Линейные операторы на евклидовом пространстве.

В этом листке V по умолчанию обозначает n-мерное евклидово векторное пространство $\mathbb{R}^n$.

ГЛ6⋄1. Пусть $V = U \oplus W$, где сумма не предполагается ортогональной, и $\pi : V \to V$ — проекция на W вдоль U. Верно ли, что $V = U^\perp \oplus W^\perp$? Опишите ядро, образ и действие сопряжённого к π оператора $\pi^* : V \to V$.

ГЛ6⋄2. Пусть $V = \mathbb{R}^3$. Введём на пространстве $S^m V^*$ однородных многочленов степени m от стандартных координат (x, y, z) на V евклидову структуру, в которой все мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ортогональны и имеют скалярные квадраты $\alpha!\beta!\gamma!$. Опишите оператор Δ^*, сопряжённый к *оператору Лапласа* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : S^m V^* \to S^{m-2} V^*$ и покажите, что $S^m = H_m \oplus \varrho^2 H_{m-2} \oplus \varrho^4 H_{m-4} \oplus \cdots$, где $H_m = \{f \in S^m V^* \mid \Delta f = 0\}$ обозначает подпространство *гармонических* многочленов, а $\varrho^2 \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2$ — евклидову квадратичную форму на V.

ГЛ6⋄3. Пусть $f : V \to V$ самосопряжённый линейный оператор с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Для подпространства $U \subset V$ с ортонормальным базисом $u_1, u_2, \ldots, u_r$ положим $R_U(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (u_i, f u_i)$ и обозначим через $m_U(f)$ и $M_U(f)$ минимальное и максимальное значения квадратичной формы $q_f(u) \overset{\text{def}}{=} (u, fu)$ на единичной сфере $S^{r-1} \subset U$.

а) Зависит ли $R_U(f)$ от выбора ортонормального базиса в U?

б) Найдите $\max_U R_U(A)$ по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ в предположении, что все собственные числа оператора f попарно различны.

в) (принцип минимакса) Докажите, что $\alpha_r = \max_U m_U(f) = \min_W M_W(f)$, где максимум и минимум берутся, соответственно, по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ и всем $(n+1-r)$-мерным подпространствам $W \subset V$.

г) Для гиперплоскости $H \subset V$ обозначим через $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_{n-1}$ собственные числа (единственного) такого самосопряжённого оператора $h : H \to H$, что $q_f(u) = (u, hu)$ для всех $u \in H$. Докажите, что $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \beta_{n-1} \geqslant \alpha_n$.

ГЛ6⋄4 (нормальные операторы). Покажите, что следующие свойства линейного оператора $f : V \to V$ эквивалентны: **а)** f коммутирует с f^* **б)** $|f(v)| = |f^*(v)|$ для всех $v \in V$ **в)** ортогонал любого f-инвариантного подпространства тоже f-инвариантен **г)** любое f-инвариантное подпространство одновременно и f^*-инвариано **д)** компоненты (единственного) разложения $f = f_+ + f_-$ в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов перестановочны.

ГЛ6⋄5*. Пусть линейный оператор $f : V \to V$ нормален[1]. Докажите, что пространство V является прямой ортогональной суммой одномерных и двумерных подпространств, каждое из которых одновременно f-инвариантно и f^*-инвариантно, причём двумерные подпространства этого разложения не имеют одномерных f-инвариантных подпространств, и в любом ортонормальном базисе такого двумерного подпространства оператор f записывается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad b \neq 0\,.$$

Докажите также, что набор этих матриц с точностью до перестановок не зависит от выбора указанного ортогонального разложения.

ГЛ6⋄6*. Покажите, что невырожденный оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ нормален если и только если ортогональная компонента $g \in \mathrm{O}(V)$ и положительная самосопряжённая компонента h его полярного разложения $f = gh$ перестановочны, и в этом случае уравнение $x^k = f$ при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет нормальное решение $x \in \mathrm{GL}(V)$, являющееся многочленом от f.

[1] Т. е. обладает свойствами из зад. ГЛ6⋄4.

Персональный табель ______________________________________. **Листок № 6 (9 апреля 2019)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			