§7. Двойственность

7.1. Двойственные пространства. Линейные отображения $V \to \Bbbk$ принято называть *линейными функционалами*[1] или *ковекторами*. Они образуют векторное пространство

$$V^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk),$$

которое называется *двойственным* или *сопряжённым* к пространству V.

Пример 7.1 (линейные функционалы на координатном пространстве)
Каждый линейный функционал $\xi : \Bbbk^n \to \Bbbk$ однозначно задаётся набором своих значений

$$\xi_i = \xi(e_i) \in \Bbbk$$

на стандартных базисных векторах e_i пространства $\Bbbk^n$. Значение функционала ξ на произвольном векторе $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ при этом равно

$$\xi(v) = \xi(e_1 \cdot x_1 + \dots + e_n \cdot x_n) = \xi(e_1) \cdot x_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot x_n = \xi_1x_1 + \dots + \xi_nx_n .$$

Каждый набор из n констант $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \Bbbk$ задаёт по этой формуле линейный функционал $\xi : \Bbbk^n \to \Bbbk$. Если записывать векторы v пространства $\Bbbk^n$ в виде координатных столбцов высоты n, то двойственное пространство $\Bbbk^{n*}$ удобно представлять себе как n-мерное координатное пространство,состоящее из строк ширины n. При этом действие ковектора-строки $\xi \in \Bbbk^{n*}$ на вектор-столбец $v \in \Bbbk^n$ задаётся матричным умножением: $\xi(v) = \xi v$.

Пример 7.2 (степенные ряды как функционалы на многочленах)
Этот пример является бесконечномерной версией предыдущего. Кольцо многочленов $\Bbbk[x]$ является векторным пространством над $\Bbbk$ со счётным базисом из мономов x^k, где $k \geqslant 0$ и $x^0 = 1$. Каждый линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$ однозначно задаётся последовательностью своих значений $\psi_k = \psi(x^k)$ на базисных векторах пространства $\Bbbk[x]$ и действует на произвольный многочлен $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ по правилу

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{\deg a} a_k\psi_k = \psi_0a_0 + \psi_1a_1 + \dots + \psi_ma_m , \quad \text{где} \quad m = \deg a . \tag{7-1}$$

Каждая бесконечная последовательность $\psi : \mathbb{N} \to \Bbbk$ элементов $\psi_i = \psi(i) \in \Bbbk$ задаёт по этой формуле линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, ибо для каждого многочлена $a \in \Bbbk[x]$ сумма в формуле (7-1) конечна и линейно зависит от $a \in \Bbbk[x]$. Бесконечные последовательности $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов поля $\Bbbk$ продуктивно кодировать их *производящими функциями*, т. е. формальными степенными рядами $\Psi(t) = \sum_{n\geqslant 0} \psi_nt^n \in \Bbbk[\![t]\!]$. Таким образом, векторное пространство $\Bbbk[x]^*$, двойственное к пространству многочленов $\Bbbk[x]$, изоморфно пространству формальных степенных рядов $\Bbbk[\![t]\!]$. При этом изоморфизме каждый степенной ряд

$$\Psi(t) = \sum_{n\geqslant 0} \psi_nt^n \in \Bbbk[\![t]\!]$$

задаёт линейный функционал $\psi : \Bbbk[x] \to \Bbbk$, переводящий многочлен $a \in \Bbbk[x]$ в число (7-1).

[1] А также *линейными формами*.

Например, функционал вычисления значения многочленов в заданной точке $\alpha \in \Bbbk$

$$\mathrm{ev}_\alpha : \Bbbk[x] \to \Bbbk, \quad f \mapsto f(\alpha),$$

действует на базисные мономы по правилу $x^n \mapsto \alpha^n$ и, тем самым, задаётся степенным рядом

$$E_\alpha(t) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha^n t^n = \frac{1}{1-\alpha t} \in \Bbbk[\![t]\!] .$$

Отметим, что все функционалы вычисления линейно независимы, так как равенство

$$\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1 t} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2 t} + \dots + \frac{\lambda_k}{1-\alpha_k t} = 0$$

в кольце $\Bbbk[\![t]\!]$ после приведения к общему знаменателю превращается в равенство

$$\lambda_1 \prod_{\nu \neq 1}(1-\alpha_\nu t) + \lambda_2 \prod_{\nu \neq 2}(1-\alpha_\nu t) + \dots + \lambda_k \prod_{\nu \neq k}(1-\alpha_\nu t) = 0$$

в кольце многочленов $\Bbbk[t]$, подставляя в которое $t = 1/\alpha_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}[\![t]\!] \simeq \mathbb{R}[x]^*$, двойственном к счётномерному пространству $\mathbb{R}[x]$, имеется несчётное линейно независимое множество векторов.

Пример 7.3 (функционалы вычисления функций на множестве)
Пусть X — любое множество, и $V = \Bbbk^X$ — пространство всех функций $X \to \Bbbk$, как в прим. 4.1 на стр. 50. С каждой точкой $x \in X$ связан *функционал вычисления*[1]

$$\mathrm{ev}_x : \Bbbk^X \to \Bbbk, \quad f \mapsto f(x),$$

переводящий функцию $f : X \to \Bbbk$ в её значение $f(x) \in \Bbbk$ в точке x. Функционалы вычисления линейно независимы, поскольку вычисляя обе части равенства

$$\lambda_1 \mathrm{ev}_{x_1} + \lambda_2 \mathrm{ev}_{x_2} + \dots + + \lambda_m \mathrm{ev}_{x_m} = 0$$

на дельта-функции $\delta_{x_i} : X \to \Bbbk$, равную нулю во всех точках множества X кроме точки x_i, где она равна единице, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$, и так для каждого $i = 1, \dots, m$.

