§6. Метод Гаусса

6.1. Построение базиса в подпространстве. Рассмотрим n-мерное координатное векторное пространство $\Bbbk^n$, векторы которого будем записывать в виде строк $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Сопоставим каждому набору векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in \Bbbk^n$ матрицу размера $m \times n$, по строкам которой выписаны координаты этих векторов и которую мы будем называть *матрицей координат* векторов w_i. Метод Гаусса позволяет построить в линейной оболочке U произвольного заданного набора векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in \Bbbk^n$ базис $u_1, u_2, \dots, u_r$, матрица координат которого имеет *приведённый ступенчатый вид*. Последнее по определению означает, что самый левый ненулевой элемент в каждой строки этой матрицы равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является приведённой ступенчатой при любом выборе элементов, стоящих на отмеченных звёздочками местах.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что ненулевые строки любой приведённой ступенчатой матрицы линейно независимы и, тем самым, образуют базис своей линейной оболочки.

Столбцы, содержащие самые левые ненулевые координаты базисных векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ называются *базисными столбцами* приведённой ступенчатой матрицы. Их номера $j_1, j_2, \dots, j_r$ строго возрастают, а сами они образуют единичную подматрицу размера $r \times r$.

Построение базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат состоит в накоплении нулей в левом нижнем углу матрицы при помощи последовательных замен некоторых пар векторов w_i, w_j в порождающем подпространство U наборе векторов на подходящие линейные комбинации $w_i' = aw_i + bw_j$, $w_j' = cw_i + dw_j$ так, чтобы линейная оболочка новых векторов w_i', w_j' оставалась такой же, как у исходных векторов w_i, w_j.

Упражнение 6.2. Убедитесь, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $ad - bc \neq 0$.

В классическом методе Гаусса используются только следующие три типа замен:

$$\begin{array}{llll} 1) & w_i' = w_i + \lambda w_j & w_j' = w_j & (\text{с произвольным } \lambda \in \Bbbk) \\ 2) & w_i' = w_j & w_j' = w_i & \\ 3) & w_i' = \varrho w_i & w_j' = w_j & (\text{с ненулевым } \varrho \in \Bbbk)\,. \end{array}$$

Исходные векторы линейно выражаются через преобразованные как

$$\begin{array}{lll} 1) & w_i = w_i' - \lambda w_j' & w_j = w_j' \\ 2) & w_i = w_j' & w_j = w_i' \\ 3) & w_i = \varrho^{-1} w_i' & w_j = w_j'\,. \end{array}$$

При этих заменах матрица координат векторов w_i испытывает следующие три типа *элементарных преобразований строк*:

$$\begin{aligned} &1) \quad \text{к одной из строк прибавляется другая строка, умноженная на число}\\ &2) \quad \text{две строки меняются местами}\\ &3) \quad \text{одна из строк умножается на ненулевое число.}\end{aligned} \tag{6-1}$$

Теорема 6.1 (о преобразовании к приведённому ступенчатому виду)
Всякая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ элементарными преобразованиями строк может быть преобразована в приведённую ступенчатую матрицу A_{red} так, что линейная оболочка строк матрицы A_{red} останется той же, что у матрицы A. В частности, ненулевые строки матрицы A_{red} составят в линейной оболочке строк матрицы A базис с приведённой ступенчатой матрицей координат.

Доказательство. Удобно разбить процесс на n последовательных шагов — по количеству столбцов матрицы A. Будем предполагать, что после выполнения $(k-1)$-го шага та часть матрицы, что находится слева от k-ого столбца, имеет приведённый ступенчатый вид[1]. Пусть в этой части имеется s ненулевых строк. По нашему предположению это верхние s строк, причём $0 \leqslant s \leqslant k-1$. Очередной k-тый шаг вычисления состоит из следующих действий. Выберем в k-том столбце в строках строго ниже s-той какой-нибудь ненулевой элемент a (если такого элемента нет, то переходим к $(k+1)$-му шагу). Умножим строку, где он стоит, на a^{-1}. Потом поменяем эту строку местами с $(s+1)$-ой строкой. При этом левые $(k-1)$ столбцов матрицы не изменятся, а $(s+1)$-я строка примет вид

$$\underbrace{0\,0\,\dots\,0\,0}_{k-1}\,1\,\underbrace{*\,*\,\dots\,*\,*}_{n-k}\,.$$

