§3. Евклидова плоскость

Этот параграф посвящён метрической геометрии. Мы определим *длины* и *углы* — величины, по природе своей являющиеся *действительными числами* и характеризующиеся специфическими для поля $\mathbb{R}$ отношениями больше – меньше или ближе – дальше. Поэтому всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Определение 3.1

Скалярным произведением (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется симметричная билинейная положительная функция $V \times V \to \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(v, w) \in \mathbb{R}$. При этом *симметричность* означает, что $(u, w) = (w, u)$ для всех $u, w \in V$, *билинейность* — что

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2),$$

а *положительность* — что $(v, v) > 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V$.

Пример 3.1 (стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^n$)

Скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ координатного пространства $\mathbb{R}^n$, заданное формулой $(u, w) \overset{\text{def}}{=} \sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, называется *стандартным*.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что это скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно.

3.1. Длина вектора и перпендикулярность. Неотрицательное число $|v| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ называется *длиной* вектора v евклидова пространства V. Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Скалярное произведение $V \times V \to \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \to \mathbb{R}$ как

$$(u, w) = \left(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2\right)/2. \tag{3-1}$$

Векторы $a, b \in V$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если $(a, b) = 0$. Если a и b перпендикулярны, то квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов a и b по *теореме Пифагора* (см. рис. 3◇1):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2. \tag{3-2}$$

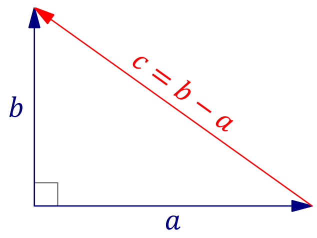

Рис. 3◇1. Теорема Пифагора.

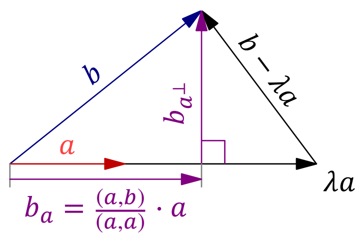

Рис. 3◇2. Ортогональная проекция b на a.

Предложение 3.1
Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора a и произвольного вектора b существует единственная пара таких векторов b_a и $b_{a^\perp}$, что b_a пропорционален a, $b_{a^\perp}$ перпендикулярен a, и $b = b_a + b_{a^\perp}$ (см. рис. 3◇2). Эти векторы выражаются через a и b как

$$b_a = \frac{(a,b)}{(a,a)}\,a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a,b)}{(a,a)}\,a\,, \tag{3-3}$$

причём $b_{a^\perp} = 0$ если и только если a и b пропорциональны, а $b_a = 0$ если и только если b перпендикулярен a.

Доказательство. Мы ищем такие векторы $b_a = \lambda a$ и $b_{a^\perp} = b - \lambda a$, что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a,b) - \lambda\,(a,a) = 0\,.$$

Так как $(a,a) \neq 0$, это равенство выполняется при единственном $\lambda = (a,b)/(a,a)$. При таком λ условие $b_a = \lambda a = 0$ равносильно равенству $(a,b) = 0$. Условие $b_{a^\perp} = b - \lambda a = 0$ означает пропорциональность векторов a и b. □

Определение 3.2
Векторы b_a и $b_{a^\perp}$ из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора b на одномерное подпространство $\mathbb{R}\cdot a$, порождённое вектором a, и *нормальной составляющей* вектора b относительно a.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что векторы b_a и $b_{a^\perp}$ не меняются при замене вектора a на пропорциональный вектор λa с $\lambda \neq 0$.

Следствие 3.1 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)
Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a,b)| \leqslant |a| \cdot |b|\,, \tag{3-4}$$

которое обращается в равенство если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если $a = b = 0$, обе части неравенства нулевые. Если $a \neq 0$, то определена нормальная составляющая $b_{a^\perp}$ вектора b относительно a, и её скалярный квадрат

$$(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b,b) - (a,b)^2/(a,a) \geqslant 0 \tag{3-5}$$

зануляется если и только если b пропорционален a. Домножая обе части (3-5) на (a,a), получаем $(b,b)(a,a) \geqslant (a,b)^2$, что равносильно (3-4). □

Пример 3.2 (неравенство Коши – Буняковского для чисел)
Неравенство (3-4) применительно к векторам евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ из прим. 3.1 утверждает, что для любых двух наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ выполняется неравенство $(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$, обращающееся в равенство если и только если эти наборы чисел пропорциональны.

Следствие 3.2 (неравенство треугольника)
Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*[1]

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{3-6}$$

(см. рис. 3◇3). Оно обращается в равенство если и только если векторы a и b *сонаправлены*, т. е. один получается из другого умножением на *неотрицательное* число.

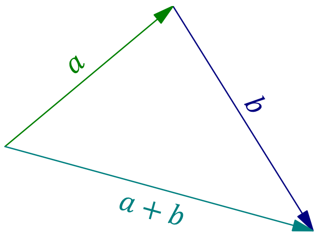

Рис. 3◇3. Неравенство треугольника.

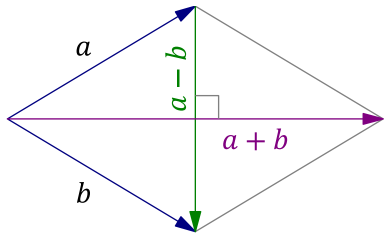

Рис. 3◇4. Диагонали ромба.

Доказательство. Возводя обе части неравенства $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $(a + b, a + b) \leqslant (a, a) + 2\,|a| \cdot |b| + (b, b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство $(a, b) \leqslant |a| \cdot |b|$, отличающееся от неравенства (3-4) отсутствием модуля в левой части. При $(a, b) < 0$ оно заведомо выполняется в строгой форме. При $(a, b) \geqslant 0$ оно выполняется по сл. 3.1 и превращается в равенство если и только если $b = \lambda a$, где $\lambda \geqslant 0$, так как $(a, b) \geqslant 0$. □

Упражнение 3.3. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $(a+b, a-b) = 0$ для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$, см. рис. 3◇4.

