Кососимметричные формы и грассмановы многочлены

Терминология и обозначения. Базис $2n$-мерного пространства V с невырожденной кососимметричной формой ω называется *симплектическим*, если его матрица Грама имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица размера $n \times n$. Изотропные подпространства половинной размерности в V называются *лагранжевыми*. Группа изометрий формы ω обозначается $\mathrm{Sp}_\omega(V)$ или просто $\mathrm{Sp}(V)$ и называется *симплектической группой*. Через $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ обозначается симплектическая группа пространства $\Bbbk^{2n}$, в котором стандартный базис является симплектическим.

ГС3◇1. Постройте какой-нибудь симплектический базис для формы на $\mathbb{Q}^4$ с матрицей Грама **а)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе.

ГС3◇2. Докажите, что любой симплектический оператор $f \in \mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ имеет возвратный характеристический многочлен: $\chi_f(t) = t^{2n}\chi_f\left(t^{-1}\right)$ и единичный определитель $\det f = 1$.

ГС3◇3. Покажите, что симплектическая группа состоит из операторов, матрицы которых в симплектическом базисе имеют вид $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где $n \times n$-блоки A, B, C, D удовлетворяют соотношениям $C^tA = A^tC$, $D^tB = B^tD$, $E + C^tB = A^tD$.

ГС3◇4. Покажите, что для каждого лагранжева подпространства $U \subset V$: **а)** $U = U^\perp$ **б)** есть такое лагранжево подпространство U', что $V = U \oplus U'$ **в)** любой базис в U однозначно дополняется базисом в U' до симплектического базиса в V **г)** полная линейная группа $\mathrm{GL}(U)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ по правилу $G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t^{-1}} \end{pmatrix}$.

ГС3◇5*. Покажите, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V)$ транзитивно действует на лагранжевых подпространствах $U \subset V$.

ГС3◇6*. Пусть $V = U \oplus U'$, где U и U' лагранжевы. Постройте биекцию между дополнительными к U' лагранжевыми подпространствами в V и антисамосопряжёнными относительно формы ω линейными отображениями[1] $f : U \to U'$. Подсказка: рассмотрите графики этих отображений.

ГС3◇7. Для $n \times n$ матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ над кольцом многочленов от n^2 коммутирующих переменных a_{ij} вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1j_1}\partial a_{i_2j_2}\dots\partial a_{i_kj_k}}$. Если общий случай вызывает затруднения, начните с $k = 1, 2, 3$.

ГС3◇8*. Пусть $AB = E$. Докажите соотношение $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|}b_{\overline{J}\overline{I}}$ на дополнительные миноры матриц A и B.

ГС3◇9. Покажите, что однородный грассманов многочлен ω степени два тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

ГС3◇10*. Покажите, что шесть чисел A_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, тогда и только тогда являются 2×2-минорами $2{\times}4$-матрицы[2] A, когда $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$, и выясните, существует ли комплексная $2{\times}4$-матрица с $2{\times}2$-минорами[3] **а)** $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Если да, приведите явный пример такой матрицы.

---

[1] Т. е. такими, что $\omega(fu_1, u_2) = -\omega(u_1, fu_2)$ для всех $u_1, u_2 \in U$.

[2] Так что минор A_{ij} образован i-м и j-м столбцами матрицы A.

[3] Написанными в случайном порядке.