

А. Л. Городенцев\*

# ГЕОМЕТРИЯ

1-й курс, 2-й семестр

МатФак ВШЭ  
2018/19 уч. год

---

\* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

## Оглавление

Оглавление . . . . .	2
§1 Пространство с билинейной формой . . . . .	5
1.1 Соглашения и обозначения . . . . .	5
1.2 Билинейные формы . . . . .	6
1.3 Невырожденные формы . . . . .	8
1.4 Ортогоналы и ортогональные проекции . . . . .	12
1.5 Симметричные и кососимметричные формы . . . . .	13
§2 Симметричные билинейные и квадратичные формы . . . . .	16
2.1 Пространства со скалярным произведением . . . . .	16
2.2 Изометрии и отражения . . . . .	18
2.3 Квадратичные формы . . . . .	20
2.4 Автодуальные операторы . . . . .	25
§3 Кососимметричные формы и грассмановы многочлены . . . . .	28
3.1 Симплектические пространства . . . . .	28
3.2 Грассмановы многочлены . . . . .	30
3.3 Грассманова алгебра векторного пространства . . . . .	31
3.4 Пфаффиан . . . . .	35
§4 Проективные пространства . . . . .	37
4.1 Проективизация . . . . .	37
4.2 Проективные подпространства . . . . .	42
4.3 Квадрики . . . . .	44
4.4 Проективные многообразия . . . . .	48
§5 Проективные преобразования . . . . .	55
5.1 Линейные проективные изоморфизмы . . . . .	55
5.2 Гомографии . . . . .	57
5.3 Двойное отношение . . . . .	62
5.4 Гомографии на гладкой конике . . . . .	66
§6 Геометрия гладких проективных квадрик . . . . .	69
6.1 Полярное преобразование относительно гладкой квадрики . . . . .	69
6.2 Подпространства, лежащие на гладкой квадрике . . . . .	75
6.3 Классификация проективных квадрик . . . . .	76
6.4 Квадратичные поверхности . . . . .	78
6.5 Квадрика Плюккера . . . . .	80
§7 Пучки квадрик . . . . .	83
7.1 Базисное множество и спектр . . . . .	83
7.2 Невырожденные пучки коник . . . . .	84
7.3 Касательное пространство к проективной гиперповерхности . . . . .	88
7.4 Гиперповерхность особых квадрик . . . . .	89
7.5 Регулярные пучки квадрик . . . . .	91
§8 Конформная геометрия вещественных коник . . . . .	94

---

8.1	Комплексная проективизация вещественной плоскости . . . . .	94
8.2	Гладкие непустые вещественные коники . . . . .	96
8.3	Геометрия центральных коник . . . . .	98
8.4	Геометрия парабол . . . . .	104
§9	Аффинные квадрики . . . . .	107
9.1	Сравнение аффинной и проективной линейных групп . . . . .	107
9.2	Проективное замыкание аффинной квадрики . . . . .	108
9.3	Гладкие центральные квадрики . . . . .	109
9.4	Параболоиды . . . . .	110
9.5	Простые конусы . . . . .	111
9.6	Цилиндры . . . . .	112
9.7	Квадрики в евклидовом пространстве . . . . .	115
§10	Линейные отображения евклидовых пространств . . . . .	122
10.1	Сингулярные числа и сингулярные направления . . . . .	122
10.2	Инвариантные углы между подпространствами . . . . .	126
10.3	Алгебраическое дополнение I: аннулирующие многочлены . . . . .	129
10.4	Алгебраическое дополнение II: функции от операторов . . . . .	132
§11	Выпуклая геометрия . . . . .	136
11.1	Напоминания из аффинной геометрии и топологии . . . . .	136
11.2	Опорные полупространства . . . . .	139
11.3	Выпуклые многогранники . . . . .	143
11.4	Выпуклые многогранные конусы . . . . .	145
11.5	Проективный и асимптотический конусы многогранника . . . . .	147
§12	Группы Кокстера . . . . .	150
12.1	Группы, порождённые отражениями . . . . .	150
12.2	Простые отражения . . . . .	152
12.3	Приведённые слова . . . . .	156
12.4	Классификация групп Кокстера . . . . .	159
§13	Мёбиусовы преобразования . . . . .	161
13.1	Сферы . . . . .	161
13.2	Инверсии . . . . .	167
13.3	Стереографическая проекция и инверсии на сфере . . . . .	171
13.4	Группы Мёбиуса . . . . .	173
§14	Эллиптическая геометрия . . . . .	175
14.1	Эллиптическое пространство . . . . .	175
14.2	Изометрии эллиптического пространства . . . . .	180
14.3	Треугольники . . . . .	182
14.4	Сферическая форма объёма . . . . .	184
§15	Гиперболическая геометрия . . . . .	188
15.1	Пространство Лобачевского . . . . .	188
15.2	Линейная модель в единичном шаре . . . . .	192
15.3	Группа изометрий . . . . .	194
15.4	Гиперболическая форма объёма . . . . .	197