3.1.1. Расстояние между точками. Аффинные пространства над евклидовыми векторными пространствами также называются *евклидовыми*. Длина $|\overrightarrow{ab}|$ вектора $\overrightarrow{ab}$, соединяющего точки a и b такого пространства, называется *расстоянием* между a и b и обозначается $|a, b|$ или $|b - a|$. Обратите внимание, что $|b - a| = |a - b|$, так же как и $|a, b| = |b, a|$. Неравенство треугольника (3-6) на языке точек означает, что для любых трёх точек a, b, p выполняется неравенство $|p - a| + |b - p| \geqslant |b - a|$, которое обращается в равенство если и только если векторы $\overrightarrow{ap}$ и $\overrightarrow{pb}$ сонаправлены. Последнее равносильно тому, что точка p является барицентрической комбинацией[2] точек a и b с *неотрицательными* весами.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом.

В вещественном аффинном пространстве множество всех неотрицательных барицентрических комбинаций двух различных точек $a \neq b$ называется *отрезком* и обозначается

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geqslant 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1\}\,.$$

Мы заключаем, что в евклидовом аффинном пространстве отрезок $[a, b]$ представляет собою ГМТ x, удовлетворяющих равенству $|a - x| + |x - b| = |a - b|$.

[1] Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».
[2] См. n° 1.5 на стр. 16.

3.1.2. Перпендикулярные прямые. Две прямые в евклидовом пространстве называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны их векторы скоростей.

Предложение 3.2 (ортогональная проекция точки на прямую)
Для любых прямой ℓ и точки $p \notin \ell$ следующие два условия на точку $q \in \ell$ эквивалентны:

1) $|x - p| > |q - p|$ для всех отличных от q точек $x \in \ell$

2) прямая (pq) перпендикулярна прямой ℓ.

Точка $q \in \ell$ с такими свойствами существует и единственна[1].

Доказательство. Пусть прямая ℓ задаётся параметрическим уравнением $o + tv$, где t пробегает $\mathbb{R}$, $o \in \ell$ — произвольно зафиксированная точка, v — вектор скорости прямой ℓ. Точка $q \in \ell$, удовлетворяющая условию (1) очевидно единственна, если существует. С другой стороны, по предл. 3.1, применённому к векторам $a = v$ и $b = \overrightarrow{op}$, на прямой ℓ есть единственная такая точка $q \in \ell$, что векторы v и $\overrightarrow{qp}$ перпендикулярны, см. рис. 3◇5. Тем самым, условие (2) выполняется для единственной точки $q \in \ell$. При этом для любой отличной от неё точки $x \in \ell$ по теореме Пифагора $|\overrightarrow{px}|^2 = |\overrightarrow{pq}|^2 + |\overrightarrow{qx}|^2 > |\overrightarrow{pq}|^2$, откуда $|x - p| > |q - p|$. Тем самым, эта точка q одновременно удовлетворяет и условию (1). □

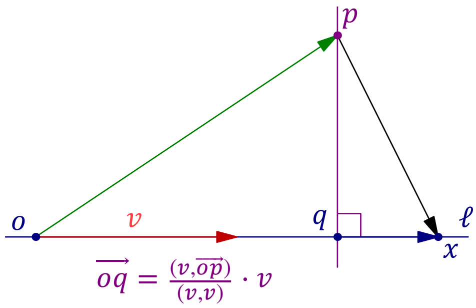

Рис. 3◇5.

Упражнение 3.5. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой.

3.2. Ортонормальные базисы. Векторы единичной длины принято называть *единичными*. Базис двумерного евклидова векторного пространства называется *ортонормальным*, если он состоит из двух перпендикулярных единичных векторов. С любой парой непропорциональных векторов a, b можно связать ортонормальный базис из векторов

$$e_1 = a/|a| \quad \text{и} \quad e_2 = b_{a^\perp}/|b_{a^\perp}|,$$

где $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a,b)/(a,a)$ — ортогональная проекция[2] вектора b на вектор a. Таким образом, на любой евклидовой плоскости есть ортонормальный базис.

Упражнение 3.6. Покажите, что каждый единичный вектор e на евклидовой плоскости включается ровно в два ортонормальных базиса (e, f) и $(e, -f)$, отличающиеся друг от друга ориентацией.

Предложение 3.3
Координаты вектора $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ в ортонормальном базисе e_1, e_2 равны его скалярным произведениям с базисными векторами: $x_1 = (u, e_1)$, $x_2 = (u, e_2)$, а скалярное произведение векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ вычисляется как в прим. 3.1 на стр. 33, т. е. $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

[1] Она называется *ортогональной проекцией* точки p на прямую ℓ.
[2] См. опр. 3.2 на стр. 34.

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства[1] $u = x_1e_1 + x_2e_2$ на векторы e_1 и e_2, второе — бесхитростным раскрытием скобок в выражении $(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)$. □

Пример 3.3 (уравнение прямой на евклидовой плоскости)
В координатах (x_1, x_2) относительно ортонормального базиса уравнение

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = c \tag{3-7}$$

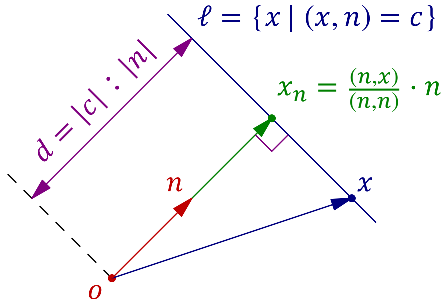

Рис. 3◇6. Пямая $(n, x) = c$.

