лем. 1.3 на стр. 12, доказывается

Лемма 8.1

Каждая форма n-мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

1) если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$; в частности, форма ω кососимметрична, т. е. обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают: $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$

2) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, u, \dots) + \mu\, \omega(\dots, w, \dots) \tag{8-1}$$

[1] Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

3) форма ω знакопеременна[1]: $\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$.

Доказательство. Если один из векторов линейно выражается через остальные, скажем,

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n\,,$$

то

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \\ = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0\,.$$

Это доказывает первое свойство. Второе свойство очевидно выполняется, когда оба набора аргументов в правой части (8-1) линейно зависимы, так как в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части равенства (8-1) зануляются по свойству (1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства V. Тогда $w = \varrho u + v$, где v является линейной комбинацией остальных $(n-1)$ аргументов, и левая часть (8-1) равна

$$\omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)\cdot u + \mu v, \dots) = (\lambda + \mu\varrho)\cdot \omega(\dots, u, \dots)\,,$$

а второе слагаемое правой части переписывается как

$$\mu\omega(\dots, \varrho u + v, \dots) = \mu\varrho \cdot \omega(\dots, u, \dots)\,.$$

Тем самым, правая часть совпадает с левой. Знакопеременность следует из кососимметричности и линенйости:

$$0 = \omega(\dots, (u+w), \dots, (u+w), \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots)\,.$$

□

8.2. Пространство кососимметричных n-линейных форм. Функция от k векторов

$$V \times \dots \times V \to \Bbbk\,,$$

линейная по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных, называется *k-линейной формой* на векторном пространстве V.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что k-линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососсимметричные формы составляют в нём векторное подпространство.

Теорема 8.1
Пространство n-линейных кососимметричных форм на n-мерном векторном пространстве V одномерно.

[1] Т. е. умножается на -1 при перестановке любых двух аргументов.

8.2.1. Начало доказательства теор. 8.1. Зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и рассмотрим произвольную n-линейную кососимметричную форму ω на V. Идея доказательства заключается в том, чтобы выразить значение $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ на произвольном наборе векторов через $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$, пользуясь линейностью и кососимметричностью. Пусть $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$, где $C = \left(c_{ij}\right)$ — матрица размера $n \times n$, в j-том столбце которой стоят координаты вектора v_j в базисе e, т. е.

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot c_{ij} \,.$$

Тогда в силу линейности формы ω по каждому из аргументов

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega\Big(\sum_{i_1} c_{i_1 1} e_{i_1} \,,\, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2} \,,\, \dots \,,\, \sum_{i_n} c_{i_n n} e_{i_n} \Big) =$$
$$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \,\cdots\, \cdot c_{i_n n} \cdot \omega\left(e_{i_1},\, e_{i_2},\, \dots,\, e_{i_n}\right) \,.$$

Так как при совпадении двух аргументов ω обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму дают только такие $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где каждое из чисел $1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$ встречается ровно один раз, т. е. всевозможные перестановки набора $(1,\ 2,\ \dots\ ,\ n)$.

8.2.2. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки. Каждую перестановку

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

чисел $(1,\ 2,\ \dots\ ,\ n)$ можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g : \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\} \xrightarrow{\sim} \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}\,, \quad i \mapsto g_i \,.$$

Иными словами, перестановки образуют группу всех биективных отображений множества

$$N = \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$$

в себя. Эта группа обозначается S_n и называется *n-той симметрической группой*. Скажем, что упорядоченная пара $i < j$ элементов множества N является *инверсной* для заданной перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ упорядоченных пар $i < j$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g.

Упражнение 8.2. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\operatorname{sgn}(g) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g. Перестановка g называется *чётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = -1$.

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i-го и j-го элементов.

Упражнение 8.3. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g, не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки g, т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.2
$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ и любой транспозиции σ_{ij}.