Теперь для каждого $i \neq s+1$ вычтем из i-й строки полученной матрицы $(s+1)$-ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении i-й строки и k-го столбца. Это не изменит левые $(k-1)$ столбцов матрицы и обнулит все элементы k-того столбца за исключением стоящей $(s+1)$-ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для $(k+1)$-го шага. Последние два утверждения предложения вытекают из упр. 6.1 и следующего за ним обсуждения. □

Пример 6.1
Построим в координатном пространстве $\mathbb{Q}^5$ базис линейной оболочки строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{6-2}$$

Для этого умножим последнюю строку на -1 и поменяем местами с первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

[1] При $k=1$ это требование не накладывает никаких ограничений

Теперь обнулим первый столбец ниже первой строки, прибавляя надлежащие кратности первой строки ко второй, третьей и четвёртой строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее обнуляем второй столбец ниже второй строки, добавляя подходящие кратности этой строки к нижним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим третью строку на -2 и зануляем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6-3}$$

Верхние три строки этой приведённой ступенчатой матрицы составляют базис в линейной оболочке $U \subset \mathbb{Q}^5$ строк исходной матрицы (6-2). В частности, $\dim U = 3$.

6.2. Отыскание обратной матрицы. Каждое из перечисленных в форм. (6-1) на стр. 74 элементарных преобразований строк $m \times n$ матрицы A можно осуществить, умножая матрицу A слева на квадратную матрицу S, что получается из единичной матрицы E размера $m \times m$ тем же самым элементарным преобразованием строк, которое требуется произвести в матрице A.

Упражнение 6.3. Убедитесь в этом, используя второе из тех двух описаний произведения матриц, что были даны на стр. 61.

Преобразование строк, обратное к тому, что осуществляется левым умножением на матрицу S, тоже задаётся левым умножением на некоторую $m \times m$ матрицу T. Применяя обратные друг другу преобразования S и T к единичной $m \times m$ матрице E, мы получаем равенства $TSE = E$ и $STE = E$, из которых вытекает, что $m \times m$ матрицы S и T обратны друг другу. Мы заключаем, что приведённая ступенчатая матрица A_{red}, которая получается из матрицы A элементарными преобразованиями строк, имеет вид $A_{\mathrm{red}} = S_k \dots S_1 A$, где все элементарные матрицы $S_1, S_2, \dots, S_k \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\Bbbk)$ обратимы.

Для квадратной $m \times m$ матрицы A приведённая ступенчатая матрица A_{red} либо единичная, либо содержит нулевые строки. В первом случае строки матрицы A линейно независимы, и матрица A обратима по сл. 5.1 на стр. 65, причём из равенства $A_{\mathrm{red}} = E = S_k \dots S_1 A$ вытекает, что матрица $A^{-1} = S_k \dots S_1 = S_k \cdots S_1 \cdot E$ получается из единичной матрицы E той же самой цепочкой элементарных преобразований, которая превращает матрицу A в матрицу E. Во втором случае строки матрицы A линейно зависимы, и матрица A необратима по тому же сл. 5.1.

Итак, если приписать справа к квадратной матрице A единичную матрицу E того же размера и применить к получившейся матрице $\boxed{A|E}$ размера $n \times 2n$ метод Гаусса, то либо на выходе получится матрица $\boxed{E|B}$, что означает обратимость матрицы A и равенство $A^{-1} = B$, либо в процессе вычислений мы придём к матрице $\boxed{N|C}$ с необратимой матрицей N, что означает необратимость матрицы A.

Пример 6.2

Выясним обратима ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этого применим метод Гаусса к матрице

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Меняем знак нижней строки, после чего меняем её местами с верхней:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

и обнуляем первый столбец ниже первой строки, отнимая из всех строк надлежащие кратности первой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 7 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Теперь переставляем вторую и третью строки и обнуляем нижние два элемента второго столбца:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & 7 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \tag{6-4}$$

Чтобы избежать вычислений с дробями, отклонимся от классического метода Гаусса и умножим нижние две строки слева на матрицу[1]

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}.$$

[1]Это равносильно умножению всей матрицы на $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$

Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array}\right)$$

Остаётся вычесть из второй строки третью, а из первой — четвёртую и удвоенную третью:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 7 & -21 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array}\right)$$

Мы заключаем, что матрица A обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & 11 \\ -2 & 7 & -21 & -26 \\ 2 & -7 & 22 & 27 \\ 5 & -17 & 53 & 66 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.4. Проверьте полученный ответ умножением этой матрицы на исходную матрицу A.