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору $n = (\alpha_1, \alpha_2)$ и расположенную на расстоянии $|c| / |n|$ от начала координат в направлении этого вектора при $c > 0$ и в противоположном направлении при $c < 0$. Действительно, соотношение (3-7) означает, что скалярное произведение переменного вектора $x = (x_1, x_2)$ с фиксированным вектором n постоянно и равно $(n, x) = c$, т. е. прямая (3-7) заметается концами всех векторов x, имеющих заданную ортогональную проекцию $x_n = n \cdot (x, n)/(n, n) = n \cdot c/|n|^2$ на вектор n, см. рис. 3◇6. Длина этой проекции равна $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c| / |n|$, а её направление определяется знаком константы c: при $c > 0$ проекция сонаправлена с n, а при $c < 0$ — противоположно направлена. При $c = 0$ прямая (3-7) проходит через начало координат. К примеру, *срединный перпендикуляр* к отрезку $[a, b]$, т. е. прямая перпендикулярная вектору $a - b$ и проходящая через точку $(a + b)/2$, задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = \left(|a|^2 - |b|^2\right)/2 \,. \tag{3-8}$$

Две прямые $(n, x) = c_1$ и $(n, x) = c_2$, перпендикулярные одному и тому же вектору n удалены друг от друга на расстояние $|c_1 - c_2|/|n|$. В частности, расстояние от заданной точки a до прямой $(n, x) = c$, равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей и проходящей через точку a прямой $(n, x) = (n, a)$, можно вычислять как $|c - (n, a)| / |n|$.

Упражнение 3.7. Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых $(n_1, x) = c_1$ и $(n_2, x) = c_2$, задаются уравнениями $|n_2| \cdot \left(c_1 - (n_1, x)\right) = \pm|n_1| \cdot \left(c_2 - (n_2, x)\right)$ и перпендикулярны друг другу.

Предложение 3.4 (определитель Грама)
Если векторы e_1, e_2 составляют ортонормальный базис евклидова пространства V, то для любых векторов $u, w \in V$ и любой ненулевой функции площади $s : V \times V \to \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{s^2(u, w)}{s^2(e_1, e_2)} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов u, w).

Доказательство. Пусть $u = x_1e_1 + x_2e_2$, $w = y_1e_1 + y_2e_2$. Тогда по сл. 1.2 на стр. 13

$$s(u, w)/s(u, w) = \det(u, w) = x_1y_2 - x_2y_1 \,.$$

[1] Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 11.

С другой стороны, $(u,u)\cdot(w,w)-(u,w)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2 = (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2\,x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2-x_2y_1)^2$. □

Упражнение 3.8. Выведите из предл. 3.4 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

3.2.1. Евклидова площадь. Из предл. 3.4 вытекает, что для любых двух ортонормальных базисов (e_1', e_2') и (e_1'', e_2'') на евклидовой плоскости и любой ненулевой формы площади s отношение

$$\frac{s^2(e_1'', e_2'')}{s^2(e_1', e_2')} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\,,$$

откуда $s(e_1'', e_2'') = \pm s(e_1', e_2')$, т. е. все ортонормальные базисы имеют равную по абсолютной величине площадь. Функция площади s на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ называется *евклидовой*, если $s(e_1,e_2)=1$ для стандартного ортонормального базиса $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$. Всюду далее обозначения $s(u,v)$ и $s(abc)$ применительно в евклидову пространству $\mathbb{R}^2$ по умолчанию означают именно евклидову площадь. Ортонормальные базисы площади 1 называются *положительно ориентированными*, а площади -1 — *отрицательно ориентированными*.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что $|\det(a,b)| = |a|\cdot|b_{a^\perp}|$, т. е. модуль евклидовой площади параллелограмма равен произведению длин основания и опущенной на него высоты.

3.3. Углы и тригонометрия.

Пусть векторы e, $e^\perp$ составляют положительно ориентированный ортонормальный базис. Коэффициенты x, y разложения $f = x\cdot e + y\cdot e^\perp$ произвольного единичного вектора f по этому базису удовлетворяют соотношению $x^2+y^2=1$ и лежат на отрезке $[-1,1]$. Следовательно, существует такое число $\alpha\in\mathbb{R}$, что $x=\cos\alpha$ и $y=\sin\alpha$, причём любые два числа α', α'' с этим свойством различаются на целое число оборотов по единичной окружности, т. е. $\alpha'-\alpha''=2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, см. рис. 3◇7. Множество всех таких чисел называется *ориентированным углом* между единичными векторами e и f и обозначается

$$\measuredangle(e,f) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\in\mathbb{R} \mid f = e\cdot\cos\alpha + e^\perp\cdot\sin\alpha\}\,. \tag{3-9}$$

Функции $\cos t$ и $\sin t$ принимают на всех числах из $\measuredangle(e,f)$ одни и те же значения, которые мы будем записывать как $\cos\measuredangle(e,f)$ и $\sin\measuredangle(e,f)$. Таким образом, для любого положительно ориентированного ортонормального базиса e, $e^\perp$ и любого единичного вектора f выполняются соотношения[1]

$$\begin{aligned} f &= e\cdot\cos\measuredangle(e,f) + e^\perp\cdot\sin\measuredangle(e,f)\\ \cos\measuredangle(e,f) &= (e,f) = s(f,e^\perp)\\ \sin\measuredangle(e,f) &= s(e,f) = (e^\perp,f)\end{aligned} \tag{3-10}$$

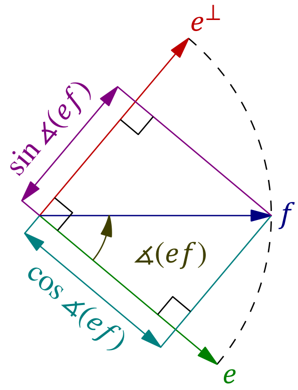

Рис. 3◇7.

Обратите внимание, что $(e,f)=(f,e)$ и $s(e,f)=-s(f,e)$, откуда $\cos\measuredangle(e,f)=\cos\measuredangle(f,e)$, $\sin\measuredangle(e,f)=-\sin\measuredangle(f,e)$. Тем самым, $\measuredangle(e,f)=-\measuredangle(f,e)$, т. е. углы, откладываемые против часовой стрелки считаются со знаком «+», а по часовой — со знаком «−».

Упражнение 3.10. Убедитесь, что единичный вектор $f = x\cdot e + y\cdot e^\perp$ дополняется до положительно ориентированного ортонормального базиса f, $f^\perp$ вектором $f^\perp = -ye + xe^\perp$ и выведите отсюда соотношения $\cos\measuredangle(e,f^\perp) = -\sin\measuredangle(e,f)$ и $\sin\measuredangle(e,f^\perp)=\cos\measuredangle(e,f)$.