7.1.1. Двойственные базисы. С каждым базисом $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ конечномерного векторного пространства V связан набор *координатных функционалов* $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$, лежащих в двойственном пространстве V^*. По определению, функционал $e_i^* : V \to \Bbbk$ сопоставляет каждому вектору пространства V его i-ю координату в базисе $\boldsymbol{e}$, т. е.

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i .$$

Таким образом, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \tag{7-2}$$

[1] Обозначение ev происходит от «*evaluation*».

Упражнение 7.1. Убедитесь, что все отображения $e_i^*: V \to \Bbbk$ линейны.

Из формулы (7-2) вытекает, что ковекторы $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ линейно независимы: вычисляя обе части равенства $\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$ на базисном векторе e_i, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. С другой стороны, каждый линейный функционал $\varphi: V \to \Bbbk$ линейно выражается через координатные функционалы e_i^*: коэффициентами этого линейного выражения являются значения функционала φ на соответствующих базисных векторах пространства V, поскольку для любого $v = \sum x_i e_i$ выполняется равенство

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = e_1^*(v)\cdot\varphi(e_1) + \dots + e_n^*(v)\cdot\varphi(e_n)\,, \tag{7-3}$$

как раз и означающее, что $\varphi = e_1^* \cdot \varphi(e_1) + \dots + e_n^* \cdot \varphi(e_n)$ в пространстве V^*. Мы заключаем, что координатные функционалы e_i^* образуют базис векторного пространства V^*. Этот базис называется *двойственным* к базису из векторов e_i в V. Таким образом, в противовес прим. 7.2, для конечномерного пространства V имеет место равенство $\dim V^* = \dim V$.

Упражнение 7.2. Пусть $\dim V = n$, а векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ и ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$. Покажите, что векторы v_i образуют базис в V, а ковекторы φ_i — двойственный базис в V^*.

Пример 7.4 (формула Тейлора)

Пусть поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль[1]. Зафиксируем число $a \in \Bbbk$ и обозначим через

$$\varphi_i: \Bbbk[x]_{\leqslant n} \to \Bbbk, \quad f \mapsto f^{(i)}(a),$$

функционал на пространстве многочленов степени не выше n, сопоставляющий многочлену значение его i-й производной в точке a. При $i = 0$ мы полагаем $\varphi_0(f) = \mathrm{ev}_a(f) = f(a)$. Функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и многочлены

$$f_k(x) = (x-a)^k / k!\,, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

удовлетворяют условиям упр. 7.2: $\varphi_i(f_i) = 1$ и $\varphi_i(f_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, многочлены f_i составляют базис в пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ и координатами многочлена $g \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ в этом базисе являются значение многочлена g и первых n его производных в точке a. Иными словами, для любого многочлена g степени не выше n имеет место *формула Тэйлора*

$$g(x) = g(a) + g'(a)\cdot(x-a) + g''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}\,, \tag{7-4}$$

а для любого набора чисел $b_0, b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$ существует единственный такой многочлен g степени не выше n, что $g^{(i)}(a) = b_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$, и этот многочлен задаётся формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k / k!\,.$$

[1] Т. е. сумма любого числа единиц поля $\Bbbk$ отлична от нуля.

7.1.2. Канонический изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$. Каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления*

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk, \quad \varphi \mapsto \varphi(v),$$

на двойственном пространстве V^*. Так как число $\varphi(v) \in \Bbbk$ линейно зависит как от $v \in V$, так и от $\varphi \in V^*$, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*[1] линейное вложение

$$\mathrm{ev} : V \hookrightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \mathrm{ev}_v\,. \tag{7-5}$$

Упражнение 7.3. Убедитесь, что для любого[2] векторного пространства V отображение (7-5) инъективно.

Если пространство V конечномерно, то согласно упр. 7.2 каждый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V переводится отображением (7-5) в двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^* базис пространства V^{**}. Тем самым, для конечномерного пространства V отображение (7-5) канонически отождествляет пространство V^{**} с пространством V: каждая линейная форма $V^* \to \Bbbk$ представляет собою функционал вычисления значений ковекторов из V^* на однозначно задаваемом этой формой векторе $v \in V$, и любой базис $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* состоит из координатных функционалов для однозначно задаваемого этим базисом базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^* = (e_1, \dots, e_n) = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ в V. Таким образом, двойственные конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу совершенно симметричные роли: *каждое* из них является пространством линейных функционалов на другом. Чтобы подчеркнуть эту симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \varphi(v) = \mathrm{ev}_v(\varphi) \in \Bbbk \tag{7-6}$$

свёрткой ковектора φ с ветором v. Свёртка является билинейным отображением

$$V^* \times V \to \Bbbk, \quad (\varphi, v) \mapsto \langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle\,.$$

Для координатного пространства $V = \Bbbk^n$ в обозначениях из прим. 7.1 на стр. 84 свёртка ковектора-строки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Bbbk^{n*}$ с вектором-столбцом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \Bbbk^n$ задаётся матричным произведением

$$\langle\, \xi\,,\, x\,\rangle = \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\,.$$

Правая часть этого равенства абсолютно симметрична по буквам ξ и x.

7.2. Аннуляторы. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$ на неизвестный вектор $x \in V$ с левыми частями ξ, пробегающими множество M. Пространство[3] всех решений такой системы обозначается

$$\mathrm{Ann}(M) \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid \xi(v) = 0\ \forall\, \xi \in M \} \subset V$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$.