6.3. Решение систем линейных уравнений. В n° 5.5 на стр. 67 мы сопоставили системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6-5}$$

матрицу $C = \boxed{A|b}$ размера $m \times (n+1)$, которая получается приписыванием столбца $b = (b_i)$ правых частей системы (6-5) к $m \times n$ матрице $A = (a_{ij})$, составленной из коэффициентов левых частей уравнений (6-5). Перечисленным в форм. (6-1) на стр. 74 элементарным преобразованиям строк матрицы C на языке уравнений отвечают следующие три типа преобразований системы (6-5):

1) почленое сложение одного из уравнений с другим, умноженным на константу
2) перестановка двух уравнений друг с другом (6-6)
3) умножение обеих частей некоторого уравнения на ненулевую константу.

Так как исходная система может быть получена из преобразованной системы аналогичным элементарным преобразованием, обратным к проделанному, исходная и преобразованная система эквивалентны в том смысле, что у них одно и то же пространство решений. Таким образом, метод Гаусса преобразует систему уравнений (6-5) с матрицей $C = \boxed{A|b}$ в эквивалентную ей систему уравнений с приведённой ступенчатой матрицей C_{red}. Пусть самые левые ненулевые элементы строк этой матрицы находятся в столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Если $j_r = n+1$, то

r-тое уравнение системы имеет вид $0 = 1$, и система несовместна. Если же $j_r \leqslant n$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= \beta_1 - \alpha_{1i_1}x_{i_1} - \alpha_{1i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{1i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} &= \beta_2 - \alpha_{2i_1}x_{i_1} - \alpha_{2i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{2i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_r} &= \beta_r - \alpha_{ri_1}x_{i_1} - \alpha_{ri_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{ri_{n-r}}x_{i_{n-r}}\,, \end{aligned} \tag{6-7}$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} = \{1, \dots, n\} \smallsetminus \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Стоящие вне базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}$ называются *свободными*, поскольку могут принимать любые значения. Отвечающие базисным столбцам переменные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *связанными*, так для любого набора значений свободных переменных существует единственный набор значений связанных переменных, достраивающий указанные значения свободных переменных до решения системы (6-5). Эти единственные значения задаются формулами (6-7), которые, таким образом, доставляют параметрическое описание всех решений системы (6-5).

Это описание согласуется с качественным описанием, данным нами в n° 5.5 на стр. 67. А именно, подставляя в правую часть (6-7) нулевые значения $x_{i_1} = \cdots = x_{i_r} = 0$, мы получаем точку $p \in \Bbbk^n$ с координатами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ на местах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$ и нулевыми остальными координатами. Она удовлетворяет уравнениям (6-5), и каждое решение системы (6-5) имеет вид $p + v$, где вектор v пробегает векторное подпространство $\ker F_A \subset \Bbbk^n$ решений однородной системы $Ax = 0$, которая в развёрнутом виде выглядит как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\,, \end{cases} \tag{6-8}$$

и эквивалентна системе $A_{\mathrm{red}}x = 0$, которую тоже можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= -\alpha_{1i_1}x_{i_1} - \alpha_{1i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{1i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} &= -\alpha_{2i_1}x_{i_1} - \alpha_{2i_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{2i_{n-r}}x_{i_{n-r}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_r} &= -\alpha_{ri_1}x_{i_1} - \alpha_{ri_2}x_{i_2} - \cdots - \alpha_{ri_{n-r}}x_{i_{n-r}}\,. \end{aligned} \tag{6-9}$$

Базис в векторном пространстве решений системы (6-9) составляют векторы $u_1, \dots, u_{n-r}$, которые получаются следующим образом. Для каждого $k = 1, 2, \dots, (n-r)$ подставим в правую часть (6-9) значения $x_{i_k} = 1$ и $x_{i_\nu} = 0$ при $\nu \neq k$. Получим вектор с координатами $-\alpha_{1i_k}, \dots, -\alpha_{ri_k}$ на местах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$, координатой 1 на i_k-м месте, и остальными $n - r - 1$ координатами равными нулю. Это и есть k-й базисный вектор u_k.