15.5 Конформные модели гиперболического пространства . . . . .	200
Ответы и указания к некоторым упражнениям . . . . .	204

## §1. Пространство с билинейной формой

**1.1. Соглашения и обозначения.** Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ . Наборы  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  из векторов  $v_j \in V$  удобно воспринимать как матрицы-строки, элементами которых являются векторы. Если векторы из набора  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  линейно выражаются через векторы из набора  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  по формулам  $u_j = \sum_i w_i c_{ij} = w_1 c_{1j} + w_2 c_{2j} + \dots + w_m c_{mj}$ , где  $c_{ij} \in \mathbb{k}$ , то мы записываем это в виде матричного равенства  $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ , где  $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$  — матрица высоты  $m$  и ширины  $n$ , в  $j$ -том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора  $u_j$  векторам  $\mathbf{w}$ . Мы называем матрицу  $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  *матрицей перехода* от векторов  $\mathbf{u}$  к векторам  $\mathbf{w}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Убедитесь, что если набор векторов  $\mathbf{w}$  выражается через набор векторов  $\mathbf{v}$  по формуле  $\mathbf{w} = \mathbf{v} C_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ , а набор  $\mathbf{v}$  выражается через набор  $\mathbf{u}$  по формуле  $\mathbf{v} = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ , то  $C_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} C_{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ .

Если задано линейное отображение  $f : U \rightarrow W$  между векторными пространствами  $U$  и  $W$ , и векторы  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  образуют базис в  $U$ , а векторы  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  — базис в  $W$ , то матрица перехода от векторов  $f(\mathbf{u}) = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$  к векторам  $\mathbf{w}$  называется *матрицей отображения  $f$*  в базисах  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  и обозначается  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ . Её  $j$ -тый столбец состоит из координат вектора  $f(u_j)$  в базисе  $\mathbf{w}$ . Таким образом,  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ . Вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{u}x$  со столбцом координат  $x$  в базисе  $\mathbf{u}$  переводится отображением  $f$  в вектор

$$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}x) = f(\mathbf{u})x = \mathbf{w} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} x$$

со столбцом координат  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} x$  в базисе  $\mathbf{w}$ .

Двойственное к  $V$  пространство линейных функций  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$  обозначается через  $V^*$ . Элементы этого пространства также называются *ковекторами*, *линейными формами* или *линейными функционалами* на  $V$ . Каждому базису  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  пространства  $V$  отвечает *двойственный базис*  $\mathbf{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  пространства  $V^*$ . Линейная функция  $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$  сопоставляет вектору  $v \in V$  его  $i$ -тую координату в базисе  $\mathbf{e}$  и действует на базисные векторы  $e_j$  по правилу

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Убедитесь,  $i$ -тая координата произвольной линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$  в базисе  $\mathbf{e}^*$  равна значению этой функции на базисном векторе  $e_i$ , т. е.  $\varphi = \sum_i e_i^* \cdot \varphi(e_i)$ .

Линейное отображение  $V \rightarrow V^{**}$ ,  $v \mapsto e v_v$ , сопоставляющее вектору  $v \in V$  функционал вычисления  $e v_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(v)$ , переводит любой базис  $\mathbf{e}$  пространства  $V$  в двойственный к базису  $\mathbf{e}^*$  в  $V^*$  базис пространства  $V^{**}$  и, стало быть, является изоморфизмом.

Для подпространств  $U \subset V$  и  $W \subset V^*$  мы обозначаем через  $\text{Ann } U \subset V^*$  и  $\text{Ann } W \subset V$  их *аннуляторы*  $\text{Ann } U \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U \varphi(u) = 0\}$  и  $\text{Ann } W \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall \psi \in W \varphi(v) = 0\}$ . Соответствие  $U \mapsto \text{Ann } U$  является инволютивной<sup>1</sup> биекцией между векторными подпространствами размерности  $k$  в  $V$  и векторными подпространствами размерности  $\dim V - k$  в  $V^*$ . Эта

<sup>1</sup>Т. е. обратной самой себе. Это означает, что  $\text{Ann Ann } U = U$  для любого векторного подпространства  $U$  как в  $V$ , так и в  $V^*$ .