[1] Т. е. не требующее выбора базиса.

[2] В том числе и бесконечномерного.

[3] Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \to \Bbbk$ по всем $\xi \in M$, аннулятор любого множества $M \subset V^*$ является векторным подпространством в V.

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\operatorname{Ann}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in N\} \subset V^*.$$

Таким образом, $\operatorname{Ann}(N)$ представляет собою множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, пространство решений которых содержит множество N, или — на геометрическом языке — множество уравнений всех содержащих множество N гиперплоскостей[1] в V. С другой стороны, как и выше, множество $\operatorname{Ann}(N) \subset V^*$ является множеством решений системы однородных уравнений $\operatorname{ev}_v(y) = 0$ на неизвестный ковектор $y \in V^*$ с левыми частями ev_v, пробегающими множество $N \subset V$. В частности, $\operatorname{Ann}(N)$ всегда является векторным подпространством в V^*.

Упражнение 7.4. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

Предложение 7.1

Для любых[2] векторного пространства V и подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы $(V/U)^* \simeq \operatorname{Ann} U$ и $U^* \simeq V^*/\operatorname{Ann} U$.

Доказательство. Обозначим через $\pi : V \twoheadrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]_U$, линейное сюрьективное отображение факторизации. Отображение $F : (V/U)^* \to V^*$, $\xi \mapsto \xi \circ \pi$, сопоставляющее линейному функционалу $\xi : V/U \to \Bbbk$ его композицию с π, которая действует по правилу $v \mapsto \xi\left([v]_U\right)$, линейно и имеет $\ker F = 0$ и $\operatorname{im} F \subset \operatorname{Ann} U$. Для любого лежащего в $\operatorname{Ann} U$ линейного функционала $\psi : V \to \Bbbk$ правило $[v]_U \mapsto \psi(v)$ корректно задаёт линейный функционал $V/U \to \Bbbk$, который переводится в ψ линейным отображением F.

Упражнение 7.5. Убедитесь в этом.

Следовательно, $\operatorname{im} F = \operatorname{Ann} U$ и F является изоморфизмом между $(V/U)^*$ и $\operatorname{Ann} U$.

Линейное отображение $R : V^* \to U^*$, $\xi \mapsto \xi|_U$, сопоставляющее линейному функционалу $\xi : V \to \Bbbk$ его ограничение на подпространство $U \subset V$, имеет $\ker R = \operatorname{Ann} U$ и сюрьективно, так как каждый функционал $\psi : U \to \Bbbk$ можно продолжить до функционала $V \to \Bbbk$, произвольным образом задав его действие на базисных векторах пространства V, дополняющих какой-нибудь базис в U до базиса[3] в V. Поэтому канонический изоморфизм $V^*/\ker R \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} R$ из прим. 4.9 на стр. 59 является изоморфизмом между $V^*/\operatorname{Ann} U$ и U^*. □

Пример 7.5 (теорема о ранге матрицы)

Столбцы $a_1, a_2, \dots, a_n$ произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ являются векторами координатного пространства $\Bbbk^m$. Обозначим через $U \subset \Bbbk^m$ их линейную оболочку. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор столбцов является базисом в U и состоит ровно из $\dim U$ векторов. В i-й строке матрицы A стоят вычисленные на векторах $a_1, a_2, \dots, a_n$ значения базисного ковектора $e_i^* \in \Bbbk^{m*}$ из двойственного к стандартному базису $e_1, e_2, \dots, e_m$ пространства $\Bbbk^m$ базиса $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ двойственного пространства $\Bbbk^{m*}$. Согласно предл. 7.1, ограничения функционалов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^*. Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. Поскольку линейная зависимость функционалов $e_i^*|_U$ равносильна линейной зависимости

[1] См. прим. 4.4 на стр. 51.

[2] В том числе бесконечномерных.

[3] Состоятельность этого рассуждения в бесконечномерном случае объясняется в теоретико-множественном добавлении из n° 7.4 на стр. 92 ниже.

строк значений этих функционалов на порождающих пространство U векторах[1] $a_1, a_2, \dots, a_n$, ограничения на подпространство U ковекторов $e^*_{i_1}, e^*_{i_2}, \dots, e^*_{i_{\mathrm{rk}\,A}}$ тогда и только тогда составляют базис в U^*, когда строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{\mathrm{rk}\,A}$ составляют базис линейной оболочки строк матрицы A в пространстве $\Bbbk^n$. Мы получаем новое, более простое и концептуальное доказательство *теоремы о ранге матрицы*[2]: линейная оболочка строк $m \times n$ матрицы в координатном пространстве $\Bbbk^n$ имеет ту же размерность, что и линейная оболочка столбцов этой матрицы в координатном подпространстве $\Bbbk^m$.

Следствие 7.1

Если векторное пространство V конечномерно, то для любого подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V$.

Доказательство. В силу предл. 7.1 $\dim \mathrm{Ann}\, U = \dim(V/U)^* = \dim(V/U)$, а по предл. 4.9 на стр. 60 $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. □

Упражнение 7.6. Пусть векторы $u_1, \dots, u_k$ составляют базис в U, а векторы $w_1, \dots, w_m$ дополняют их до базиса в V. Обозначим через $u^*_1, \dots, u^*_k, w^*_1, \dots, w^*_m$ двойственный базис[3] в V^*. Покажите, что ковекторы $w^*_1, \dots, w^*_m$ образуют базис в $\mathrm{Ann}\, U$.

Следствие 7.2

Для любого векторного подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U = U$.