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= \big(g_1,\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g}_i,\ g_{i+1},\ \dots\ ,\ g_{j-1},\ \boldsymbol{g}_j,\ g_{j+1},\ \dots\ ,\ g_n\big) \\ g\sigma_{ij} &= \big(g_1,\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g}_j,\ g_{i+1},\ \dots\ ,\ g_{j-1},\ \boldsymbol{g}_i,\ g_{j+1},\ \dots\ ,\ g_n\big) \end{aligned} \tag{8-2}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j, стоящих на i-том и j-том местах перестановки g. В этих двух перестановках пара (i, j), а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. □

Следствие 8.1
Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m.

Доказательство. Тождественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. □

Упражнение 8.4. Убедитесь, что $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$, т. е. отображение $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

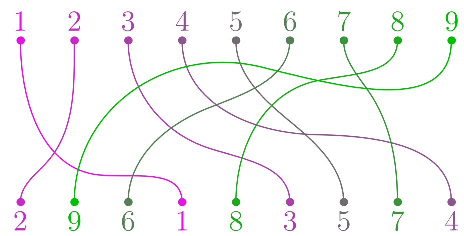

Рис. 8◇3. $\operatorname{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

Пример 8.1 (правило ниточек)
Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*[1]. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом,

[1]Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак явно заданной длинной перестановки — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Тем не менее, он оказывается полезен во некоторых вычислениях, с которыми мы столкнёмся далее.

как на рис. 8◇3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[1]. Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

Упражнение 8.5. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей перестановки* $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad \text{и} \quad (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

8.2.3. Завершение доказательства теор. 8.1. Так как при каждой транспозиции аргументов кососимметричная форма ω меняет свой знак, для любой перестановки $g \in S_n$ выполняется равенство $\omega(e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_n}) = \operatorname{sgn}(g)\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Поэтому вычисление из n° 8.2.1 завершается следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \ \cdots \ \cdot c_{i_n n} \cdot \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \\ &= \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \,. \end{aligned} \tag{8-3}$$

Так как последняя сумма зависит только от матрицы C, но не от формы ω, для любых двух n-линейных кососимметричных форм ω_1, ω_2 и любого набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ выполняется равенство

$$\frac{\omega_1(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, e_2, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ произвольно зафиксированный базис пространства V. Мы заключаем, что правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса, а левая — от выбора векторов v_i, т. е. формы ω_1 и ω_2 пропорциональны.

Для завершения доказательства теор. 8.1 остаётся убедиться, что при любом выборе ненулевой константы $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \Bbbk$ формула (8-3) действительно определяет ненулевую кососимметричную n-линейную форму на V, т. е. что сумма, стоящая в конце этой формулы, является кососимметричной функцией от столбцов матрицы C и линейна по каждому столбцу при фиксированных остальных. Это будет сделано в предл. 8.2 ниже.

8.3. Определители. Последняя сумма из формулы (8-3) обозначается

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \tag{8-4}$$

и называется *определителем* квадратной матрицы $C = \left(c_{ij}\right)$ размера $n \times n$. Правая часть равенства (8-4) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице C по n элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Множество клеток, в которых стоят выбранные элементы, является графиком биективного отображения $g : j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк. Выбранные n элементов перемножаются между собою и умножаются на знак перестановки g, которую они задают. Полученные таким образом $n!$ произведений складываются.

[1]Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

Пример 8.2
Определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{8-5}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} &= c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ &- c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}\,. \end{aligned} \tag{8-6}$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

Пример 8.3 (определитель треугольной матрицы)
Если матрица C верхнетреугольная[1], т. е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$, то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-4) будет произведение диагональных элементов матрицы C, отвечающее тождественной перестановке $g = \mathrm{Id}$. Таким образом, для верхнетреугольной матрицы C определитель $\det C = \prod_i c_{ii}$. В частности, $\det E = 1$.

Предложение 8.1
Для любой квадратной матрицы C выполняется равенство $\det C = \det C^t$.

