# Квадратичные формы

**Обозначения.** Квадратичная форма $q$ на $2n$-мерном пространстве называется *гиперболической*, если её матрица Грама в некотором базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где $E$ — единичная матрица размера $n \times n$. Всякий такой базис называется *гиперболическим*. Пространство с гиперболической формой размерности $2n$ обозначается $H_{2n}$.

**ГС2⋄1.** Пусть в поле $\Bbbk$ уравнение $x^2 = a$ разрешимо относительно $x$ при любом $a \in \Bbbk$. Покажите, что любая невырожденная квадратичная форма на $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 2$, обладает:

**а)** изотропным подпространством размерности $[n/2]$

**б)** парой трансверсальных[1] изотропных подпространств размерности $[n/2]$.

**ГС2⋄2.** Существует ли на $\mathbb{R}^7$ квадратичная форма с главными угловыми минорами

**а)** $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 > 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 > 0$

**б)** $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0$

**в)** $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 < 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 > 0\,,\ \Delta_7 < 0$

**г)** $\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 = 0\,,\ \Delta_3 = 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ \Delta_5 = 0\,,\ \Delta_6 < 0\,,\ \Delta_7 < 0$?

Если да, выясните, какой может быть её сигнатура, и предъявите явно соответствующие матрицы Грама, если нет — объясните, почему.

**ГС2⋄3.** Проверьте, что для анизотропного вектора $e$ на пространстве с симметричной билинейной формой $\beta$ отражение $\sigma_e : v \mapsto v - 2e\,\beta(v,e)/\beta(e,e)$ является инволютивным[2] изометрическим линейным изоморфизмом.

**ГС2⋄4 (обязательная задача на дом).** Симметричная билинейная форма $\beta$ на $\mathbb{R}^5$ имеет матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -12 & 14 & -5 & -3 & 8 \\ 14 & -17 & 2 & 5 & -8 \\ -5 & 2 & -12 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 3 & -3 & 1 \\ 8 & -8 & 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

**а)** Найдите ранг и сигнатуру ограничения формы $\beta$ на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2\,x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4 - 7\,x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 4\,x_5 = 0\,. \end{cases}$$

**б)** Укажите такой анизотропный вектор $e$, что отражение $\sigma_e$ переводит друг в друга одномерные подпространства, порождённые векторами

$$(3,0,2,3,6) \quad \text{и} \quad (0,3,-11,-12,-18)\,.$$

**в)** Найдите ортогональные проекции предыдущих двух векторов на неподвижную гиперплоскость отражения $\sigma_e$.

**ГС2⋄5.** Покажите, что каждая изометрия произвольной невырожденной квадратичной формы на вещественном пространстве $V$ сохраняет абсолютную величину любой формы объёма на $V$.

**ГС2⋄6 (изометрии гиперболической плоскости).** Покажите, что

**а)** любая изометрия гиперболической плоскости $H_2$ имеет в гиперболическом базисе $e_1$, $e_2$ матрицу $F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ или матрицу $\widetilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \Bbbk^* = \Bbbk \smallsetminus 0$

**б)** над полем $\mathbb{R}$ в ортогональном базисе $p = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$ всякая

[1] Т. е. с нулевым пересечением.

[2] Т. е. обратным самому себе.

собственная[3] изометрия является либо *гиперболическим поворотом* с матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \operatorname{ch} t \overset{\text{def}}{=} \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t \overset{\text{def}}{=} \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

либо композицией гиперболического поворота с центральной симметрией $v \mapsto -v$.

**в*)** Верно ли, что всякая несобственная изометрия вещественной гиперболической плоскости является отражением, а всякая собственная — композицией двух отражений?

**ГС2⋄7*.** Покажите, что число минусов (соотв. плюсов) в сигнатуре невырожденной вещественной квадратичной формы равно максимуму размерностей таких подпространств, на которых эта форма отрицательна[4] (соотв. положительна[5]).

**ГС2⋄8*.** Пусть $p > 2$ — простое, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ — поле из $p$ элементов. Покажите, что любая невырожденная квадратичная форма $q : \mathbb{F}_p^2 \to \mathbb{F}_p$ сюрьективна, а любая квадратичная форма на пространстве $\mathbb{F}_p^n$ с $n \geqslant 3$ имеет ненулевой изотропный вектор.

**ГС2⋄9*.** Зафиксируем в пространстве $W$ квадратичных форм от двух переменных $(x_0, x_1)$ базис $\left( x_0^2, 2x_0x_1, x_1^2 \right)$ и свяжем с каждой матрицей $A \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ линейный оператор

$$S^2A : W \to W,$$

переводящий $f(x_0, x_1)$ в $f\left((x_0, x_1) \cdot A\right)$. Напишите его матрицу в выбранном базисе и выразите её след и определитель через $\operatorname{tr} A$ и $\det A$.

[3] Т. е. с определителем 1.
[4] Т. е. $q(u) < 0$ для всех ненулевых векторов $u$.
[5] Т. е. $q(u) > 0$ для всех ненулевых векторов $u$.