Доказательство. По определению аннуляторов, $U \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U$. С другой стороны, по сл. 7.1 $\dim \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U = \dim V^* - \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$. □

Замечание 7.1. Если в сл. 7.1 и сл. 7.2 взять в качестве V двойственное пространство V^* и отождествить двойственное к V^* пространство V^{**} с исходным пространством V при помощи канонического изоморфизма из n° 7.1.2, то мы получим для любого подпространства $U \subset V^*$ равенства $\dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V$ и $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U = U$.

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений сл. 7.2 утверждает, что любая линейная форма, обращающаяся в нуль на всех решениях какой-нибудь системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения системы, а сл. 7.1 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m.

Упражнение 7.7. Покажите, что $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, N = \mathrm{span}\, N$ для любого подмножества $N \subset V$.

Теорема 7.1

Соответствие $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*. Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \mathrm{Ann}\, U \supset \mathrm{Ann}\, W\,,$$

[1] Ибо равенство $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_k\varphi_k = 0$ в U^*, где $\lambda_i \in \Bbbk$, а $\varphi_i \in U^*$, равносильно выполнению равенств $\lambda_1\varphi_1(u) + \lambda_2\varphi_2(u) + \dots + \lambda_k\varphi_k(u) = 0$ для всех векторов u из какого-нибудь линейно порождающего пространство U набора векторов.

[2] Ср. с теор. 5.1 на стр. 66.

[3] См. n° 7.1.1 на стр. 85.

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V. Равенство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(V) \arrow[r, bend left, "U\mapsto \operatorname{Ann} U"] & \mathcal{S}(V^*) \arrow[l, bend left, "\operatorname{Ann} W \mapsfrom W"] \end{tikzcd}$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W, соответственно, подпространства $\operatorname{Ann} W$ и $\operatorname{Ann} U$ и воспользоваться равенствами $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W$ и $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$, получим обратную импликацию $\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_\nu \operatorname{Ann} U_\nu = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu U_\nu\right) \tag{7-7}$$

тоже очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν, зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом подпространстве в отдельности. Если взять в (7-7) в качестве подпространств U_ν пространства $\operatorname{Ann} U_\nu$, получаем равенство $\bigcap\limits_\nu U_\nu = \operatorname{Ann}\left(\sum\limits_\nu \operatorname{Ann} U_\nu\right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, приходим к равенству $\operatorname{Ann}\left(\bigcap\limits_\nu W_\nu\right) = \sum\limits_\nu \operatorname{Ann} W_\nu$. □

Следствие 7.3
Две системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ на переменный вектор-столбец $x \in \Bbbk^n$ имеют одно и то же пространство решений если и только если приведённые ступенчатые матрицы A_{red} и B_{red} этих систем совпадают друг с другом с точностью до добавления или удаления нулевых строк.

Доказательство. Обозначим через U и W линейные оболочки строк матриц A и B в пространстве $\Bbbk^{n*}$ ковекторов-строк ширины n. Согласно упр. 7.7 пространства решений систем уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ суть не что иное как лежащие в пространстве векторов-столбцов $\Bbbk^n$ высоты n аннуляторы $\operatorname{Ann} U$ и $\operatorname{Ann} W$ пространств U и W. По теор. 7.1 равенство $\operatorname{Ann} U = \operatorname{Ann} W$ пространств решений равносильно равенству $U = W$ линейных оболочек строк матриц A и B. По сл. 6.2 на стр. 83 эти линейные оболочки совпадают если и только если совпадают их базисы с приведёнными ступенчатыми матрицами координат. □

7.3. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \to W$ канонически связано *двойственное отображение*

$$F^* : W^* \to U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \tag{7-8}$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $F^*\xi$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(Fv)$.

Упражнение 7.8. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

На языке свёрток между векторами и ковекторами[1] связь между двойственными операторами описывается равенством

$$\forall \quad \langle F^*\xi\,,\,v\rangle = \langle \xi\,,\,Fv\rangle \quad \text{для всех } v\in W \text{ и } \xi\in U^*, \tag{7-9}$$

из которого видно, что операторы F и F^* играют симметричные роли по отношению друг к другу: двойственный к оператору $F^*:\,W^*\to U^*$ оператор $F^{**}:\,U^{**}\to W^{**}$ превращается в оператор $F:\,U\to W$ при канонических отождествлениях $U^{**}\simeq U$ и $W^{**}\simeq W$ из n° 7.1.2 на стр. 87.

Упражнение 7.9. Убедитесь в этом.

Предложение 7.2

Для двойственных операторов $F:\,U\to W$ и $F^*:\,W^*\to U^*$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} &(1)\ \ker F=\operatorname{Ann}\operatorname{im}(F^*) \qquad &&(2)\ \ker(F^*)=\operatorname{Ann}\operatorname{im}F\\ &(3)\ \operatorname{im}(F^*)=\operatorname{Ann}\ker F &&(4)\ \operatorname{im}F=\operatorname{Ann}\ker(F^*)\,.\end{aligned}$$

Доказательство. Вектор $F(v)\in W$ нулевой если и только если все линейные функционалы $\xi:\,W\to\Bbbk$ принимают на нём нулевое значение, т. е. $\langle \xi\,,\,Fv\rangle=0$ для всех $\xi\in W^*$. В силу (7-9) это требование равносильно требованию $\langle F^*\xi\,,\,v\rangle=0$ для всех $\xi\in W^*$, которое означает, что $v\in\operatorname{Ann}\operatorname{im}F^*$. Это доказывает равенство (1). Равенство (2) представляет собою равенство (1), написанное для оператора F^* в роли F и оператора $F^{**}=F$ в роли F^*. Равенства (3) и (4) получаются из равенства (1) и (2) взятием аннуляторов обеих частей. □

