

Задачи для подготовки к контрольной № 3

ПКЗ♦1. Найдите вектор скорости линии пересечения плоскостей

$$9x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \quad \text{и} \quad 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 9$$

и какую-нибудь точку на этой линии.

ОТВЕТ: вектор скорости: $(38, 76, 38)$, точка: $(0, -\frac{38}{17}, -\frac{38}{47})$.

ПКЗ♦2. Напишите уравнение плоскости в \mathbb{Q}^3 , проходящей через точку $(3, -9, 7)$ параллельно векторам $(5, 6, 0)$ и $(-3, 14, -10)$.

ОТВЕТ: $-60x_1 + 50x_2 + 88x_3 = -14$.

ПКЗ♦3. Напишите уравнение плоскости в \mathbb{Q}^3 , проходящей через точки $(5, -9, -2)$, $(4, -3, 6)$, $(4, 2, 4)$.

ОТВЕТ: $-52x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -232$.

ПКЗ♦4. Вычислите

$$\text{а) } \det \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: в (а) 486, в (б) 220.

ПКЗ♦5. Найдите

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

ОТВЕТ: в (а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, в (б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, в (в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ПКЗ♦6. Найдите собственные числа, укажите какие-нибудь базисы в собственных и корневых подпространствах и выясните, диагонализуемы ли линейные операторы $\mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$, заданные в стандартном базисе матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 13 & 75 & -21 \\ -16 & -108 & 31 \\ -48 & -330 & 95 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} -7 & 6 & -5 \\ 6 & -11 & 7 \\ 12 & -16 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

операторы имеют матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: В базисах из столбцов матриц

ПКЗ♦7. Напишите такую вещественную 2×2 матрицу A , что

$$\text{а) } A^5 = \begin{pmatrix} -31 & -16 \\ 56 & 29 \end{pmatrix} \quad \text{б) } A^4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{в) } A^3 = \begin{pmatrix} -128 & 25 \\ -650 & 127 \end{pmatrix} \quad \text{г) } A^2 = \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 80 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 20\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

в (г) двукратное собственное число 2, интерполяционный многочлен $\frac{z}{\sqrt{2}} + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\cdot \begin{pmatrix} -25\sqrt{2} + 26\sqrt{-3} & 5\sqrt{2} - 5\sqrt{-3} \\ -130\sqrt{2} + 130\sqrt{-3} & 26\sqrt{2} - 25\sqrt{-3} \end{pmatrix}.$$

в (в) собственные числа: -3, 2, интерполяционный многочлен $\frac{5}{\sqrt{2}}z + \frac{5}{\sqrt{-3}}z + \left(\frac{5}{\sqrt{-3}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

в (б) двукратное собственное число 1, интерполяционный многочлен $\frac{4}{3}z + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot t$, искомая матрица

$$\cdot \begin{pmatrix} -7 + 8\sqrt{5} & -4 + 4\sqrt{-3} \\ 14 - 14\sqrt{5} & 8 - 7\sqrt{-3} \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ: в (а) собственные числа: 1, -3, интерполяционный многочлен $\frac{4}{3}z + \frac{4}{\sqrt{-3}}z + \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{-3}}\right) \cdot t$, искомая матрица

ПКЗ♦8. Над полем \mathbb{Q} найдите минимальные многочлен матриц

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

и выясните, диагонализуемы ли эти матрицы.

ОТВЕТ: в (а) $t^3 + t^2 - t - 1 = (t - 1)(t + 1)(t + 1)$, в (б) $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t - 2)^2(t - 1)$, в (в) $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t - 2)(t - 1)^2$, в (г) $t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t - 2)(t - 1)(t + 2)$.