Пример 6.3
Решим методом Гаусса следующую систему уравнений над полем $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 9x_5 - 5x_6 = -10 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 + 13x_5 + 7x_6 = 14 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 8x_5 - 6x_6 = -12 \\ -3x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 16x_5 - 9x_6 - 2x_7 = -17 \end{cases} \tag{6-10}$$

Расширенная матрица этой системы вид

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & -3 & 0 & -9 & -5 & 0 & -10 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 13 & 7 & 0 & 14 \\ -1 & -2 & -5 & -7 & -8 & -6 & 0 & -12 \\ -3 & -6 & -7 & -5 & -16 & -9 & -2 & -17 \end{array}\right).$$

Обнуляем первый столбец вне первой строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности первой:

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Обнуляем третий столбец вне второй строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности второй:

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Удаляем нулевые строки и обнуляем шестой столбец вне нижней строки, прибавляя ко второй и тртьей строкам надлежащие кратности нижней строки:

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Система уравнений, отвечающая этой приведённой ступенчатой матрице может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -1 - 2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 3 + 2x_7\,. \end{cases} \tag{6-11}$$

Придавая свободным переменным x_2, x_4, x_5, x_7 произвольные значения и вычисляя соответствующие значения связанных переменных x_1, x_3, x_6 по формулам (6-11) получаем параметрическое описание всех решений исходной системы (6-10).

На геометрическом языке эти решения заметают в $\mathbb{Q}^7$ аффинное пространство $p + U$, где точка $p = (-1, 0, -1, 0, 0, 3, 0)$ получается подстановкой $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ в (6-11), а векторное подпространство $U \subset \mathbb{Q}^7$ имеет базис из векторов

$$u_1 = (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)\,, \qquad u_2 = (3, 0, -2, 1, 0, 0, 0)\,,$$
$$u_3 = (-3, 0, -1, 0, 1, 0, 0)\,, \quad u_4 = (-2, 0, -2, 0, 0, 1, 2)\,,$$

координаты которых получаются подстановкой в однородные версии формул (6-11)

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 2x_7\,. \end{cases}$$

значений $(x_2, x_4, x_5, x_7) = (1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)$.

6.4. Построение базиса в фактор пространстве. В предл. 4.9 на стр. 60 мы указали абстрактный базис в фактор пространстве $V\,/\,U$ векторного пространства V по подпространству $U \subset V$. Для координатного пространства $V = \Bbbk^n$ метод Гаусса позволяет предъявить такой базис явно.

Следствие 6.1 (из предл. 4.9 на стр. 60)
Пусть векторное подпространство $U \subset \Bbbk^n$ порождается строками матрицы A и пусть самые левые ненулевые элементы строк приведённой ступенчатой матрицы A_{red}, полученной из A элементарными преобразованиями строк, находятся в столбцах с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Тогда $(n-r)$ классов $[e_i]$ стандартных базисных векторов пространства $\Bbbk^n$ с номерами i, отличными от $j_1, j_2, \ldots, j_r$, образуют базис фактор пространства $\Bbbk^n\,/\,U$.

Доказательство. Проекция пространства $\Bbbk^n$ на линейную оболочку базисных векторов e_{j_ν} вдоль дополнительного координатного подпространства, натянутого на остальные базисные векторы e_i, переводит строки приведённой ступенчатой матрицы A_{red} ровно в базисные векторы $e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_r}$ и, тем самым, изоморфно отображает U на линейную оболочку этих векторов. Это означает, что подпространство U трансверсально ядру проекции, т. е. имеет нулевое пересечение с линейной оболочкой базисных векторов e_i. Поэтому к этим векторам применимо предл. 4.9. □

Пример 6.4 (продолжение прим. 6.1 на стр. 74)
Пусть подпространство $U \subset \mathbb{Q}^5$ порождено строками матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из прим. 6.1 на стр. 74. Методом Гаусса мы построили в U базис с приведённой ступенчатой матрицей координат

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

самые левые ненулевые строк которой имеют номера 1, 2, 5. Отсюда, согласно сл. 6.1, мы заключаем, что классы $[e_3]_U$ и $[e_4]_U$ стандартных базисных векторов e_3, e_4 с дополнительными к 1, 2, 5 номерами образуют базис в факторе $\mathbb{Q}^5\,/\,U$.