Следствие 7.4

Векторные пространства $\operatorname{im}F\subset U$ и $\operatorname{im}(F^*)\subset W^*$ канонически двойственны друг другу. Свёртка вектора $Fv\in\operatorname{im}F$ с ковектором $F^*\xi\in\operatorname{im}F^*$ задаётся формулой

$$\langle F^*\xi\,,\,Fv\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle F^*\xi\,,\,v\rangle = \langle \xi\,,\,Fv\rangle\,. \tag{7-10}$$

Доказательство. В прим. 4.9 на стр. 59 и предл. 7.1 на стр. 88 были построены канонические изоморфизмы $\operatorname{im}F\simeq U/\ker F$ и $(U/\ker F)^*\simeq\operatorname{Ann}\ker F$, последний из которых спаривает ковектор $\eta\in\operatorname{Ann}\ker F\subset U^*$ с вектором $[u]\in U/\ker F$ по правилу $\langle \eta\,,\,[u]\rangle=\langle \eta\,,\,u\rangle$, а первый отождествляет класс $[u]\in U/\ker F$ с вектором $F(u)\in\operatorname{im}F$. Равенство (3) из предл. 7.2 утверждает, что каждый $\eta\in\operatorname{Ann}\ker F$ однозначно записывается в виде $F^*\xi$, где $\xi\in W^*$. Собирая всё вместе и пользуясь равенством $\langle F^*\xi\,,\,u\rangle=\langle \xi\,,\,Fu\rangle$ заключаем, что свёртка между ковектором $\eta=F^*\xi\in\operatorname{im}F^*=\operatorname{Ann}\ker F\subset U^*$ вектором $Fu\in\operatorname{im}F$, представляющим класс $[u]\in U/\ker F$ при изоморфизме $\operatorname{im}F\simeq U/\ker F$ задаётся формулой (7-10). □

Упражнение 7.10. Убедитесь непосредственно, что формула (7-10) корректна, т. е. результат свёртки не зависит от выбора ковектора $\xi\in W^*$ и вектора $v\in U$, использованных для записи элементов из $\operatorname{im}F^*$ и $\operatorname{im}F$.

Следствие 7.5

Векторное пространство $\ker F\subset U$ канонически двойственно фактор пространству $U^*/\operatorname{im}F^*$, а пространство $\ker F^*\subset W^*$ — фактор пространству $W/\operatorname{im}F$. Свёртки между ними задаются формулами

$$\langle \psi+\ker F^*\,,\,v\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \psi\,,\,v\rangle \quad \text{и} \quad \langle \xi\,,\,w+F(U)\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \xi\,,\,w\rangle\,, \tag{7-11}$$

[1] См. 7-6 на стр. 87.

где $\psi + \ker F^* \in U^* / \operatorname{im}(F^*)$, $v \in \ker F$, $\xi \in \ker^*$, $w + F(U) \in W / \operatorname{im} F$. □

Упражнение 7.11. Проверьте корректность определений (7-11), т. е. независимость правых частей от выбора представителей $\psi \in U^*$ и $w \in W$ в классах $\psi + \ker F^*$ и $w + F(U)$, и докажите сл. 7.5 по образцу сл. 7.4.

Замечание 7.3. Принимая во внимание двойственности из сл. 7.5, фактор по образу линейного отображения F часто называют *коядром* отображения F и обозначают $\operatorname{coker}(F) \overset{\text{def}}{=} W/\operatorname{im} F$. В этих обозначениях первые два утверждения из сл. 7.5 записываются равенствами

$$(\ker F)^* = \operatorname{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\operatorname{coker} F)^* = \ker(F^*)\,.$$

Предложение 7.3

Пусть отображение $F : U \to W$ имеет в некоторых базисах $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W имеет матрицу[1] $F_{\boldsymbol{wu}} = \left(f_{ij}\right)$. Тогда матрица $F^*_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{w}^*} = \left(f^*_{ij}\right)$ двойственного отображения $F^* : W^* \to U^*$ в двойственных базисах $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ и $\boldsymbol{w}^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ пространств W^* и U^* является транспонированной[2] к матрице отображения F:

$$F^*_{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{w}^*} = F^t_{\boldsymbol{wu}}\,, \quad \text{т. е. } f^*_{ij} = f_{ji}.$$

Доказательство. Число f^*_{ij} равно i-й координате ковектора $F^*(w_j^*)$ в базисе $\boldsymbol{u}^*$, т. е. свёртке этого ковектора с базисным вектором[3] u_i:

$$f^*_{ij} = \langle F^* w_j^* \,,\, u_i \rangle = \langle w_j^* \,,\, F u_i \rangle = \langle w_j^* \,,\, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \rangle = \sum_k \langle w_j^* \,,\, w_k \rangle \cdot f_{ki} = f_{ji}\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 7.6 (ещё раз о ранге матрицы)

Каждая матрица $A = \left(a_{ij}\right) \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ является матрицей линейного отображения

$$F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m\,,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\operatorname{im} F$ этого отображения, т. е. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F$. Согласно предл. 7.3, двойственное отображение $F^* : \Bbbk^{m*} \to \Bbbk^{n*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей A^t, откуда

$$\operatorname{rk} A^t = \dim \operatorname{im} F^* = m - \dim \ker F^* = m - \dim \operatorname{Ann} \operatorname{im} F = \dim \operatorname{im} F = \operatorname{rk} A\,,$$

что даёт ещё одно доказательство теоремы о ранге матрицы[4].