биекция переводит суммы векторных подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы<sup>1</sup>.

**1.2. Билинейные формы.** Отображение  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  называется *билинейной формой* на пространстве  $V$ , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (1-1)$$

при всех  $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$  и  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{k}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций  $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ .

Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  зафиксирована, то её значение  $\beta(u, w) \in \mathbb{k}$  на паре векторов  $u, w \in V$  иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения*  $u \cdot w$ , принимающего значения в поле  $\mathbb{k}$  и, вообще говоря, некоммутативного. Формула (1-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок.

**1.2.1. Матрицы Грама.** С любыми двумя наборами векторов

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m), \quad \text{где} \quad u_i, w_j \in V,$$

связана матрица их попарных скалярных произведений  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  с элементами  $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$ . Она называется *матрицей Грама* наборов  $\mathbf{u}, \mathbf{w}$  и формы  $\beta$ . Когда наборы совпадают:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ , мы пишем просто  $B_{\mathbf{u}}$  вместо  $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ . В этом случае  $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}$  называется *определителем Грама* формы  $\beta$  и набора векторов  $\mathbf{u}$ .

Если наборы векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  линейно выражаются через наборы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  по формулам  $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ , то  $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$ . В частности, если  $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ , то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (1-2)$$

Если векторы  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  образуют базис в  $V$ , то скалярное произведение  $\beta(u, w)$  любых двух векторов  $u = \mathbf{e} x$  и  $w = \mathbf{e} y$  однозначно выражается через столбцы  $x, y$  их координат в базисе  $\mathbf{e}$  по формуле

$$u \cdot w = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = x^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} y = x^t B_{\mathbf{e}} y. \quad (1-3)$$

Поскольку любая квадратная матрица  $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве  $V$ , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  и пространством матриц размера  $n \times n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Убедитесь, что эта биекция линейна.

<sup>1</sup>Доказательство всех этих фактов см. в лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_04.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_04.pdf), раздел 4.4.3, стр. 64.

**1.2.2. Корреляции.** Задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  эквивалентно заданию линейного отображения

$$\beta^\wedge : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(*, v), \quad (1-4)$$

переводящего вектор  $v \in V$  в линейную форму  $u \mapsto \beta(u, v)$  на пространстве  $V$ , задаваемую правым скалярным умножением векторов из  $V$  на  $v$ . Линейное отображение (1-4) называется *правой корреляцией* билинейной формы  $\beta$ . Форма  $\beta$  однозначно восстанавливается из корреляции по формуле  $\beta(u, w) = \beta^\wedge(w)u$ . Если зафиксировать в пространствах  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  и  $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ , то матрица отображения  $\beta^\wedge$  в этих базисах совпадёт с матрицей Грама формы  $\beta$  в базисе  $e$ :  $B_{e^*e}^\wedge = B_e$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь в этом!

Таким образом, сопоставление билинейной форме  $\beta$  её правой корреляции  $\beta^\wedge$  устанавливает изоморфизм пространства билинейных форм на  $V$  с пространством линейных отображений из  $V$  в  $V^*$ . Симметричным образом, задание билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  эквивалентно заданию *левой корреляции*

$${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(v, *), \quad (1-5)$$

переводящей вектор  $v \in V$  в линейную форму левого скалярного умножения векторов из  $V$  на  $v$ :  $u \mapsto v \cdot u = \beta(u, v)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах  $e$  и  $e^*$  пространств  $V$  и  $V^*$  равна  $B_e^t$ , и что левая корреляция билинейной формы  $\beta$  является правой корреляцией *транспонированной формы*  $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ .

**1.2.3. Ядра, ранг и коранг.** Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (1-6)$$

называются, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы  $\beta$ . Вообще говоря,  $V^\perp \neq {}^\perp V$ , если форма  $\beta$  не является симметричной или кососимметричной. Однако

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V.$$

В самом деле,  $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$ ,  $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$ , и размерности образов операторов  $\beta^\wedge$ ,  ${}^\wedge\beta$  равны рангам их матриц в каких-либо двойственных друг другу базисах  $e$ ,  $e^*$  пространств  $V$  и  $V^*$ . Так как эти матрицы транспонированы друг другу по [упр. 1.6](#), они имеют одинаковый ранг, равный рангу матрицы Грама  $B_e$  базиса  $e$  по [упр. 1.5](#). Итак, оба пространства в (1-6) имеют размерность  $\dim V - \text{rk } B_e$ . Это число называется *корангом* билинейной формы  $\beta$  и обозначается  $\text{cor } \beta$ . Ранг матрицы Грама, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса и называется *рангом* билинейной формы  $\beta$  и обозначается  $\text{rk } \beta$ .