6.5. Расположение подпространства относительно базиса. В этом разделе мы покажем, что в каждом подпространстве $U \subset \Bbbk^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат. Отсюда вытекает, в частности, что приведённая ступенчатая матрица A_{red}, полученная из матрицы A элементарными преобразованиями строк, не зависит от выбора цепочки преобразований и даже от собственно матрицы A, а зависит только от линейной оболочки строк матрицы A.

Предложение 6.1

Для каждого векторного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ размерности r множество $\{1, \dots, n\}$ можно[1] так разбить в объединение двух непересекающихся дополнительных подмножеств

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-r}\} \quad \text{и} \quad J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \smallsetminus I\,,$$

чтобы линейные оболочки $E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}})$ и $E_J = \operatorname{span}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r})$ стандартных базисных векторов $e_\nu \in \Bbbk^n$ удовлетворяли следующим эквивалентным условиям:

1) подпространства U и E_I трансверсальны, т. е. $U \cap E_I = 0$

2) ограничение на подпространство U линейной проекции пространства V на подпространство E_J вдоль подпространства E_I

$$p : V \twoheadrightarrow E_J\,, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}})$$

является изоморфизмом между U и E_J

3) ограничение на подпространство E_I линейного отображения факторизации

$$\pi : V \twoheadrightarrow V/U\,, \quad v \mapsto [v]_U$$

является изоморфизмом между E_I и V/U

4) в подпространстве U найдутся r таких векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$, что $u_\nu - e_{j_\nu} \in E_I$ при всех $1 \leqslant \nu \leqslant r$.

При выполнении этих условий векторы $u_1, u_2, \dots, u_r$ из условия (4) автоматически образуют базис подпространства U и однозначно определяются подпространством U и выбором разложения $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ обладающего свойствами (1) – (4).

Доказательство. Пусть векторы $v_1, v_2, \dots, v_r \in U$ образуют базис подпространства U. По лемме о замене[2] некоторые r векторов $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}$ стандартного базиса в $\Bbbk^n$ можно заменить векторами v_j так, чтобы полученный в результате набор $v_1, v_2, \dots, v_r, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}}$ остался базисом в $\Bbbk^n$. В таком случае линейная оболочка $E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}})$ оставшихся базисных векторов трансверсальна подпространству U, т. е. обладает свойством (1). Это доказывает существование разложения, обладающего свойством (1). Покажем теперь, что условия (1) – (4) эквивалентны друг другу.

Упражнение 6.5. Убедитесь, что ядро ограничения отображения p на подпространство U и ядро ограничения отображения π на подпространство E_I оба равны $U \cap E_I$.

[1] Как правило, многими способами.

[2] См. лем. 4.2 на стр. 49.

Из условия (1) вытекает, что $\ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I = 0$. Поэтому оба ограничения $p|_U : U \to E_J$ и $\pi|_{E_I} : E_I \to V/U$ инъективны. Так как $\dim U = r = \dim E_J$ и $\dim E_I = n - r = \dim V/U$, оба ограничения — изоморфизмы. Таким образом, (1) влечёт (2) и (3). Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт равенство $0 = \ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I$, т. е. условие (1). Условие (4) утверждает, что r векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ из r-мерного подпространства U переводятся проекцией p в стандартные базисные векторы r-мерного координатного подпространства E_J, что равносильно условию (2). Наконец, если условия (1)-(4) выполняются, то проекция $p|_U : U \to E_J$ является изоморфизмом, и в U есть единственный базис $u_1, u_2, \dots, u_r$, переводимый эти изоморфизмом в стандартный базис $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}$ пространства E_J. □

Замечание 6.1. Векторное подпространство $U \subset \Bbbk^n$ размерности r может быть трансверсально к нескольким и даже ко всем[1] $(n-r)$-мерным координатным подпространствам E_I. На координатном языке условие (4) в предл. 6.1 означает, что матрица координат векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ содержит в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$ единичную подматрицу размера $r \times r$. Ниже мы увидим, что метод Гаусса строит в подпространстве U именно такой базис $u_1, u_2, \dots, u_r$ с лексикографически[2] минимально возможной для данного U последовательностью номеров $j_1, \dots, j_r$.