7.4. Отступление: бесконечномерие. Этот раздел относится скорее к теории множеств, чем к линейной алгебре. В нём изложена стандартная машинерия, позволяющая отбросить предположения о конечномерности, которые для упрощения первого знакомства с предметом были сделаны нами в теореме о базисе[5].

[1] См. n° 4.4.2 на стр. 57.
[2] См. обсуждение перед упр. 5.3 на стр. 62 из n° 5.1.
[3] См. форм. (7-3) на стр. 86 и сопутствующее обсуждение.
[4] Ср. с прим. 7.5 на стр. 88.
[5] См. теор. 4.1 на стр. 49.

7.4.1. Отношения порядка. Множество X называется *частично упорядоченным* если между некоторыми парами элементов $x, y \in X$ установлено такое отношение $x \leqslant y$, что для всех $x, y, z \in X$ из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ вытекает, что $x \leqslant z$, а одновременное выполнение условий $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ равносильно равенству $x = y$. Запись $x < y$ означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

Например, пусть $X = 2^M$ является множеством всех подмножеств некоторого множества M. Отношение нестрого включения $x \subseteq y$ подмножества $x \subseteq M$ в подмножество $y \subseteq M$ задаёт на множестве 2^M частичный порядок. Запись $x \subset y$ означает строгое включение.

Частичный порядок на множестве X называется *линейным*, если для любой пары элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant y$ или неравенство $y \leqslant x$. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ со стандартным отношением неравенства между числами линейно упорядочено, а множество 2^M всех подмножеств множества M с отношением включения не является линейно упорядоченным, если в M не меньше двух элементов.

Линейно упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество $S \subset X$ содержит такой элемент $s_* \in S$, что $s_* \leqslant s$ для всех $s \in S$. Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества S. Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктное объединение вида $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \ldots$, в котором все элементы каждой копии множества $\mathbb{N}$ считаются строго большими всех элементов каждой предшествующей копии. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества $\mathbb{N}$. А именно, пусть некоторое зависящее от элемента x вполне упорядоченного множества X утверждение $\Phi(x)$ истинно для начального элемента x_* множества X, и пусть для каждого $x \in X$ истинность утверждения $\Phi(y)$ при всех $y < x$ влечёт за собою истинность утверждения $\Phi(x)$. Тогда $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in X$.

Упражнение 7.12. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения $\Phi(x)$ для всех $x \in X$ называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода специальные подмножества

$$[x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y < x\}$$

называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества X. Элемент $x \in X$ называется *точной верхней гранью* начального интервала $[x) \subset X$. Отметим, что начальный элемент $x_* \in X$ является точной верхней гранью пустого начального интервала $[x_*) = \varnothing$.

Упражнение 7.13. Покажите, что собственное подмножество $I \subsetneq X$ тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества X, когда $[y) \subset I$ для каждого $y \in I$, и в этом случае точная верхняя грань интервала I однозначно восстанавливается по I как начальный элемент дополнения $X \smallsetminus I$.

7.4.2. Лемма Цорна. Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество P и обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех подмножеств $W \subset P$, которые вполне упорядочены имеющимся на P отношением $x \leqslant y$. Множество $\mathcal{W}(P)$ непусто и содержит пустое подмножество $\varnothing \subset P$, а также все конечные линейно упорядоченные подмножества[1] $L \subset P$ и, в частности, все элементы множества P.

[1]Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*.

Лемма 7.1
Не существует такого отображения $\varrho : \mathcal{W}(P) \to P$, что $\varrho(W) > w$ для всех $W \in \mathcal{W}(P)$ и $w \in W$.

Доказательство. Пусть такое отображение ϱ существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество $W \subset P$ ϱ-рекурсивным, если $\varrho([y)) = y$ для всех $y \in W$. Например, множество

$$\Big\{ \varrho(\varnothing),\ \varrho\big(\{\varrho(\varnothing)\}\big),\ \varrho\big(\big\{\varrho(\varnothing),\ \varrho(\{\varrho(\varnothing)\})\big\}\big) \Big\}$$

ϱ-рекурсивно и может неограниченно расширяться вправо. Любые два различных ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножества с общим начальным элементом обладают тем свойством, что одно из них является начальным интервалом другого.

Упражнение 7.14. Докажите это.

Обозначим через $U \subset P$ объединение всех ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в P с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$.

Упражнение 7.15. Убедитесь, что подмножество $U \subset P$ вполне упорядочено и ϱ-рекурсивно.

Поскольку элемент $\varrho(U)$ строго больше всех элементов из U, он не лежит в U. С другой стороны, множество $W = U \cup \{\varrho(U)\}$ вполне упорядочено, ϱ-рекурсивно, и его начальным элементом является $\varrho(\varnothing)$. Следовательно, $W \subset U$, откуда $\varrho(U) \in U$. Противоречие. $\square$

Предложение 7.4
Пусть каждое вполне упорядоченное подмножество W частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань[1]. Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент $p^* \in P$, что неравенство $p^* \leqslant x$ выполняется в P только для $x = p^*$.