Доказательство. Суммы (8-4), вычисляющие $\det C$ и $\det C^t$, состоят из одних и тех же произведений всевозможных n-ок элементов матрицы, являющихся графиками биекций $g : j \mapsto g_j$ между номерами столбцов и номерами строк, только в первой сумме отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком $\mathrm{sgn}(g)$, а во второй — со знаком $\mathrm{sgn}(g^{-1})$. Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если $g = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$, где σ_i — транспозиции, то $g^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$ в силу равенства $\sigma_i\sigma_i = \mathrm{Id}$. □

Предложение 8.2
Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-4): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если i-й столбец матрицы C совпадает с j-м, то в сумме (8-4) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, поскольку $\mathrm{sgn}(h) = -\mathrm{sgn}(g)$, а $c_{h_1 1}c_{h_2 2} \cdots c_{h_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j i} \cdots c_{g_i j} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_i i} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1}c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n}$. □

Следствие 8.2
Определитель $n \times n$-матрицы является n-линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

Доказательство. Это следует из предл. 8.2 и равенства $\det C = \det C^t$. □

[1] См. прим. 5.7 на стр. 71.

Следствие 8.3
На каждом n-мерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n-мерного объёма ω. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис V, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, линейно выражающихся через базис как $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det C \tag{8-7}$$

для любой формы объёма ω на V.

Доказательство. Из лем. 8.1 на стр. 97 вытекает, что всякая форма объёма n-линейна и кососимметрична. Наоборот, всякая n-линейная кососимметричная форма является формой объёма, так как свойства (1), (2) со стр. 97 очевидным образом вытекают из линейности и кососимметричности. □

8.3.1. Определитель линейного оператора. Зафиксируем на векторном пространстве V размерности n форму объёма ω. Для любого линейного оператора $F : V \to V$ форма

$$\omega_F(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega\left(Fv_1,\, Fv_2,\, \dots\,,\, Fv_n\right)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме ω. Коэффициент пропорциональности $\omega_F \,/\, \omega$ равен отношению значений этих форм на элементах произвольного базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V и не зависит от выбора базиса. Поскольку

$$\left(Fe_1,\, Fe_2,\, \dots\,,\, Fe_n\right) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot F_{\boldsymbol{e}}\,,$$

где $F_{\boldsymbol{e}}$ — матрица оператора F в базисе $\boldsymbol{e}$, коэффициент пропорциональности

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega\left(Fe_1,\, Fe_2,\, \dots\,,\, Fe_n\right)}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det F_{\boldsymbol{e}}}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \det F_{\boldsymbol{e}}\,.$$

Мы заключаем, что определитель $\det F_{\boldsymbol{e}}$ матрицы оператора не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}$, в котором пишется матрица, и при применении оператора F к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на $\det F_{\boldsymbol{e}}$. Определитель $\det F_{\boldsymbol{e}}$ называется *определителем линейного оператора* $F : V \to V$ и обозначается $\det F$.

Поскольку при последовательном выполнении операторов $G : V \to V$ и $F : V \to V$ объёмы параллелепипедов умножатся сначала на $\det(G)$, а потом на $\det(F)$, мы заключаем, что для любых двух линейных операторов $F, G : V \to V$ выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F)\det(G) \tag{8-8}$$

В частности, $\det(FG) = \det(GF)$.

Предложение 8.3
Линейный оператор $F : V \to V$ биективен если и только если $\det F \neq 0$.

Доказательство. Если оператор F биективен, то он обратим. Вычисляя определитель обеих частей в матричном равенстве $FF^{-1} = \mathrm{Id}$, получаем $\det F \det F^{-1} = 1$, откуда $\det F \neq 0$. Если оператор не биективен, то столбцы его матрицы $F_{\boldsymbol{e}}$ линейно зависимы по сл. 5.1 на стр. 65, откуда $\det F = \det F_{\boldsymbol{e}} = 0$. □

Следствие 8.4
Квадратная матрица A обратима если и только если $\det A \neq 0$. □