**1.2.4. Изометрии.** Линейное отображение  $f : V_1 \rightarrow V_2$  между векторными пространствами  $V_1$  и  $V_2$ , на которых заданы билинейные формы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , называется *изометрическим*<sup>1</sup>, если для любых векторов  $u, w \in V_1$  выполняется равенство  $\beta_1(u, w) = \beta_2(f(u), f(w))$ . Билинейные формы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  называются *изоморфными*, если между пространствами  $V_1$  и  $V_2$  имеется изометрический линейный изоморфизм.

<sup>1</sup>Или *гомоморфизмом* пространств с билинейными формами.

**1.3. Невырожденные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *невырожденной*<sup>1</sup>, если она удовлетворяет условиям следующего ниже [предл. 1.1](#). Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 1.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы  $\beta$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  равносильны друг другу:

- 1) в  $V$  существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в  $V$  имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция  ${}^{\wedge}\beta : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 4) правая корреляция  $\beta^{\wedge} : V \rightarrow V^*$  является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора  $v \in V$  существует такой вектор  $u \in V$ , что  $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что  $\varphi(u) = \beta(v, u)$  для всех  $u \in V$
- 8) для любой линейной функции  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$  существует такой вектор  $v \in V$ , что  $\varphi(u) = \beta(u, v)$  для всех  $u \in V$

причём при выполнении этих условий вектор  $v$  в последних двух пунктах определяется формой  $\varphi$  однозначно.

Доказательство. Поскольку  $\dim V = \dim V^*$ , биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения  $V \rightarrow V^*$  равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов  ${}^{\wedge}\beta$  и  $\beta^{\wedge}$ , равносильны между собой и условию (1), означаящему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (1-2) на стр. 6, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов  $e$  и  $f$  связаны друг с другом по формуле  $\det B_e = \det_f \cdot \det^2 C_{fe}$ , где  $C_{fe}$  — матрица перехода<sup>2</sup> от базиса  $e$  к базису  $f$ .  $\square$

Пример 1.1 (евклидова форма)

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве  $\mathbb{k}^n$  с единичной матрицей Грама  $E$  в стандартном базисе называется *евклидовой*. Над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  она задаёт евклидову структуру на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Евклидова форма невырождена. Однако над отличными от  $\mathbb{R}$  полями её свойства могут отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем  $\mathbb{C}$  ненулевой вектор  $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$  имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 1.7. Приведите пример  $n$ -мерного подпространства в  $\mathbb{C}^{2n}$ , на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

<sup>1</sup>А также *неособой* или *регулярной*.

<sup>2</sup>См. п. 1.1 на стр. 5.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна  $E$  называются *ортонормальными*. Ниже<sup>1</sup> мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

**ПРИМЕР 1.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА)**

Симметричная билинейная форма  $h$  на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-7)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v}) / \sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v}) / \sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{Q}$  гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых  $n$  базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (1-7), называется *гиперболическим базисом*.

**ПРИМЕР 1.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)**

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве  $\mathbb{k}^{2n}$ , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-8)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , называется *симплектической*. Матрица  $J$  вида (1-8) называется *симплектической единицей*. Она имеет  $J^2 = -E$  и  $\det J = 1$ . Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна  $J$ , называется *симплектическим базисом*. Ниже<sup>2</sup> мы покажем, что всякая невырожденная симметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.8.** Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера над полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  вырождены.

**1.3.1. Левый и правый двойственный базис.** Если билинейная форма  $\beta$  на пространстве  $V$  невырождена, то у любого базиса  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  в  $V$  есть *правый* и *левый* двойственные базисы  $e^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$  и  ${}^\vee e = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$ , состоящие из прообразов векторов двойственного к  $e$  базиса  $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  в  $V^*$  относительно правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (1-9)$$

<sup>1</sup>См. сл. 1.1 на стр. 14.

<sup>2</sup>См. теор. 1.2 на стр. 14.