Доказательство. Если требуемого элемента p^* нет, то для каждого элемента $p \in P$ найдётся такой элемент $p' \in P$, что $p < p'$. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $W \subset P$ найдётся такой (возможно не единственный) элемент $w^* \in P$, что $w < w^*$ для всех $w \in W$. Сопоставляя каждому $W \in \mathcal{W}$ один из этих элементов w^*, мы получаем отображение $\varrho : \mathcal{W} \to P$, которого не может быть по лем. 7.1. $\square$

Следствие 7.6 (лемма Цорна)
Пусть каждое линейно упорядоченное подмножество L частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань, т. е. такой (возможно не единственный) элемент $s^* \in P$, что $x \leqslant s^*$ для всех $x \in L$. Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент[2] p^*, что неравенство $p^* \leqslant x$ выполняется в P только при $x = p^*$. $\square$

7.4.3. Теоремы о базисах. Подмножество B векторного пространства V называется *порождающим*, если каждый вектор $v \in V$ записывается в виде

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}\,,\ b_i \in B\,,\ \lambda_i \in \Bbbk\,.$$

Иначе можно сказать, что каждый вектор $v \in V$ допускает линейное разложение

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b\,, \quad \text{где} \quad \lambda_b \in \Bbbk\,, \tag{7-12}$$

[1] Т. е. такой (возможно не единственный) элемент $w^* \in P$, что $w \leqslant w^*$ для всех $w \in W$.
[2] Элементы с таким свойством принято называть *максимальными*.

в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b отлично от нуля. Порождающее подмножество $B \subset V$ называется *базисом* пространства V, если для каждого $v \in V$ разложение (7-12) единственно, то есть равенство $\sum_{b\in B} \lambda_b b = \sum_{b\in B} \mu_b b$, в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b, μ_b отлично от нуля, равносильно тому, что $\lambda_b = \mu_b$ при всех $b \in B$. Непустое множество $A \subset V$ называется *линейно независимым* если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}\,,\ a_i \in A\,,\ \lambda_i \in \Bbbk\,,$$

возможно только когда все $\lambda_i = 0$.

Упражнение 7.16. Убедитесь в том, что множество $E \subset V$ является базисом если и только если оно линейно независимо и порождает V.

Теорема 7.2 (существование базиса)
В каждом ненулевом векторном пространстве V для любого линейно независимого множества A и любого содержащего A порождающего множества B существует базис E, содержащий A и содержащийся в B.

Доказательство. Линейно независимые множества векторов $X \subseteq V$ со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ образуют частично упорядоченное отношением включения множество, удовлетворяющее лемме Цорна[1]. А именно, в качестве верхней грани линейно упорядоченной цепи вложенных друг в друга линейно независимых наборов векторов можно взять их объединение. Оно тоже будет линейно независимо, так как любая конечная линейная комбинация векторов такого объединения всегда является линейной комбинацией векторов какого-нибудь одного достаточно большого множества цепочки. Тем самым, по лемме Цорна существует такое линейно независимое множество E со свойством $A \subseteq E \subseteq B$, что для любого линейно независимого множества X со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ включение $E \subseteq X$ влечёт равенство $E = X$. Покажем, что E линейно порождает V. Достаточно убедиться, что каждый вектор $b \in B \smallsetminus E$ линейно выражается через E. Так как множество $E \cup \{b\}$ строго больше E, оно линейно зависимо. Поскольку само множество E линейно независимо, всякая линейная зависимость между векторами из $E \cup \{b\}$ содержит с ненулевым коэффициентом вектор b. Тем самым, он линейно выражается через E. □

Следствие 7.7
Каждое ненулевое векторное пространство имеет базис, и любой базис любого подпространства можно дополнить до базиса во всём пространстве. □

Теорема 7.3 (равномощность базисов)
В каждом векторном пространстве все базисы равномощны.

Доказательство. Пусть базис B строго мощнее базиса E. Поскольку в конечномерном пространстве это невозможно по теор. 4.1 на стр. 49, оба базиса бесконечны. Каждый вектор $e \in E$ является линейной комбинацией конечного множества векторов $B_e \subset B$. Так как множество E бесконечно, объединение $B_E = \bigcup_{e\in E} B_e$ всех этих конечных множеств равномощно E.

Упражнение 7.17. Убедитесь в этом.

Тем самым, существует вектор $b \in B$, не лежащий в B_e. Линейно выражая b через векторы базиса E, а каждый из входящих в это выражение векторов $e \in E$ — через векторы из B_e, мы

[1] См. сл. 7.6 на стр. 94.

получим линейное выражение вектора $b \in B \smallsetminus B_E$ через векторы из B_E. Тем самым, множество B линейно зависимо. □

Следствие 7.8
Всякое более мощное, чем базис, множество векторов линейно зависимо. □

Теорема 7.4 (продолжение линейных отображений)
Для каждого линейного отображения $F : U \to W$, заданного на подпространстве U векторного пространства V, существует (возможно, не единственное) такое линейное отображение $G : V \to W$, что $G|_U = F$.

Доказательство. Каждое линейное отображение $G : V \to W$ однозначно задаётся своими значениями на векторах любого базиса E пространства V, и для любого отображения множеств $g : E \to W$ существует единственное такое линейное отображение $G : V \to W$, что $G(e) = g(e)$ для всех $e \in E$.

Упражнение 7.18. Убедитесь в этом.

Рассмотрим произвольный базис B в U, дополним его до базиса $E = B \sqcup C$ в V и рассмотрим любое отображение множеств $g : E \to W$, переводящее каждый вектор $b \in B$ в $F(b)$. Отвечающее этой функции линейное отображение обладает требуемым свойством. □

Упр. 7.2. Достаточно убедиться, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно независимы. Применяя к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ функционал ξ_i, получаем $\lambda_i = 0$, и так для каждого $i = 1, \dots, n$.