8.3.2. Специальная линейная группа. Из предыдущего вытекает, что операторы определителя 1 образуют в полной линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ подгруппу. Она обозначается $\mathrm{SL}(V)$ и называется *специальной линейной группой* пространства V. Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих ненулевую форму объёма на V, и это свойство не зависит от выбора формы объёма. Специальная линейная группа координатного пространства $\Bbbk^n$ состоит из матриц определителя 1 и обозначается $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \subset \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

8.3.3. Мультипликативность определителя. Формула (8-8) на матричном языке превращается в полиномиальное тождество. А именно, обозначим через $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от $2n^2$ независимых переменных a_{ij} и b_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и рассмотрим в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$, элементами которых являются эти переменные.

Упражнение 8.6. Покажите, что многочлен $f(x_1, \dots, x_m) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ над бесконечным полем $\Bbbk$ является нулём если и только если он принимает нулевое значение в каждой точке координатного аффинного пространства $\Bbbk^m$.

Следствие 8.5 (мультипликативность определителя)
В кольце $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ выполняется равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Доказательство. Поскольку поле $\mathbb{Q}$ бесконечно, многочлен $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$ является нулевым если и только если он принимает нулевое значение во всех точках аффинного пространства $\mathbb{Q}^{2n^2}$ с координатами a_{ij}, b_{ij}, т. е. тогда и только тогда, когда равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ выполняется для всех рациональных матриц A и B. Но для таких матриц оно превращается в равенство (8-8) для линейных операторов

$$F : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n \,,\; x \mapsto Ax \,, \quad \text{и} \quad G : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n \,,\; x \mapsto Bx \,,$$

имеющих в стандартном базисе координатного пространства $\mathbb{Q}^n$ матрицы A и B. □

8.4. Правила Крамера. Для векторов $v_1, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ обозначим через $\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения как записываются координаты — по строкам или по столбцам. Непосредственным обобщением лем. 1.2 на стр. 11 является

Предложение 8.4 (первое правило Крамера)
Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ образуют базис в $\Bbbk^n$ если и только если $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i-тая координата произвольного вектора $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \,\dots\,, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \,\dots\,, v_n\right)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)} \,. \tag{8-9}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ не образуют базис, то они линейно зависимы, и в этом случае $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$ по лем. 8.1 на стр. 97. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ образуют базис, то матрица со столбцами $v_1, \dots, v_n$ обратима и её определитель $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ по сл. 8.4. При этом каждый вектор $w \in \Bbbk^n$ обладает единственным разложением

$$w = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \,.$$

Применение к обеим частям этого равенства линейного функционала

$$V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \det\left(v_1,\,\dots\,,\,v_{i-1},\,u,\,v_{i+1},\,\dots\,,\,v_n\right)\,,$$

приводит к нужному равенству $\det\left(v_1,\dots,v_{i-1},w,v_{i+1},\dots,v_n\right) = x_i \cdot \det(v_1,v_2,\dots,v_n)$. □

Пример 8.4 (уравнение гиперплоскости)
Пусть n точек $p_1,\dots,p_n$ в аффинном координатном пространстве $\Bbbk^n$ не лежат в одном $(k-2)$-мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 4.5 на стр. 55 через них проходит единственная гиперплоскость. Точка x лежит в этой гиперплоскости если и только если вектор $\overrightarrow{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overrightarrow{p_n p}_1, \overrightarrow{p_n p}_2, \dots, \overrightarrow{p_n p}_{n-1}$, что равносильно равенству $\det\left(x - p_n,\,p_1 - p_n,\,p_2 - p_n,\dots\,,\,p_{n-1} - p_n\right) = 0$. В силу полилинейности определителя, это соотношение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x, которое можно переписать как

$$\det\left(x,\,p_1 - p_n,\,p_2 - p_n,\dots\,,\,p_{n-1} - p_n\right) = \det\left(p_n,\,p_1,\,p_2,\dots\,,\,p_{n-1}\right)\,.$$

Например, в трёхмерном аффинном координатном пространстве $\Bbbk^3$ плоскость $p + \lambda u + \mu v$, проходящая через точку p параллельно векторам u, w, задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x,u,v) = \det(p,u,v)$.