[1] Вторая и третья строки вычисляют коэффициенты написанного в первой строке разложения по формулам из лем. 1.2 на стр. 11 и предл. 3.3 на стр. 36.

Раскладывая по ортонормальному базису $f, f^{\perp}$ произвольный единичный вектор

$$g = f \cdot \cos(\measuredangle(f,g)) + f^{\perp} \cdot \sin(\measuredangle(f,g))$$

и подставляя сюда разложения векторов $f, f^{\perp}$ по базису $e, e^{\perp}$, получаем в матричных обозначениях из n° 2.1.2 на стр. 23 равенство

$$\begin{aligned}
(e,e^{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\measuredangle(e,g) \\ \sin\measuredangle(e,g) \end{pmatrix} = g = (f,f^{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\measuredangle(f,g) \\ \sin\measuredangle(f,g) \end{pmatrix} = \\
= (e,e^{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\measuredangle(e,f) & -\sin\measuredangle(e,f) \\ \sin\measuredangle(e,f) & \cos\measuredangle(e,f) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\measuredangle(f,g) \\ \sin\measuredangle(f,g) \end{pmatrix} = \\
= (e,e^{\perp}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g) - \sin\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g) \\ \cos\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g) + \sin\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тем самым, для любой тройки единичных векторов e, f, g

$$\begin{aligned}
\cos\measuredangle(e,g) &= \cos\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g) - \sin\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g) \\
\sin\measuredangle(e,g) &= \cos\measuredangle(e,f)\cdot\sin\measuredangle(f,g) + \sin\measuredangle(e,f)\cdot\cos\measuredangle(f,g).
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Ориентированный угол $\measuredangle(a,b)$ между произвольными векторами a и b определяется как угол между сонаправленными с a и b единичными векторами $a/|a|$ и $b/|b|$. Таким образом

$$\cos\measuredangle(a,b) = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} \quad \text{и} \quad \sin\measuredangle(a,b) = \frac{s(a,b)}{|a|\cdot|b|}. \tag{3-12}$$

В частности, мы имеем ориентированную версию школьной формулы для площади:

$$s(a,b) = |a|\cdot|b|\cdot\sin\measuredangle(a,b). \tag{3-13}$$

Упражнение 3.11. Убедитесь, что для любых векторов $u, w \in V$ справедлива евклидова теорема косинусов: $|u+w|^2 = |u|^2 + |w|^2 + 2\cdot|u|\cdot|w|\cdot\cos\measuredangle(u,w)$.

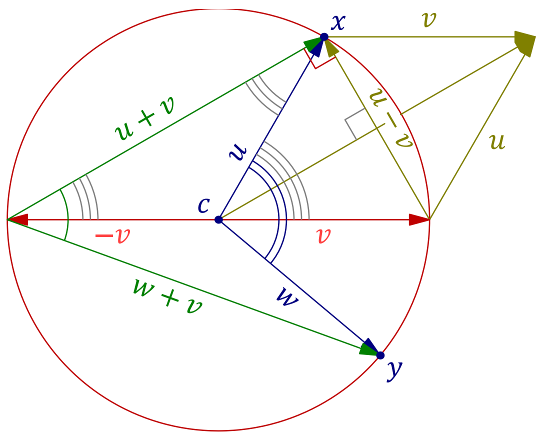

Рис. 3⋄8. Окружность и углы.

3.3.1. Окружности. ГМТ x, удалённых от данной точки на заданное расстояние ϱ, называется *окружностью* радиуса ϱ с центром c и обозначается $S(\varrho, c)$. Таким образом, точка x с радиус вектором $\overrightarrow{cx} = u$ лежит на окружности $S(\varrho, c)$ если и только если $(u, u) = \varrho^2$. Каждая проходящая через центр прямая с направляющим вектором v длины $|v| = \varrho$ пересекает окружность в точках $c \pm v$, см. рис. 3◇8. Отрезок с концами в этих точках называется *диаметром*. Поскольку для вектора v длины ϱ и любого вектора u выполняется равенство $(u+v, u-v) = (u,u) - \varrho^2$, точка $x = c + u$ лежит на окружности если и только если $(u+v, u-v) = 0$. Таким образом, окружность $S(\varrho, c)$ представляет собою ГМТ x, из которых её диаметр виден под прямым углом, см. рис. 3◇8.

Упражнение 3.12. При помощи рис. 3◇8 покажите, что дуга окружности видна из любой не лежащей на этой дуге точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра.

3.3.2. Двойное отношение точек на окружности. Двойное отношение четырёх конкурентных прямых[1] $\ell_1 = (op_1)$, $\ell_2 = (op_2)$, $\ell_3 = (op_3)$, $\ell_4 = (op_4)$ выражается по формуле (3-13) через углы между этими прямыми:

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = \frac{s(\overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_3)}{s(\overrightarrow{op}_2, \overrightarrow{op}_3)} : \frac{s(\overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_4)}{s(\overrightarrow{op}_2, \overrightarrow{op}_4)} = \frac{\sin \measuredangle p_1 o p_3}{\sin \measuredangle p_2 o p_3} : \frac{\sin \measuredangle p_1 o p_4}{\sin \measuredangle p_2 o p_4},$$

что ещё раз подтверждает его независимость от выбора точек $p_i \in \ell_i$. Если все пять точек o, $p_1, \dots, p_4$ лежат на одной окружности с центром в точке c, как на рис. 3◇9, то согласно упр. 3.12 вписанные углы с вершиной o в предыдущем равенстве можно заменить центральными углами:

$$\frac{\sin \measuredangle p_1 o p_3}{\sin \measuredangle p_2 o p_3} : \frac{\sin \measuredangle p_1 o p_4}{\sin \measuredangle p_2 o p_4} = \frac{\sin \measuredangle p_1 c p_3}{\sin \measuredangle p_2 c p_3} : \frac{\sin \measuredangle p_1 c p_4}{\sin \measuredangle p_2 c p_4}.$$

Стоящее в правой части число не зависит от точки p. Оно обозначается $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ и называется *двойным отношением четырёх точек окружности*.