Упр. 7.3. Ядро $\ker \mathrm{ev} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \ \varphi(v) = 0\} = 0$, поскольку для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует nfrjq линейный функционал $\varphi : V \to \Bbbk$, что $\varphi(v) \neq 0$. Например, можно дополнить вектор v до базиса пространства V и взять в качестве φ функционал, сопоставляющий вектору его координату в направлении базисного вектора vотносительно этого базиса.

Упр. 7.4. Если линейная форма зануляется на каком-то множестве векторов, то она зануляется и всех линейных комбинациях этих векторов.

Упр. 7.6. Ковекторы $w_1^*, \dots, w_m^*$ лежат в $\mathrm{Ann}\, U$ и линейно независимы, так как являются частью базиса в V^*. Поскольку координатами каждого линейного функционала $\varphi \in V^*$ в базисе

$$u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$$

являются значения $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$, ковектор $\varphi \in \mathrm{Ann}\, U$ если и только если он является линейной комбинацией ковекторов $w_1^*, \dots, w_m^*$. Тем самым, эти ковекторы линейно порождают $\mathrm{Ann}\, U$.

Упр. 7.7. По упр. 7.4 на стр. 88 $\mathrm{Ann}\, N = \mathrm{Ann}\,\mathrm{span}\, N$, откуда $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, N = \mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,\mathrm{span}\, N = \mathrm{span}\, N$.

Упр. 7.9. Оператор $F^{**} : U^{**} \to W^{**}$ переводит функционал вычисления $\mathrm{ev}_u : U^* \to \Bbbk$ в композицию $\mathrm{ev}_u \circ F^* : W^* \to \Bbbk$, которая в свою очередь переводит ковектор $\xi : W \to \Bbbk$ в число $\mathrm{ev}_u(F^*\xi) = F^*\xi(u) = \xi(Fu) = \mathrm{ev}_{Fu}(\xi)$. Таким образом, $F^{**}(\mathrm{ev}_v) = \mathrm{ev}_{F(v)}$. Отождествления $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ переводят функционалы вычисления $\mathrm{ev}_u : U^* \to \Bbbk$ и $\mathrm{ev}_w : W^* \to \Bbbk$ в векторы $u \in U$ и $w \in W$, на которых эти вычисления производятся. Формула $F^{**}(\mathrm{ev}_v) = \mathrm{ev}_{F(v)}$ утверждает, что при этом действие оператора F^{**} на функционалы вычисления превращается в действие F на векторы.

Упр. 7.12. Пусть множество $S \subset X$ состоит из всех таких элементов $z \in X$, что утверждение $\Phi(z)$ ложно. Если $S \neq \varnothing$, то в нём есть начальный элемент $s_* \in S$. Поскольку утверждение $\Phi(y)$ истинно для всех $y < s_*$, утверждение $\Psi(s_*)$ тоже истинно, т. е. $s_* \notin S$. Противоречие.

Упр. 7.13. Обозначим через x_I начальный элемент дополнения $X \smallsetminus I$. Начальный интервал $[x_I) \subset X$ является объединением начальных интервалов $[y) \subset X$ по всем $y < x$. Если I содержит все интервалы $[y)$ с $y < x_I$, то $I \supseteq [x_I)$, откуда $I = [x_I)$.

Упр. 7.14. Рассмотрим подмножество $Z \subseteq W_1$, состоящее из всех таких $z \in W_1$, что начальный интервал $[z)_1$ в множестве W_1 является одновременно начальным интервалом $[z)_2$ множества W_2. Множество Z не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств W_1 и W_2. Если $Z \subsetneq W_1$ и $Z \subsetneq W_2$, то по упр. 7.13 на стр. 93 подмножество Z является начальным интервалом как в W_1, так и в W_2, что невозможно, поскольку точные верхние границы этих интервалов в W_1 и W_2, с одной стороны, не лежат в Z и, стало быть, различны, а с другой стороны в силу ϱ-рекурсивности множеств W_1 и W_2 обе они равны $\varrho(Z)$, то есть совпадают. Тем самым, $Z = W_1$ или $Z = W_2$. По упр. 7.13 в первом случае W_1 является начальным интервалом в W_2, а во втором — W_2 является начальным интервалом в W_1.

Упр. 7.15. Каждое подмножество $S \subset U$ имеет непустое пересечение с каким-нибудь ϱ-рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством $W \subset P$ с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. По упр. 7.14

подмножество W является начальным интервалом всех содержащих W ϱ-рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом $\varrho(\varnothing)$. Поэтому начальный элемент пересечения $S \cap W$ не зависит от выбора W с $W \cap S \neq \varnothing$ и является начальным элементом подмножества S. Каждый начальный интервал $[u) \subset U$ является начальным интервалом любого содержащего u множества W из цепи. В силу ϱ-рекурсивности W элемент $\varrho[u) = u$.

Упр. 7.16. Годится дословно то же рассуждение, что и в доказательстве лем. 4.1 на стр. 49.

Упр. 7.17. Очевидно, что E вкладывается в B_E, а B_E вкладывается в дизъюнктное объединение

$$\bigsqcup_{n\geqslant 1} \underbrace{E \sqcup \ldots \sqcup E}_{n}$$

счётного множества копий множества E, которое в силу того, что множество E бесконечно, равномощно E. Тем самым, B_E вкладывается в E. Остаётся применить теорему Кантора – Бернштейна.

Упр. 7.18. Линейное отображение G действует на каждый вектор $v = \sum_{e\in E} x_e e$ по правилу $G(v) = \sum_{e\in E} x_e g(e)$, и для любого отображения множеств $g : E \to W$ это правило задаёт линейное отображение $G : V \to W$.