6.5.1. Комбинаторный тип подпространства. Лексикографически минимальный набор индексов $j_1, \dots, j_r$, для которого выполняются условия предл. 6.1, называется *комбинаторным типом* подпространства $U \subset \Bbbk^n$. Комбинаторный тип имеет следующее альтернативное описание. Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ обозначим через $V_{\leqslant k}$ линейную оболочку первых k стандартных базисных векторов $e_1, \dots, e_k$, а через $V_{>k}$ — линейную оболочку остальных стандартных базисных векторов $e_{k+1}, \dots, e_n$. При этом мы полагаем $V_{\leqslant 0} = V_{>n} = 0$ и $V_{>0} = V_{\leqslant n} = V$. Также обозначим через $p_k : \Bbbk^n \twoheadrightarrow V_{\leqslant k}$ проекцию на $V_{\leqslant k}$ вдоль $V_{>k}$. Эта проекция стирает последние $n-k$ координат каждого вектора $v \in \Bbbk^n$ и при $k = 0$ представляет собою нулевое отображение $p_0 : \Bbbk^n \to 0$, а при $k = n$ — тождественный эндоморфизм $p_n = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n} : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n$. Рассмотрим последовательность $d_0, d_1, \dots, d_n$ размерностей

$$d_k = \dim p_k(U) = n - \dim \ker p_k|_U = n - \dim(U \cap V_{>k})\,. \tag{6-12}$$

Она имеет $d_0 = 0$, $d_n = r$ и монотонно не убывает, а каждое её приращение $d_k - d_{k-1} \leqslant 1$, поскольку любые два соседние подпространства неубывающей цепочки

$$0 = U \cap V_{>n} \subseteq U \cap V_{>(n-1)} \subseteq U \cap V_{>(n-2)} \subseteq \dots \subseteq U \cap V_{>1} \subseteq U \cap V_{>0} = U$$

либо совпадают, либо большее из них имеет размерность ровно на единицу больше.

Упражнение 6.6. Убедитесь в этом.

Предложение 6.2

Для данного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ размерности r следующие три возрастающие последовательности натуральных чисел совпадают друг с другом:

[1] Над бесконечным полем $\Bbbk$ «случайное» r-мерное подпространство $U \subset V$ почти наверняка будет именно таким.

[2] Напомню, что *лексикографический порядок* на множестве r-буквенных слов $x_1 x_2 \dots x_r$, составленных из букв некоего упорядоченного алфавита X, представляет собою стандартное упорядочение всех этих слов по алфавиту, при котором слово w_1 меньше слова w_2 если первая слева различающаяся буква этих слов в слове w_1 меньше, чем в слове w_2.

1) лексикографически минимальный набор индексов $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$, удовлетворяющий условиям предл. 6.1 на стр. 81

2) набор номеров $j_1, \dots, j_r$ базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, полученной методом Гаусса из матрицы координат любых векторов, порождающих U

3) последовательность $k_1, \dots, k_r$ тех значений $k \geqslant 1$, для которых $d_k - d_{k-1} = 1$ в последовательности размерностей (6-12).

Доказательство. Ненулевые строки $u_1, \dots, u_r$ приведённой ступенчатой матрицы из (2) составляют в пространстве U базис, удовлетворяющий условиям предл. 6.1 для $J = \{j_1, \dots, j_r\}$. Так как проекции $p_k(u_\nu)$ векторов u_ν с $j_\nu \leqslant k$ линейно независимы в силу ступенчатости матрицы координат векторов u_ν, а векторы u_μ с $j_\mu > k$ лежат в $\ker p_k$, первые векторы составляют базис в $p_k(U)$, а последние — базис в пересечении $\ker p_k|_U = U \cap V_{>k}$. Поэтому те номера k, для которых $\dim(U \cap V_{>k}) > \dim(U \cap V_{>(k-1)})$, суть в точности номера $j_1, \dots, j_r$. Это доказывает совпадение последовательностей (2) и (3).