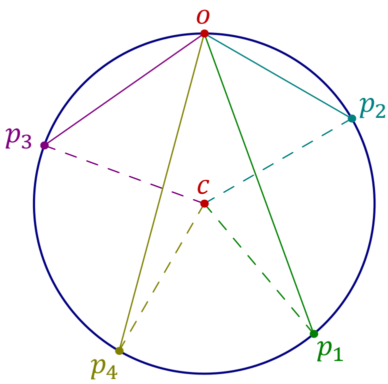

Рис. 3◇9. $[p_1, p_2, p_3, p_4]$.

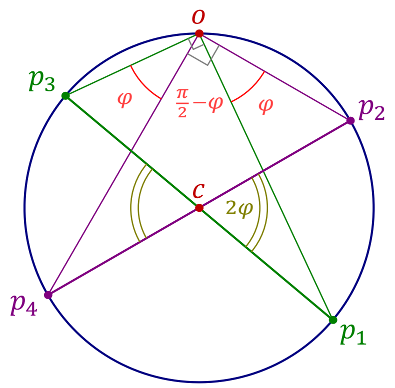

Рис. 3◇10. $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$.

Упражнение 3.13. Покажите, что когда отрезки $[p_1, p_3]$ и $[p_2, p_4]$ являются диаметрами, как на рис. 3◇10, двойное отношение выражается через угол $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{cp}_1, \overrightarrow{cp}_2)$ между ними по формуле $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -\sin^2\varphi / \cos^2\varphi = -\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$.

3.4. Движения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ евклидовой плоскости в себя называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е. $|p - q| = |f(p) - f(q)|$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Поскольку каждый отрезок $[a, b]$ представляет собою ГМТ x, для которых[2]

[1] См. n° 2.2.1 на стр. 27.

[2] См. n° 3.1.1 на стр. 35.

$|a-x|+|x-b| = |a-b|$, каждое движение биективно переводит любой отрезок $[a,b]$ в отрезок $[\varphi(a),\varphi(b)]$ той же длины. Тем самым, все движения биективны и переводят прямые в прямые. Согласно сл. 2.3 на стр. 32 движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

Упражнение 3.14. Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними[1].

Движения образуют в аффинной группе $\mathrm{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$ и обозначается $\mathrm{Isom}\mathbb{A}(V)$. Группа параллельных переносов T, очевидно, содержится в $\mathrm{Isom}\mathbb{A}(V)$.

3.4.1. Линейные ортогональные преобразования. Зафиксируем какую-нибудь начальную точку $o \in \mathbb{A}(V)$ и представим движение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ в виде композиции[2] $\varphi = \tau_v \circ \varphi_o$ параллельного переноса на вектор $v = \overrightarrow{o\varphi(o)}$ и линейного преобразования $\varphi_o : \overrightarrow{ox} \mapsto D_\varphi(\overrightarrow{ox})$, задаваемого дифференциалом $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ движения φ и оставляющего точку o на месте. Поскольку линейное преобразование $\varphi_o = \tau_{-v}\circ\varphi$ тоже является движением, оно сохраняет длины векторов, а следовательно и скалярные произведения: для всех $u, w \in V$ имеем[3] $\big(\varphi(u),\varphi(w)\big) = \big(|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2\big)/2 = \big(|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2\big)/2 = (v,w)$. Сохраняющие скалярное произведение линейные преобразования евклидова векторного пространства V называются *ортогональными* или *изометрическими*. Так как ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно сохраняет абсолютную величину евклидовой площади и по предл. 2.4 на стр. 25 имеет определитель ± 1. Ортогональные преобразования определителя $+1$ сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*. Ортогональные преобразования определителя -1 меняют ориентацию и называются *несобственными*.

Пример 3.4 (отражения)

Каждый ненулевой вектор $n \in V$ задаёт несобственное ортогональное преобразование $\sigma_\ell : V \to V$, переводящее вектор n в $\sigma_n(n) = -n$ и тождественно действующее на ортогональной этому вектору прямой $\ell = n^\perp$, которая задаётся в ортонормальном базисе уравнением $(n,x) = 0$. Мы будем называть преобразование σ_n *отражением*[4] в прямой ℓ. Отражение σ_ℓ переводит каждый вектор $v \in V$ в вектор $\sigma_\ell(v)$, который имеет ту же нормальную составляющую[5] относительно n, что и v, однако противоположную по знаку ортогональную проекцию на n, см. рис. 3◇11. Тем самым,

$$\sigma_\ell(v) = v - 2\,\frac{(n,v)}{(n,n)}\cdot n\,. \tag{3-14}$$

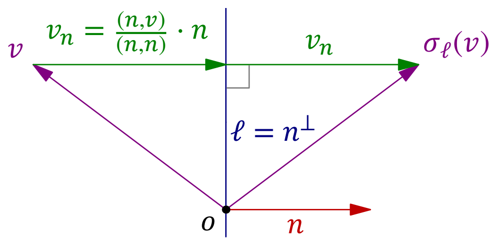

Рис. 3◇11. Отражение σ_ℓ.

Упражнение 3.15. Проверьте прямым вычислением, что преобразование (3-14) линейно и сохраняет скалярные произведения.

[1] Т. е. покажите, что в каждом из этих трёх случаев единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

[2] См. предл. 2.7 на стр. 29.

[3] См. формулу (3-1) на стр. 33.

[4] В школьном курсе его обычно называют *осевой симметрией*.

[5] См. опр. 3.2 на стр. 34.

Предложение 3.5
Каждое несобственное ортогональное линейное преобразование плоскости является отражением.