которые на матричном языке имеют вид  $B_{e^v} = B_{v_e} = E$ . Так как по формулам из п° 1.2.1

$$E = B_{e^v} = B_e C_{e^v} \quad \text{и} \quad E = B_{v_e} = C_{e^v}^t B_e,$$

матрицы перехода от базисов  $e^v$  и  $v_e$  к базису  $e$  обратны, соответственно, матрице Грама базиса  $e$  и транспонированной к ней матрице:  $e^v = e B_e^{-1}$  и  $v_e = e B_e^{-1t}$ .

Знание двойственных к  $e$  базисов позволяет раскладывать произвольный вектор  $v \in V$  по базису  $e$  в виде

$$v = \sum_i \beta(v, e_i^v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^v) e_i. \quad (1-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Убедитесь в этом!

**1.3.2. Изотропные подпространства.** Подпространство  $U \subset V$  называется *изотропным* для билинейной формы  $\beta$ , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $u, w \in U$ . Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых  $n$  и последних  $n$  базисных векторов пространства  $\mathbb{k}^{2n}$  изотропны для гиперболической формы из прим. 1.2 и симплектической формы из прим. 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве  $V$  не превосходит  $\dim V/2$ .

Доказательство. Изотропность подпространства  $U \subset V$  означает, что корреляция  $\beta^\wedge : V \simeq V^*$  отображает  $U$  внутрь  $\text{Ann } U \subset V^*$ . Так как корреляция невырожденной формы инъективна,  $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ , откуда  $2 \dim U \leq \dim V$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 1.2 в общем случае неумлучшаема.

**1.3.3. Группа изометрий.** Линейный оператор  $f : V \rightarrow V$  является изометрией<sup>1</sup> билинейной формы  $\beta$  если и только если для произвольного базиса  $e$  в  $V$  набор векторов  $f(e) = e F_e$  имеет ту же матрицу Грама  $B_{f(e)} = f(e)^t \cdot e$ , что и базис  $e$ , т. е.

$$F_e^t B_e F_e = B_e. \quad (1-11)$$

Если форма  $\beta$  невырождена, то беря определители обеих частей, получаем  $\det^2 F_e = 1$ , откуда  $\det^2 F_e = \pm 1$ . Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства  $V$  образуют группу. Она обозначается  $O_\beta(V)$  и называется *группой изометрий*<sup>2</sup> невырожденной билинейной формы  $\beta$ . Изометрии определителя 1 называются *специальными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую  $SO_\beta(V)$ .

Из равенства (1-11) вытекает, что обратная к изометрии  $f$  изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (1-12)$$

<sup>1</sup>См. п° 1.2.4 на стр. 7.

<sup>2</sup>А также ортогональной группой или группой автоморфизмов.

ПРИМЕР 1.4 (ИЗОМЕТРИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ)

Оператор  $f : H_2 \rightarrow H_2$ , имеющий в стандартном гиперболическом базисе  $e_1, e_2 \in H_2$  матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям  $ac = bd = 0$  и  $ad + bc = 1$ , имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (1-13)$$

Над полем  $\mathbb{R}$  оператор  $F_\lambda$  является собственным, и при  $\lambda > 0$  называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор  $v = (x, y)$ , обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов  $F_\lambda$  с  $\lambda \in (0, \infty)$  по гиперболе  $xy = \text{const}$ . Если положить  $\lambda = e^t$  и перейти к ортогональному базису из векторов  $p = (e_1 + e_2) / \sqrt{2}$ ,  $q = (e_1 - e_2) / \sqrt{2}$ , то оператор  $F_\lambda$  запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix},$$

где  $\text{ch } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$  и  $\text{sh } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$  называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа  $t$ . Оператор  $F_\lambda$  с  $\lambda < 0$  является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор  $\tilde{F}_\lambda$  является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

**1.3.4. Биекция между формами и операторами.** На пространстве  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  каждому линейному оператору  $f : V \rightarrow V$  можно сопоставить билинейную форму  $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$  с матрицей Грама  $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$  в произвольно выбранном базисе  $e$  пространства  $V$ . Поскольку на языке матриц отображение  $f \mapsto \beta_f$  заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама:  $F_e \mapsto B_e F_e$ , оно линейно и обратимо, если форма  $\beta$  невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма  $\chi : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  на конечномерном векторном пространстве  $V$  с фиксированной невырожденной билинейной формой  $\beta$  имеет вид  $\chi(u, w) = \beta(u, f_\chi w)$  для некоторого линейного оператора  $f_\chi : V \rightarrow V$ , однозначно определяемого формой  $\chi$ . Матрица  $F_e$  оператора  $f_\chi$  в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  выражается через матрицы Грама  $B_e$  и  $X_e$  форм  $\beta$  и  $\chi$  в том же базисе по формуле  $F_e = B_e^{-1} X_e$ .