8.4.1. Присоединённая матрица. Для квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ обозначим через C_{ij} подматрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из C удалением i-й строки и j-го столбца. Число $(-1)^{i+j}\det C_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* к элементу c_{ij} матрицы C. Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^{\vee} = \left(c^{\vee}_{ij}\right)\,, \quad \text{где} \quad c^{\vee}_{ij} = (-1)^{i+j}\det C_{ji}\,,$$

называется *присоединённой*[1] к матрице C.

Обозначим через $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от n^2 независимых переменных c_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, а через $C = \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ матрицу, элементами которой являются эти переменные

Теорема 8.2
В кольце $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$C \cdot C^{\vee} = C \cdot C^{\vee} = \det(C) \cdot E\,. \tag{8-10}$$

Доказательство. Приравнивая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-10), мы получаем набор из n^2 равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных c_{ij}. Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из n^2 численных значений $c_{ij} \in \mathbb{R}$ из некоторого всюду плотного подмножества в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Упражнение 8.7 (по анализу). Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_m]$ множество $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}^m$.

[1] По-английски *adjunct*.

Таким образом, достаточно доказать равенство (8-10) для всех числовых матриц $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеющих $\det C \neq 0$, что мы и сделаем. Столбцы $v_1, \dots, v_n$ такой матрицы C образуют базис $\boldsymbol{v}$ координатного векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Стандартный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ выражается через него по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}\, C_{\boldsymbol{ve}}$. Матрица перехода $C_{\boldsymbol{ve}}$ обратна к матрице перехода $C_{\boldsymbol{ev}} = C$ и удовлетворяет соотношениям

$$C C_{\boldsymbol{ve}} = C_{\boldsymbol{ve}} C = E\,. \tag{8-11}$$

С другой стороны, согласно правилу Крамера i-й элемент j-го столбца матрицы $C_{\boldsymbol{ve}}$ равен

$$\frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det C}\,.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i-м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j-й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк:

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = (-1)^{i-1} \det\left(e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\right) =$$
$$= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся выкидыванием из написанной выше матрицы первой строки и первого столбца, что равносильно удалению j-той строки и i-того столбца из матрицы C. Таким образом, $C_{\boldsymbol{ve}} = C^{\vee} / \det C$, и равенства (8-11) превращаются в требуемые равенства (8-10). □

Следствие 8.6 (формула для обратной матрицы)
Если матрица C обратима, то $C^{-1} = C^{\vee} / \det C$. □

Пример 8.5
Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Следствие 8.7 (разложение определителя по i-й строке или i-у столбцу)
В кольце $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki} \,.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием (i, i)-тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-10). □

Пример 8.6
Раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} \left(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32} \right) - c_{21} \left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32} \right) + c_{31} \left(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} \right) \,.$$

что согласуется с прямым вычислением из прим. 8.2.

8.4.2. Тождество Гамильнотна – Кэли. Рассмотрим произвольное коммутативное кольцо K с единицей. Кольцо $n \times n$ матриц $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\mathrm{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t, можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \,.$$

Определение 8.1
Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)i\sigma_k(A)$.

Упражнение 8.8. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме определителей всех таких $k \times k$ подматриц матрицы A, главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A. В частности, $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$.