Доказательство. Поскольку несобственное преобразование φ не тождественно, $\varphi(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора $v \in V$. Так как φ сохраняет начальную точку o и середину s отрезка $[v, \varphi(v)]$, оно действует на треугольник $\triangle osv$ так же, как отражение в срединном перпендикуляре (os) к отрезку $[v, \varphi(v)]$. Поэтому $\varphi = \sigma_{(os)}$. □

Предложение 3.6
Каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

Доказательство. Если собственное ортогональное линейное преобразование $\varphi : V \to V$ переводит единичный вектор e_1 в вектор $f_1 = \varphi(e_1)$, то оно переводит вектор e_2, дополняющий e_1 до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор f_2, дополняющий f_1 до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3⋄12. Тем самым, φ представляет собою поворот на ориентированный угол $\vartheta = \measuredangle(e_1, f_1)$. □

Упражнение 3.16. Убедитесь, что матрица[1] поворота против часовой стрелки на угол ϑ имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе вид $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

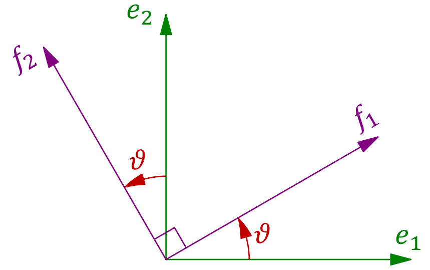

Рис. 3⋄12. Поворот.

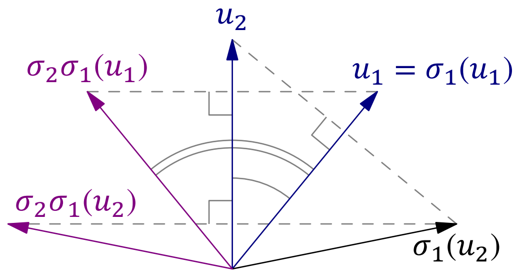

Рис. 3⋄13. Композиция отражений.

Упражнение 3.17. Покажите, что композиция $\sigma_2 \circ \sigma_1$ отражений в прямых с векторами скоростей u_1 и u_2 является поворотом на угол $2\measuredangle(u_1, u_2)$ в направлении от u_1 к u_2, см. рис. 3⋄13.

3.4.2. Описание изометрий аффинной евклидовой плоскости. Из предыдущего вытекает, что любое несобственное движение евклидовой аффинной плоскости является композицией $\tau_w \circ \sigma_\ell$ отражения и сдвига, а любое собственное — композицией $\tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$ сдвига с поворотом $\varrho_{o,\vartheta}$ вокруг некоторой точки o на какой-то угол ϑ.

Собственное движение $\varphi = \tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta}$ с ненулевым углом ϑ имеет неподвижную точку — конец вектора $\overrightarrow{pq} = u$, который является диагональю ромба с вершиной o и ориентированным углом $\measuredangle(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}) = -\vartheta$, см. рис. 3⋄14 на стр. 43. По предл. 3.6 преобразование φ является поворотом вокруг точки q. Так как поворот вокруг q на угол ϑ переводит o в $\varphi(o)$, мы заключаем, что $\varphi = \varrho_{q,\vartheta}$.

Упражнение 3.18. Найдите координаты точки q относительно положительно ориентированного ортонормального репера $(o;\, u_1, u_2)$, вектор u_1 которого сонаправлен с u.

[1] См. n° 2.1.2 на стр. 23.

Несобственное движение $\varphi = \tau_w \circ \sigma_\ell$ является композицией $\varphi = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ отражения относительно сдвинутой на половину вектора w прямой $\tau_{w/2}(\ell)$ и параллельного этой прямой сдвига на вектор w_ℓ — ортогональную проекцию вектора w на прямую ℓ, см. рис. 3◇15. Действительно, композиции $\tau_w \circ \sigma_\ell$ и $\tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ одинаково действуют на аффинный репер $(o;\ v, n)$ с началом в произвольной точке $o \in \ell$ и ортонормальными базисными векторами v, n, направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямой ℓ, как на рис. 3◇15.

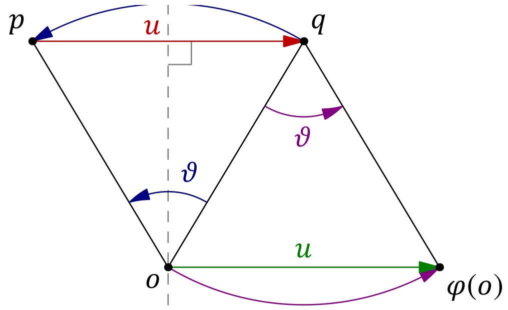

Рис. 3◇14. $\tau_u \circ \varrho_{o,\vartheta} = \varrho_{p,\vartheta}$.

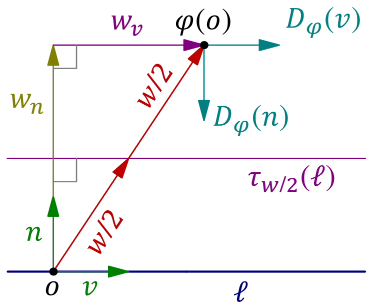

Рис. 3◇15. $\tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$.

Композиция отражения со сдвигом вдоль оси этого отражения называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения φ в виде скользящей симметрии

$$\lambda_{v,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v\,, \quad \text{где} \quad v||\ell\,,$$

замечательно тем, что отражение и сдвиг в нём коммутируют друг с другом, а само это представление единственно: прямая ℓ однозначно определяется преобразованием φ как геометрическое место середин отрезков $[p, \varphi(p)]$, после чего сдвиг $\tau_v = \varphi \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \varphi$ тоже однозначно восстанавливается по φ и ℓ. Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

Теорема 3.1 (теорема Шаля[1])
Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобственное — скользящей симметрией. □

Упражнение 3.19. Покажите, что композиция отражения относительно прямой ℓ_1 с последующим отражением относительно параллельной ей прямой ℓ_2 является сдвигом на удвоенное расстояние между ℓ_1 и ℓ_2 в направлении от ℓ_1 к ℓ_2 вдоль их общей нормали.