Докажем совпадение последовательностей (1) и (2). Пусть матрица координат базисных векторов $w_1, \dots, w_r$ пространства U содержит единичную подматрицу в столбцах с номерами $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$. Так как проекции $p_k(w_\nu)$ векторов w_ν с $j_\nu^{\min} \leqslant k$ линейно независимы, количество таких векторов при каждом k не превышает размерности $\dim p_k(U)$, которая по уже доказанному равна количеству векторов u_ν с $j_\nu \leqslant k$. Тем самым, количество не превышающих k чисел $j_\nu^{\min}$ при каждом $k = 1, \dots, n$ не больше количества не превышающих k чисел j_ν, и значит, набор $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$ не может быть лексикографически меньше набора $j_1, \dots, j_r$. □

Следствие 6.2
В каждом подпространстве $U \subset \Bbbk^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат M_U, и сопоставление подпространству U этой матрицы M_U устанавливает биекцию между приведёнными ступенчатыми матрицами, имеющими r ненулевых строк, и r-мерными подпространствами в $\Bbbk^n$. □

Упражнение 6.7. Убедитесь, что приведённые ступенчатые матрицы с номерами базисных столбцов $j_1, \dots, j_r$ образуют в пространстве $\mathrm{Mat}_{r\times n}(\Bbbk)$ аффинное подпространство размерности

$$r(n-r) - \sum_{\nu=1}^{r} (j_\nu - \nu + 1)\,,$$

и докажите тождество

$$\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)} = \sum_{\lambda \subset \Pi_{r\times(n-r)}} q^{|\Pi_{r\times(n-r)} \smallsetminus \lambda|}\,,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга[1] λ, лежащим внутри прямоугольника $\Pi_{r\times(n-r)}$ размера $r \times (n-r)$ так, что левые верхние углы диаграмм и прямоугольника совпадают, а показатель $|\Pi_{r\times(n-r)} \smallsetminus \lambda|$ справа равен количеству клеток в дополнении диаграммы до прямоугольника. Пустая диаграмма и весь прямоугольник тоже учитываются.

[1] См. пример 1.3 на стр. 7 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-01.pdf.

Упр. 6.1. Если матрица координат векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ содержит единичную $r \times r$ матрицу в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$, то при j_i-я координата вектора $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ равна λ_i каждом $i = 1, \dots, r$. Поэтому такой вектор зануляется только когда все $\lambda_i = 0$.

Упр. 6.2. Если $ad - bc \neq 0$, то согласно форм. (5-8) на стр. 64 матрица

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, и исходные строки w_i, w_j линейно выражаются через преобразованные строки $w_i' = aw_i + bw_j$, $w_j' = cw_i + dw_j$ по формулам $w_i = a'w_i' + b'w_j'$, $w_j = c'w_i' + d'w_j'$.

Упр. 6.6. Так как $\dim V_{>(k-1)} - \dim V_{>k} = 1$ и $\dim(U + V_{>(k-1)}) \geqslant \dim(U + V_{>k})$, имеем

$$\begin{aligned} \dim(U \cap V_{>(k-1)}) - \dim(U \cap V_{>k}) = \dim U + \dim V_{>(k-1)} - \dim(U + V_{>(k-1)}) - \\ - \dim U - \dim V_{>k} + \dim(U + V_{>k}) \leqslant 1\,. \end{aligned}$$

Упр. 6.7. Если отнять из произвольной такой матрицы матрицу E_J, имеющую единичную $r \times r$ подматрицу в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$ и нули в остальных местах, то получится матрица, у которой равны нулю все элементы в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$, а также, при каждом $i = 1, \dots, r$, все элементы i-й строки в клетках с 1-й по j_i-ю включительно. Ну а остальные $r^2 + \sum\limits_{\nu=1}^{r} (i_\nu - \nu + 1)$ элементов могут принимать любые значения. Тождество выражает собою равенство количества r-мерных векторных подпространств в n-мерном координатном пространстве над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов количеству приведённых ступенчатых матриц с r ненулевыми строками в $\mathrm{Mat}_{r\times n}(\mathbb{F}_q)$.