

ПРОГРАММА ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

ЗА ВТОРОЙ СЕМЕСТР 2019/20 УЧЕБНОГО ГОДА

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. Вычисление расстояний, углов и объёмов. Разложение ортогонального оператора в прямую ортогональную сумму поворотов и одномерных собственных подпространств с собственными числами ± 1 , а также в композицию отражений. Движения в \mathbb{R}^3 .

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять расстояние между аффинными подпространствами (в частности, в уме находить расстояние от точки до гиперплоскости), угол между вектором и подпространством (в частности, между двумя векторами), евклидов объём параллелепипеда; находить перпендикуляр к набору векторов; определять тип движения в \mathbb{R}^3 , описывать композиции движений разного типа и для поворотов находить ось и угол, а для отражений — зеркало; умение выписывать канонический вид ортогонального оператора в виде блочно-диагональной матрицы из поворотов.

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. Канонический вид самосопряжённых и анти-самосопряжённых операторов в ортонормальном базисе, SVD-разложение операторов между евклидовыми пространствами и полярное разложение невырожденного линейного оператора.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить диагональный вид самосопряжённого оператора и ортонормальный базис, в котором матрица оператора имеет такой вид; находить сингулярные числа, сингулярные направления и SVD-разложения линейных отображений; находить полярные разложения линейных преобразований.

ВЫПУКЛАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Выпуклость внутренности и замыкания. Грани и крайние точки. Замкнутая выпуклая фигура является пересечением своих опорных полупространств. Перечисление граней выпуклых многогранников. Лемма Фаркаша и теоремы Фаркаша – Минковского – Вейля.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться свойствами выпуклых фигур и различными описаниями для многогранников и многогранных конусов, а также их граней.

БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ. Операторы корреляции, матрицы Грама, ранг, разложение произвольной формы в сумму симметричной и кососимметричной. Невырожденные билинейные формы: биекция между формами и операторами, двойственные базисы, ортогоналы и ортогональные проекции, размерность изотропного подпространства невырожденной формы на V не превышает $\dim V / 2$, две невырожденные формы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль изометричны если и только если их канонические операторы подобны.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить ранг билинейной формы; преобразовывать матрицу Грама наборов векторов при линейной замене векторов; связать матрицу Грама с матрицами левой и правой корреляций; находить левый и правый двойственные базисы к данному; вычислять ортогональное разложение и ортогональные проекции вектора на подпространство (в предположении, что форма ограничивается туда невырождено) и на его ортогональное дополнение.

СИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. Невырожденность ограничения на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру. Существование базиса с диагональной матрицей Грама (ортогонализация). Поляризация квадратичной формы, приведение к сумме квадратов и его специализации над полями \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{F}_p . Гиперболические формы: всякий базис в изотропном пространстве половинной размерности дополняется до гиперболического базиса, изометрии двумерного гиперболического пространства. Невырожденные формы: отражения в гиперплоскостях, лемма Витта, разложение невырожденной формы в ортогональную сумму гиперболической и анизотропной форм, описание анизотропных форм над полями \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{F}_p , группа изометрий порождается отражениями и транзитивно действует на изотропных и на гиперболических подпространствах заданной размерности. Независимость сигнатуры вещественной формы от выбора ортогонального базиса.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: выписывать матрицу Грама квадратичной формы и преобразовывать её при замене базиса, находить ортогональный базис и матрицу Грама в таком базисе; отыскивать сигнатуру вещественных форм по последовательности главных угловых миноров и путём отыскания собственных значений отвечающего форме евклидово самосопряжённого оператора; отыскивать размерности максимального изотропного

подпространства и гиперболической составляющей форм над полями \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{F}_p ; находить образ вектора при отражении в ортогонале к данному анизотропному вектору.

КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ И ГРАССМАНОВЫ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. Невырожденность ограничения на дополнительное подпространство к ядру и на фактор по ядру. Нормальная форма Дарбу. Всякий базис лагранжева подпространства невырожденной формы дополняется до симплектического базиса. Симплектическая группа транзитивно действует на лагранжевых и на симплектических подпространствах заданной размерности. Приведение грасмановой квадратичной формы к виду Дарбу, критерий разложимости грасмановой квадратичной формы на линейные множители. Пфаффиан кососимметричной матрицы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить базис, в котором матрица Грама имеет нормальный вид Дарбу; приводить грасманову квадратичную форму к каноническому виду и выяснять, разложима ли она; вычислять пфаффиан.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. Проективизация векторного пространства, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq S^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \simeq$ лента Мёбиуса с заклеенной диском границей, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) \simeq SO_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1}) = \mathbb{k}^n \sqcup \dots \sqcup \mathbb{k}^0$. Аффинные карты и локальные аффинные координаты. Однородные координаты и задание фигур однородными уравнениями, проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пространство гиперповерхностей данной степени, пример: $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ как множество неупорядоченных наборов из d точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, нормальные рациональные кривые. Словарик «Линейная алгебра – проективная геометрия»: проективные подпространства, размерности пересечений и линейных соединений, дополнительные подпространства и проекции. Проективная двойственность: соответствие $\mathbb{P}(U) \leftrightarrow \mathbb{P}(\text{Ann } U)$ задаёт оборачивающую включение биекцию между подпространствами размерности k и $n - k - 1$ в пространствах $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и переводит пересечения в линейные соединения.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: переходить от однородных координат аффинным и от одних аффинных координат к другим, выписывать однородное уравнение для проективного замыкания аффинной гиперповерхности и его аффинные уравнения в других картах; переформулировать геометрические утверждения в двойственные; вычислять проекцию из подпространства на дополнительное подпространство.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Проективное преобразование пространства \mathbb{P}_n однозначно задаётся действием на $n+2$ точки, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, группа $PGL(V)$. Гомографии между проективными прямыми: разложение гомографии в композицию проекций, инволюции, построения одной линейкой, перспективные треугольники, теоремы Дезарга. Двойное отношение, гармонические пары точек, четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \twoheadrightarrow S_3$, группа Клейна, гармонические пары прямых в четырёхвершиннике.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять двойные отношения; находить образы и прообразы точек при гомографиях, заданных действием на три точки; находить неподвижные точки гомографий; использовать проективные преобразования (в частности, гомографий) для анализа и решения задач на построение одной линейкой.

