Задачи для подготовки к контрольной № 4

ПК4⋄1. Найдите угол и расстояние между прямыми, заданными в стандартном ортонормальном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ уравнениями

$$\textbf{а)}\ \begin{cases} x-2y+8z=3 \\ -2x+5y-19z=-8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+3y+9z=3 \\ -2x-5y-16z=-4\,. \end{cases}$$

$$\textbf{б)}\ \begin{cases} x+2y-7z=8 \\ -3x-5y+19z=-21 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2y+4z=9 \\ -3x-5y-9z=-24\,. \end{cases}$$

ОТВЕТ: В (а) первая прямая имеет направляющий вектор $(-2,3,1)$ и проходит через точку $(-1,-2,0)$, вторая прямая имеет направляющий вектор $(-3,-2,1)$ и проходит через точку $(-3,2,0)$, абсолютная величина косинуса угла между прямыми равна $\frac{1}{14}$, а расстояние равно $\frac{14\sqrt{195}}{195}$. В (б) первая прямая имеет направляющий вектор $(3,2,1)$ и проходит через точку $(2,3,0)$, вторая прямая имеет направляющий вектор $(2,-3,1)$ и проходит через точку $(3,3,0)$, абсолютная величина косинуса угла между прямыми равна $\frac{1}{14}$, а расстояние равно $\frac{\sqrt{195}}{39}$.

ПК4⋄2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите координаты ортогональной проекции

а) вектора $(-4,2,1,-1)$ на ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов

$$(1,2,3,6) \quad \text{и} \quad (1,2,4,7)\,.$$

б) вектора $(2,4,-1,-3)$ на подпространство, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-5x_3+9x_4=0\,. \end{cases}$$

в) вектора $(3,-1,1,2)$ на ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов

$$(1,1,3,5)\,,\quad (-2,-2,-5,-9)\,,\quad (-3,-3,-12,-18)$$

а также на ортогональное дополнение к ней.

ОТВЕТ: В (а) базис подпространства составляют векторы $(-2,1,0,0)$ и $(-3,0,-1,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix}5&6\\6&11\end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix}11/19&-6/19\\-6/19&5/19\end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(-4/19,11/19,6/19,-6/19)$ и $(-3/19,-6/19,-5/19,5/19)$, искомая проекция равна $(-70/19,50/19,10/19,-10/19)$. В (б) базис подпространства составляют векторы $(-1,1,0,0)$ и $(2,0,3,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&14\end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix}7/12&1/12\\1/12&1/12\end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(-5/12,7/12,1/4,1/12)$ и $(1/12,1/12,1/4,1/12)$, искомая проекция равна $(-1,1,0,0)$. В (в) базис линейной оболочки составляют векторы $(1,1,0,2)$ и $(0,0,1,1)$ с матрицей Грама $G=\begin{pmatrix}6&2\\2&2\end{pmatrix}$ и $G^{-1}=\begin{pmatrix}1/4&-1/4\\-1/4&3/4\end{pmatrix}$; евклидово двойственный базис состоит из векторов $(1/4,1/4,-1/4,1/4)$ и $(-1/4,-1/4,3/4,1/4)$, проекция на линейную оболочку равна $(3/4,3/4,3/4,9/4)$, проекция на ортогонал к ней равна $(9/4,-7/4,1/4,-1/4)$.

ПК4⋄3. Является ли ортогональным линейный оператор $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном ортонорамльном базисе матрицу

$$\textbf{а)}\begin{pmatrix}1/3&2/3&-2/3\\-2/3&2/3&1/3\\2/3&1/3&2/3\end{pmatrix} \quad \textbf{б)}\begin{pmatrix}-6&2&1\\2&4&4\\3&1&-6\end{pmatrix} \quad \textbf{в)}\begin{pmatrix}2/15&11/15&-2/3\\1/3&-2/3&-2/3\\14/15&2/15&1/3\end{pmatrix}?$$

Если да, то выясните, поворот это или композиция поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота, найдите направление оси и абсолютную величину косинуса угла поворота. Если нет, объясните, почему.

ответ: в (б) нет, в (а) — поворот, направление оси $(0,1,1)$, абсолютная величина косинуса угла $\frac{1}{3}$, в (в) композиция поворота с отражением, направление оси $(-2,4,1)$, абсолютная величина косинуса угла $\frac{3}{5}$.

ПК4◇4. Для оператора $F:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

$$\textbf{а)}\begin{pmatrix} -2 & -2/5 & -11/5 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & -14/5 & -2/5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{б)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -7/5 & 2/5 \\ 2/3 & 22/15 & -17/15 \end{pmatrix},$$

найдите полярное разложение $F = GS$, где $G \in \mathrm{O}_3$, а S самосопряжён и положителен.

ответ: В (а) $G = \begin{pmatrix} -2/15 & 14/15 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 11/15 & -2/15 & 2/3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5/9 & -20/9 & 4/9 \\ -20/9 & -1/9 & -16/9 \\ 4/9 & -16/9 & -13/9 \end{pmatrix}$, матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 49/9 & -16/9 & 32/9 \\ -16/9 & 73/9 & 16/9 \\ 32/9 & 16/9 & 49/9 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 - 19t^2 + 99t - 81 = (t-9)^2(t-1)$. В (б) $G = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 14/15 & 1/3 & 2/15 \\ 2/15 & -2/3 & 11/15 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -13/9 & -16/9 & -4/9 \\ -16/9 & -1/9 & 20/9 \\ -4/9 & 20/9 & 5/9 \end{pmatrix}$, матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 49/9 & 16/9 & -32/9 \\ 16/9 & 73/9 & 16/9 \\ -32/9 & 16/9 & 49/9 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^3 - 19t^2 + 99t - 81 = (t-9)^2(t-1)$.

ПК4◇5. Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений для линейного отображения $F:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, имеющего в стандартных ортонормальных базисах матрицу

$$\textbf{а)}\begin{pmatrix} -16/15 & 8/15 & -4/5 & -2/15 \\ -13/15 & -2/5 & -16/15 & 14/15 \end{pmatrix} \qquad \textbf{б)}\begin{pmatrix} 9/10 & -3/2 & 9/10 & -3/2 \\ 13/10 & -1/2 & 13/10 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

ответ: В (а) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$, отображение F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 17/9 & -2/9 & 16/9 & -2/3 \\ -2/9 & 4/9 & 0 & -4/9 \\ 16/9 & 0 & 16/9 & -8/9 \\ -2/3 & -4/9 & -8/9 & 8/9 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^4 - 5t^3 + 4t^2 = t^2(t-4)(t-1)$. В (б) в ортонормальных базисах пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$, образованных столбцами матриц $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$, отображение F имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $F^tF = \begin{pmatrix} 5/2 & -2 & 5/2 & -2 \\ -2 & 5/2 & -2 & 5/2 \\ 5/2 & -2 & 5/2 & -2 \\ -2 & 5/2 & -2 & 5/2 \end{pmatrix}$ имеет характеристический многочлен $t^4 - 10t^3 + 9t^2 = t^2(t-9)(t-1)$.