ПРИМЕР 1.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к  $\beta$  билинейной форме  $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$  оператор  $\kappa : V \rightarrow V$ , который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы  $\beta$ . Он однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w), \quad (1-14)$$

а его матрица  $K_e$  в произвольном базисе  $e$  пространства  $V$  выражается через матрицу Грама  $B_e$  формы  $\beta$  по формуле  $K_e = B_e^{-1}B_e^t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу  $B \mapsto C^t B C$ , где  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ , матрица  $K = B^{-1}B^t$  меняется по правилу  $K \mapsto C^{-1}K C$ , т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как  $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$  для всех  $u, w \in V$ , канонический оператор является изометрическим.

**1.4. Ортогоналы и ортогональные проекции.** С каждым подпространством  $U$  векторного пространства  $V$  с билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  связаны левый и правый ортогоналы

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}. \end{aligned} \quad (1-15)$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в  $V$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3

Если билинейная форма  $\beta$  на конечномерном пространстве  $V$  невырождена, то для всех подпространств  $U \subset V$  выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (1-15) суть прообразы подпространства  $\text{Ann } U \subset V^*$  при изоморфизмах  $\beta, \beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ , и  $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$ . Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства  $({}^\perp U)^\perp$  и  ${}^\perp(U^\perp)$  содержат  $U$  и имеют размерность  $\dim U$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4

Пусть билинейная форма  $\beta$  на произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  ограничивается на конечномерное подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве форму. Тогда  $V = U \oplus U^\perp$ , и проекция  $v_U \in U$  каждого вектора  $v \in V$  на подпространство  $U$  вдоль  $U^\perp$  однозначно определяется тем, что  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$  для всех  $u \in U$ . Вектор  $v_U$  выражается через произвольный базис  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  пространства  $U$  по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i, \quad (1-16)$$

где  ${}^\vee u = ({}^\vee u_1, {}^\vee u_2, \dots, {}^\vee u_n)$  — левый двойственный к  $u$  относительно формы  $\beta$  базис в  $U$ .

Доказательство. Так как ограничение формы  $\beta$  на  $U$  невырождено, для любого вектора  $v \in V$  существует единственный такой вектор  $v_U \in U$ , что линейная функция  $u \mapsto \beta(u, v)$  на пространстве  $U$  задаётся правым скалярным умножением векторов из  $U$  на этот вектор  $v_U$ , т. е. для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ . Поэтому разность  $v - v_U \in U^\perp$ . Таким образом, каждый вектор  $v \in V$  представляется в виде суммы  $v = v_U + (v - v_U)$  с  $v_U \in U$  и  $v - v_U \in U^\perp$ . Поскольку в любом разложении  $v = v'_U + w$  с  $v'_U \in U$  и  $w \in U^\perp$  для всех  $u \in U$  выполняется равенство  $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$ , имеем равенство  $v'_U = v_U$ , а значит и равенство

<sup>1</sup>Возможно даже бесконечномерном.

$w = v - v'_U = v - v_U$ , что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (1-10) на стр. 10:  $v_U = \sum_i \beta(\nu u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta(\nu u_i, v) u_i$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Докажите симметричное утверждение:  $V = {}^\perp U \oplus U$ , где проекция  ${}_U v$  каждого вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  ${}^\perp U$  находится по формуле  ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i$  и однозначно определяется тем, что  $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$  для всех  $u \in U$ .

**1.5. Симметричные и кососимметричные формы.** Билинейная форма  $\beta$  называется *симметричной*, если  $\beta(u, w) = \beta(w, u)$  для всех  $u, w \in V$ , и *кососимметричной* — если  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . В последнем случае для любых  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Убедитесь, что над полем характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  равенство  $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$  всех  $u, w \in V$  равносильно равенству  $\beta(v, v) = 0$  для всех  $v \in V$ . Убедитесь также, что формы  $\beta(u, w)$  и  $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$  пропорциональны ровно в двух случаях: когда  $\beta^t = \pm\beta$ .