Теорема 8.3 (тождество Гамильтона – Кэли)
Каждая квадратная матрица с элементами из произвольного коммутативного кольца K с единицей аннулируется своим характеристическим многочленом, т. е. в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ выполняется тождество $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Подставляя в форм. (8-10) на стр. 105 вместо переменной матрицы C матрицу $tE - A$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, заключаем, что в кольце $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^{\vee} \,,$$

где $(tE-A)^\vee$ — присоединённая[1] к $(tE-A)$ матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$:

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A)\, t^{n-1} \cdot E + \cdots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A)\left(t^m \cdot A_m^\vee + \cdots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee\right) ,$$

где $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots, A_m^\vee \in \mathrm{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A) \cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. □

8.4.3. Однородные системы из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Пространство решений системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8-12}$$

на $n+1$ неизвестных $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства $\Bbbk^{n+1}$, является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве $\Bbbk^{n+1*}$. Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-12) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \overset{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8-13}$$

определитель $n \times n$ матрицы, получающихся из A выкидыванием i-го столбца.

Предложение 8.5 (второе правило Крамера)
Уравнения (8-12) линейно независимы если и только если вектор $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в этом случае вектор α порождает одномерное пространство решений системы (8-12).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i-той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (8-12). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-13) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ линейно

[1] См. n° 8.4.1 на стр. 105.

независимы в $\Bbbk^{n+1*}$, то по лемме о замене[1] их можно дополнить до базиса в $\Bbbk^{n+1*}$ одним из стандартных базисных ковекторов e_i^*. Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

по строкам которой стоят координаты базисных ковекторов $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, имеет ненулевой определитель. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен $(-1)^i A_i$, откуда $A_i \neq 0$. □

Пример 8.7 (пересечение аффинных плоскостей в $\Bbbk^3$)
Две непараллельные плоскости, заданные в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

с непропорциональными левыми частями (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3), пересекаются по прямой с вектором скорости $v = \big(a_2b_3 - a_3b_2\,,\ -a_1b_3 + a_3b_1\,,\ a_1b_2 - a_2b_1\big)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0\,. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}\,, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d\,. \end{cases}$$

[1]См. лем. 4.2 на стр. 49.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 8.2. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n,\ n-1,\ \dots\ ,\ 1)$.

Упр. 8.3. Индукция по n. Каждая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots , g_n)$ является композицией $g = \sigma\circ g'$ транспозиции σ, переставляющей между собою элементы n и g_n множества $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n.

Упр. 8.5. При условии, что все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из i и из j пересекаются между собою нечётное число раз, если пара (i, j) инверсна, и чётное число раз, если пара не инверсна (в действительности, картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух ситуациях равнялись 1 и 0 соответственно). Знак тасующей перестановки $(i_1, i_2, \dots , i_k,\ j_1, j_2, \dots , j_m)$ равен $(-1)^{|I|+\frac{1}{2}k(k+1)}$, где *вес* $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum_\nu i_\nu$. Действительно, нити, выходящие из чисел $i_1, i_2, \dots , i_k$ верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1,\ i_2 - 2,\ \dots\ ,\ i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 8.6. При $m = 1$ ненулевой многочлен $f(x_1) \in \Bbbk[x_1]$ имеет не более $\deg f$ корней и, тем самым, не обращается в нуль почти во всех точках бесконечной прямой $\Bbbk^1$. При $m > 1$ перепишите многочлен $f(x_1, \dots , x_m)$ в виде многочлена от x_m с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, \dots , x_{m-1}]$ и примените индукцию по m.

Упр. 8.7. Так как разность двух многочленов является непрерывной функцией, из того, что она обращается в нуль на всюду плотном подмножестве, вытекает, что она равна нулю всюду, а поскольку поле $\mathbb{R}$ бесконечно, многочлен от n^2 переменных, принимающий нулевые значения во всех точках аффинного пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, является нулевым многочленом[1]. Всюду плотность множества $\mathcal{D}(f)$ означает, что в любой ε-окрестности[2] каждой точки $p \in \mathbb{R}^m$ найдётся точка $r \neq p$, в которой $f(r) \neq 0$. Так как многочлен f ненулевой, имеется точка $q \in \mathbb{R}^m$ с $f(q) \neq 0$. Ограничение f на прямую (pq), будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.

[1] См. упр. 8.6 на стр. 104.

[2] Под ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}^m$ мы понимаем m-мерный куб с центром в точке p и стороной 2ε.