Следствие 3.3
Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — в композицию трёх. □

3.5. Комплексные числа. Обозначим через $\mathbb{C}$ двумерное евклидово пространство с фиксированным ортонормальным базисом, векторы которого будем обозначать 1 и i. В разложении произвольного вектора $z \in \mathbb{C}$ по этому базису вектор 1 обычно опускают и пишут $z = x + iy$, имея в виду вектор с координатами (x, y) в базисе 1, i. Такой вектор имеет длину $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вещественные числа x, y и $|z|$ называются, соответственно, *действительной частью*, *мнимой*

[1] *Michel Floréal Chasles* (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

частью и *модулем комплексного числа* $z \in \mathbb{C}$. Ориентированный угол $\measuredangle(1, z)$ между базисным вектором 1 и вектором z называется *аргументом* числа z и часто обозначается через[1]

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cos\alpha + i\,|z| \sin\alpha\}\,.$$

Векторы $z \in \mathbb{C}$ называют *комплексными числами*, поскольку их можно не только складывать, но и умножать. Произведение $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ определяется как вектор, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\begin{gathered} |z_1 z_2| \overset{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) = \{\vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \operatorname{Arg}(z_1)\,,\ \vartheta_2 \in \operatorname{Arg}(z_2)\} \end{gathered} \tag{3-15}$$

Базисный вектор 1 является нейтральным элементом относительно умножения, что оправдывает его опускание в формулах вроде $z = x + yi = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Обратите внимание, что оба равенства суть верные равенства в $\mathbb{C}$, если понимать в них сложение и умножение как сложение и умножение комплексных чисел и считать поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ вложенным в плоскость $\mathbb{C}$ в виде координатной прямой[2] $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$.

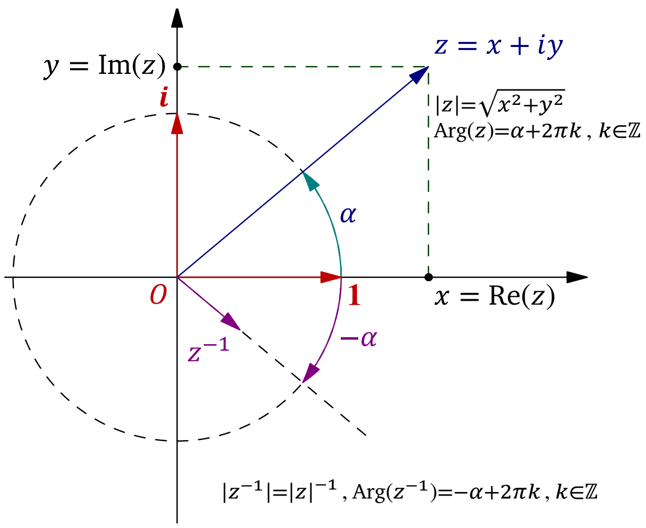

Рис. 3⋄16. Числа $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ и $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos\alpha - i \sin\alpha)$.

Обратным по умножению к ненулевому вектору $z \in \mathbb{C}$ является вектор z^{-1} с противоположным аргументом $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg}(z)$ и обратным модулем $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, см. рис. 3⋄16.

Предложение 3.7

Комплексные числа образуют поле.

[1] Напомню, что ориентированный угол — это множество всех вещественных чисел, имеющих заданные синус и косинус, как в форм. (3-9) на стр. 38. Любые два числа из этого множества различаются на целое число оборотов по единичной окружности.

[2] Обратите внимание, что правило умножения отрицательных вещественных чисел («минус на минус даёт плюс») согласуется с формулами (3-15).

Доказательство. Из всех свойств поля[1] нам остаётся проверить только распределительный закон $a(b+c) = ab + ac$. На геометрическом языке это равенство означает, что задаваемое умножением на фиксированный вектор $a \in \mathbb{C}$ отображение $\mu_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az$, аддитивно, т. е. $\mu_a(b+c) = \mu_a(b) + \mu_a(c)$. Отображение μ_a представляет собою *поворотную гомотетию* — композицию поворота на угол $\operatorname{Arg}(a)$ вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром в нуле. Так как и поворот, и гомотетия линейны, линейно и μ_a. □

3.5.1. Алгебраическая запись комплексных чисел. Поскольку базисный вектор i удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$ и умножение дистрибутивно по отношению к сложению, в поле $\mathbb{C}$ выполняется равенство

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \tag{3-16}$$

Обратное к числу $z = x + iy$ число z^{-1} равно

$$z^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{|z|^2} - i\,\frac{y}{|z|^2}\,. \tag{3-17}$$

Число $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = x + iy$. В терминах комплексного сопряжения

$$z^{-1} = \overline{z}/|z|^2\,.$$

Геометрически, комплексное сопряжение $z \mapsto \overline{z}$ представляет собою отражение комплексной плоскости относительно вещественной оси $\mathbb{R} \cdot 1$. С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля $\mathbb{C}$, т. е. для всех $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = z\,, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2\,, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2\,.$$

Упражнение 3.20. Покажите, что следующие свойства автоморфизма[2] φ поля $\mathbb{C}$ эквивалентны: а) $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ б) φ является линейным преобразованием двумерного векторного пространства $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ в) либо $\varphi(z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$, либо $\varphi(z) = \overline{z}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

3.6. Преобразования подобия. Отображение $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ евклидовой аффинной плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$ в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все расстояния между точками в одно и тоже число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа $\gamma = \gamma(\varphi)$, зависящая только от φ и называемая *коэффициентом подобия*, что $|\varphi(p) - \varphi(q)| = \gamma|p - q|$ для всех точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Например, каждое движение является подобием с коэффициентом 1. Подобия образуют группу преобразований, которая называется *группой подобий*. Тот же аргумент, что и для движений[3], показывает, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть, являются аффинными преобразованиями.

Упражнение 3.21. Убедитесь в этом и в том, что подобия переводят окружности в окружности.

Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

[1]См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf.
[2]См. n° 2.4.1 на стр. 30.
[3]См. n° 3.4 на стр. 40.