Если  $\text{char } \mathbb{k} = 2$ , каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ , пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма  $\beta$  однозначно раскладывается в сумму

$$\beta = \beta_+ + \beta_-$$

симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем обозначать этот оператор через  $\hat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = {}^\wedge \beta : V \rightarrow V^*$  и называть просто *корреляцией*. Напомню, корреляция переводит вектор  $v \in V$ , в линейную функцию

$$\hat{\beta}(v) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы  $\beta$  мы полагаем  $\hat{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \beta^\wedge = -{}^\wedge \beta, v \mapsto \hat{\beta}(v) : u \mapsto \beta(u, v)$ .

**1.5.1. Ортогоналы и проекции.** Если форма  $\beta$  на пространстве  $V$  (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству  $U \subset V$  совпадают друг с другом и обозначаются через  $U^\perp$ . Если (косо) симметричная форма  $\beta$  ограничивается на подпространство  $U \subset V$  в невырожденную на этом подпространстве форму, то  $V = U \oplus U^\perp$  по предл. 1.4. В этом случае подпространство  $U^\perp$  называется *ортогональным дополнением* к подпространству  $U$ . Проекция  $v_U$  вектора  $v \in V$  на  $U$  вдоль  $U^\perp$  называется *ортогональной проекцией* на  $U$  относительно формы  $\beta$ . Вектор  $v_U$  однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из  $U$  такие же, как и у вектора  $v$ .

Если форма  $\beta$  невырождена на всём пространстве  $V$ , то  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$  и  $U^{\perp\perp} = U$  для всех подпространств  $U \subset V$  по предл. 1.4. В этом случае ограничение формы  $\beta$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено тогда и только тогда, когда невырождено её ограничение на  $U^\perp$ .

ТЕОРЕМА 1.1 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой  $\beta$  над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  обладает базисом с диагональной матрицей Грама<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Такие базисы называются *ортогональными*.

Доказательство. Если  $\dim V = 1$  или форма  $\beta$  нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма  $\beta$  ненулевая, то найдётся вектор  $e \in V$  с  $\beta(e, e) \neq 0$ , ибо в противном случае  $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$  для всех  $u, w \in V$ . Возьмём такой вектор  $e$  в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы  $\beta$  на одномерное подпространство  $U = \mathbb{k} \cdot e$  невырождено, пространство  $V$  распадается в прямую ортогональную сумму  $U \oplus U^\perp$ . По индукции, в  $U^\perp$  есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему  $e$ , получаем искомый базис в  $V$ .  $\square$

ПРИМЕР 1.6 (ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА)

В гиперболическом пространстве<sup>1</sup>  $\mathbb{k}^{2n}$  с гиперболическим базисом  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  в качестве ортогонального базиса можно, например, взять векторы  $p_i = e_i + e_{n+i}$  и  $q_i = e_i - e_{n+i}$  со скалярными квадратами  $h(p_i, p_i) = 2$  и  $h(q_i, q_i) = -2$ .

СЛЕДСТВИЕ 1.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор  $e_i$  на  $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 1.2 (ТЕОРЕМА ДАРБУ)

Над произвольным полем  $\mathbb{k}$  любой характеристики всякое конечномерное векторное пространство  $V$  с невырожденной кососимметричной билинейной формой  $\omega$  изометрически изоморфно симплектическому пространству<sup>2</sup>. В частности, размерность пространства  $V$  чётна.

Доказательство. Для начала построим в  $V$  базис, матрица Грама которого состоит из расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$ -блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1-17)$$

В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор  $e_1 \in V$ . Так как форма  $\omega$  невырождена, найдётся такой вектор  $w \in V$ , что  $\omega(e_1, w) = a \neq 0$ . Положим  $e_2 = w/a$ . Поскольку  $\omega(e_1, e_1) = 0$ , векторы  $e_1$  и  $e_2$  не пропорциональны и порождают двумерное подпространство  $U \subset V$ . Матрица Грама ограничения формы  $\omega$  на это подпространство в базисе  $(e_1, e_2)$  имеет вид (1-17). Так как ограничение формы  $\omega$  на  $U$  невырождено,  $V = U \oplus U^\perp$  и ограничение формы  $\omega$  на  $U^\perp$  тоже невырождено. Индукция по  $\dim V$  позволяет считать, что в подпространстве  $U^\perp$  требуемый базис уже имеется. Добавляя к нему  $e_1, e_2$ , получаем искомый базис  $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$  в  $V = U \oplus U^\perp$ . Симплектический базис формы  $\omega$  получается из построенного перестановкой векторов: сначала надо написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными.  $\square$

<sup>1</sup>См. прим. 1.2 на стр. 9.

<sup>2</sup>См. прим. 1.3 на стр. 9.