ПРОЕКТИВНЫЕ КВАДРИКИ. Гладкие и особые точки, касательные прямые и касательное пространство, всякая quadрика является линейным соединением пространства особых точек и гладкой quadрики в дополнительном подпространстве. Пересечение гладкой quadрики гиперплоскостью и планарность гладкой quadрики. Полярное преобразование относительно гладкой quadрики, сопряжённость точек и сопряжённость гиперплоскостей, сопряжённые точки прямой гармоничны точкам пересечения этой прямой с quadрикой. Двойственная quadрика. Гармонически описанные quadрики. Классификация проективных quadрик над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} , важные примеры: коника Веронезе на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$, quadрика Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End } \mathbb{k}^2)$, quadрика Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{k}^4)$ и пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^4)$.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить пространство особых точек; выяснять, касается ли заданная гиперплоскость заданной quadрики и выписывать уравнение гиперплоскости, касающейся заданной quadрики в заданной гладкой точке; находить ранг и планарность заданной quadрики и её гиперплоских сечений; вычислять образы и прообразы точек и гиперплоскостей при полярном преобразовании; выписывать уравнение двойственной quadрики; выписывать рациональную параметризацию коники Веронезе и параметризацию quadрики Сегре точками $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$; иметь представление, как подсчитать число точек на quadрике над конечным полем.

Пучки квадрик. Базисное множество, спектр и характеристический многочлен, коранг особой квадрики пучка не меньше кратности соответствующего корня характеристического многочлена. Классификация невырожденных пучков коник. Ассоциированный треугольник четырёхвершинника, вписанного в конику, автополярен относительно этой коники. Инволюция Дезарга. Линейные системы коник, проходящих через данную точку, и коник, относительно которых данная точка имеет данную полярю.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: выписывать уравнение коники, обладающей заданными свойствами, путём отыскания подходящей коники в пучке; пользоваться пучками при решении задач о пересечениях коник, об общих касательных, а также для построения примеров и контрпримеров к существованию коник или конфигураций коник с заданными свойствами.

Коники. Проективная конгруэнтность и рациональная параметризация непустых гладких коник. Задание коникой гомографии между прямыми. Двойное отношение и гомографии на конике. Трассировка коники линейкой, построение одной линейкой поляря, касательных и неподвижных точек гомографии, теоремы Паскаля и Бриансона. Конформная структура на \mathbb{R}^2 и конформная теория аффинных коник: эллипсы, гиперболы, параболы, асимптоты, центр, фокусы, директрисы, главные оси, конфокальные семейства и фокальные свойства гладких коник.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: написать рациональную параметризацию непустой гладкой коники и указать число точек такой коники над конечным полем; строить одной линейкой касательные, поляры и полюсы, неподвижные точки гомографии на конике; быстро и эффективно находить тип, центр и главные оси, асимптоты, фокусы и директрисы аффинной коники на евклидовой плоскости; применять конформную теорию коник для решения задач евклидовой планиметрии.

Аффинные квадрики. Вложение аффинной группы в проективную, аффинные квадрики аффинно конгруэнтны если и только если проективно конгруэнтны их проективные замыкания и асимптотические квадрики. Зоология аффинных квадрик: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры, их явное описание над \mathbb{C} и над \mathbb{R} . Планарность вещественных аффинных квадрик и их асимптотических квадрик. Полуоси гладких квадрик в евклидовом аффинном пространстве, теоремы Аполлония, ортооптические сфера и плоскость.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: определять тип, планарность и топологическое устройство аффинной квадрики; находить центр (или вершину), главные оси и длины полуосей квадрики в евклидовом пространстве, а также выписывать каноническое уравнение такой квадрики; пользоваться перечнем «кривых» и «поверхностей» второго порядка в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3 для решения задач; выяснять, касается ли заданная аффинная гиперплоскость заданной аффинной квадрики и выписывать уравнение аффинной гиперплоскости, касающейся заданной аффинной квадрики в заданной гладкой точке.

Сферы и инверсии. Касательное пространство и гиперплоское сечение сферы, полярное преобразование и инверсия пространства относительно сферы. Степень точки относительно сферы и радикальная ось. Пространство сфер и пучки сфер. Конформные свойства инверсии пространства относительно сферы, стереографической проекции и инверсии сферы относительно точки. Группы Мёбиуса евклидова пространства и сферы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить радикальную ось двух сфер; вычислять инверсные образы точек; описывать мёбиусовы преобразования в виде композиции движения, гомотетии и инверсии, а также описывать композиции мёбиусовых преобразований и находить их неподвижные точки; применять инверсии и стереографические проекции для решения задач евклидовой геометрии.