Лемма 3.1
Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

Доказательство. Беря композицию подобия φ с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства $V \simeq \mathbb{R}^2$. Тогда для любых двух векторов $u, w \in V$ имеем[1]

$$\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \left|\varphi(u) + \varphi(w)\right|^2 - \left|\varphi(u)\right|^2 - \left|\varphi(w)\right|^2 = \\ = \left|\varphi(u + w)\right|^2 - \left|\varphi(u)\right|^2 - \left|\varphi(w)\right|^2 = \gamma^2\big(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2\big) = \gamma^2(u, w)\,,$$

откуда

$$\cos\measuredangle\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \frac{(\varphi(u), \varphi(w))}{|\varphi(u)| \cdot |\varphi(w)|} = \frac{(u, w)}{|u| \cdot |w|} = \cos\measuredangle(u, w)\,,$$

т. е. $\measuredangle\big(\varphi(u), \varphi(w)\big) = \pm\measuredangle(u, w)$. □

3.6.1. Подобия как аффинные преобразования комплексной прямой. Зафиксируем в двумерном вещественном евклидовом пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $1, i$ и отождествим это пространство с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, как в n° 3.5 выше. Это позволяет рассматривать вещественную аффинную плоскость $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}(V)$ как комплексную аффинную прямую $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. Мы собираемся показать, что группа собственных подобий вещественной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ совпадает с аффинной группой комплексной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.

Предложение 3.8
Каждое собственное подобие $\varphi : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ является комплексным аффинным преобразованием вида $z \mapsto az + b$, а каждое несобственное — полуаффинным преобразованием вида $z \mapsto a\overline{z} + b$, где числа $a, b \in \mathbb{C}$ однозначно определяются подобием φ. Наоборот, для любых $a, b \in \mathbb{C}$ преобразования вида $z \mapsto az + b$ и $z \mapsto a\overline{z} + b$ являются, соответственно, собственным и несобственным подобиями.

Доказательство. Беря композицию собственного подобия φ со сдвигом, мы можем и будем считать, что φ оставляет на месте нуль $0 \in \mathbb{C}$. Так как φ сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число $\gamma \in \mathbb{R}$, преобразование φ является поворотной гомотетией, т. е. умножением на комплексное число $a = \varphi(1)$, что доказывает первое утверждение. Для несобственного подобия φ преобразование $z \mapsto \varphi(\overline{z})$, являющееся композицией φ с отражением в действительной оси, является собственным подобием и по уже доказанному имеет вид $z \mapsto az + b$. Поэтому $\varphi(z) = a\overline{z} + b$. □

Упражнение 3.22. Убедитесь в справедливости последнего утверждения из предл. 3.8.

Следствие 3.4
Для любых двух пар различных точек $a \neq b$ и $c \neq d$ имеется единственное собственное подобие переводящее a в c и b в d.

[1] Ср. с аналогичной выкладкой из n° 3.4.1 на стр. 41.

Доказательство. Неизвестные коэффициенты $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ искомого аффинного преобразования $z \mapsto x_1 z + x_2$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 a + x_2 = c \\ x_1 b + x_2 = d \,, \end{cases}$$

имеющей в поле $\mathbb{C}$ единственное решение[1] $x_1 = (c-d)/(a-b)$, $x_2 = (ad-bc)/(a-b)$. □

Следствие 3.5
Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

Доказательство. Аффинное преобразование $z \mapsto az + b$ с нетождественным дифференциалом $a \neq 1$ имеет неподвижную точку $c = b/(1-a)$ и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки. □

[1] См. лем. 1.2 на стр. 11.

Упр. 3.2. $\frac{(\lambda a,b)}{(\lambda a,\lambda a)} \cdot \lambda a = \frac{(a,b)}{(a,a)} \cdot a$.

Упр. 3.5. Если заданная точка p не лежит на заданной прямой ℓ, утверждение вытекает из предл. 3.2. Если $p \in \ell$, выберите p за начало отсчёта, обозначьте через e_1 вектор скорости прямой ℓ, возьмите любой вектор b, не пропорциональный ℓ и положите $e_2 = b_{e_1^\perp}$. Тогда $e_2 \neq 0$ и перпендикулярен e_1. Поэтому прямая $p + te_2$ перпендикулярна ℓ. Произвольный вектор $w = xe_1 + ye_2$ перпендикулярен e_1 если и только если $x = 0$. Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.6. Рассмотрим любой ортонормальный базис $e, e^\perp$. Если $f = xe + ye^\perp$ образует вместе с e ортонормальный базис, то $(e,f) = 0$ влечёт $x = 0$, после чего $(f,f) = 1$ влечёт $y^2 = 1$, т. е. $f = \pm e^\perp$.

Упр. 3.7. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.8. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u,v)^2 - (u,u)\cdot(u,v) \geqslant 0\,,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.4 равный квадрату отношения площадей $s(u,w)/s(e_1,e_2)$, положительному, когда u и w не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.9. $\det^2(a,b) = \det^2(a, b_a + b_{a^\perp}) = \det^2(a, b_{a^\perp}) = (a,a)\cdot(b_{a^\perp}, b_{a^\perp})$.

Упр. 3.10. Вычислите $\det(f, f^\perp)$ $(f^\perp, f^\perp)$ и $s(f, f^\perp)$.

Упр. 3.12. Так как $(v,v) = (u,u)$, имеем равенство углов $\measuredangle(v, u+v) = \measuredangle(u+v, u)$. Тем самым, оба этих угла составляют половину от $\measuredangle(v,u)$, см. рис. 3◇8 на стр. 39. Аналогично, $2\measuredangle(v, w+v) = \measuredangle(v,w)$, откуда $2\measuredangle(u+v, w+v) = \measuredangle(v,w)$.

Упр. 3.17. Оба линейных преобразования — композиция отражений и поворот — одинаково действуют на базис u_1, u_2.

Упр. 3.18. Ответ: $\frac{|u|}{2} \cdot \big(1, \operatorname{ctg}(\vartheta/2)\big)$.

Упр. 3.19. Выясните, куда переходит аффинный репер $(o;\, v, n)$ с началом в произвольной точке $o \in \ell$ и ортонормальными базисными векторами v, n, направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямым ℓ_i.

Упр. 3.20. Импликации (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а) очевидны. В n° 2.4.1 на стр. 30 мы видели, что если отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому (а) $\iff$ (б). Так как соотношение $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$ влечёт $\varphi(i) = \pm i$, из линейности φ над $\mathbb{R}$ вытекает, что $\varphi(x + yi) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x \pm iy$, т. е. (б) $\Rightarrow$ (в).