**1.5.2. Ядро.** Левое и правое ядро (косо)симметричной формы  $\beta$  совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Мы обозначаем это пространство через

$$\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \ker \hat{\beta} = \ker \beta^\wedge = \ker {}^\wedge\beta = \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = 0\}.$$

Предложение 1.5

Ограничение (косо) симметричной формы  $\beta$  на любое дополнительное к ядру  $\ker \beta$  подпространство  $U \subset V$  невырождено.

**Доказательство.** Пусть подпространство  $U \subset V$  таково, что  $V = \ker \beta \oplus U$ , а вектор  $w \in U$  удовлетворяет для всех  $u \in U$  соотношению  $\beta(u, w) = 0$ . Записывая произвольный вектор  $v \in V$  в виде  $v = e + u$ , где  $e \in \ker \beta$  и  $u \in U$ , получаем  $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$ , откуда  $w \in U \cap \ker \beta = 0$ .  $\square$

**Предостережение 1.1.** Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, [предл. 1.5](#), вообще говоря, неверно.

## §2. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  имеет  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ .

**2.1. Пространства со скалярным произведением.** Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$  с зафиксированной на нём невырожденной<sup>1</sup> симметричной билинейной формой  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ . В этом и следующем разделах буква  $V$  по умолчанию обозначает именно такое пространство.

**2.1.1. Ортогональные прямые суммы.** Из двух пространств  $V_1, V_2$  со скалярными произведениями  $\beta_1, \beta_2$  можно изготовить пространство  $V_1 \oplus V_2$  со скалярным произведением  $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ , относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на  $V_1$  и  $V_2$  в  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Это скалярное произведение задаётся формулой

$$[\beta_1 \dot{+} \beta_2]((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2).$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые  $\dim V_1$  векторов которого образуют базис в  $V_1$  с матрицей Грама  $B_1$ , а последние  $\dim V_2$  векторов — базис в  $V_2$  с матрицей Грама  $B_2$ , имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство  $V_1 \oplus V_2$  со скалярным произведением  $\beta_1 \dot{+} \beta_2$  обозначается  $V_1 \dot{+} V_2$  и называется *ортогональной прямой суммой* пространств  $V_1$  и  $V_2$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 2.1.** Обозначим через  $H_{2n}$  гиперболическое пространство<sup>2</sup> размерности  $2n$ . Постройте изометрический изоморфизм<sup>3</sup>  $H_{2m} \dot{+} H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$ .

**2.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства.** Ненулевой вектор  $v \in V$  называется *изотропным*, если  $\beta(v, v) = 0$ . Подпространство  $U \subset V$ , целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле п° 1.3.2 на стр. 10, т. е.  $\beta(u, w) = 0$  для всех  $u, w \in U$ , поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0.$$

Подпространство  $U \subset V$  называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение на  $V$  называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство  $V$ . Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 1.1 на стр. 8, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства  $U \subset V$  имеет место ортогональное разложение  $V = U \oplus U^\perp$  из предл. 1.4 на стр. 12.

**Предложение 2.1**

Каждое изотропное подпространство  $U$  в пространстве  $V$  со скалярным произведением  $\beta$  содержится в некотором гиперболическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim U$ . При этом любой базис подпространства  $U$  дополняется до гиперболического базиса пространства  $W$ .

<sup>1</sup> См. предл. 1.1 на стр. 8.

<sup>2</sup> См. прим. 1.2 на стр. 9.

<sup>3</sup> См. п° 1.2.4 на стр. 7.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$  в  $U$ , дополним его до базиса в  $V$  и обозначим через  $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$  первые  $m$  векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (2-1)$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов  $u_j^\vee$  произвольной линейной комбинации векторов  $u_i$ . Заменим каждый из векторов  $u_j^\vee$  на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \beta(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v.$$

Векторы  $w_1, w_2, \dots, w_m$  по-прежнему удовлетворяют соотношениям (2-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0,$$

т. е.  $2m$  векторов  $u_i, w_j, 1 \leq i, j \leq m$ , образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве  $W$ .  $\square$

#### ТЕОРЕМА 2.1

Каждое пространство  $V$  со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму  $V = H_{2k} \oplus A$ , первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством  $V$ , а второе слагаемое  $A = H_{2k}^\perp$  анизотропно.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $V$  анизотропно (что так при  $\dim V = 1$ ), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор  $e \in V$ , то по [предл. 2.1](#) он лежит в некоторой гиперболической плоскости  $H_2 \subset V$ , и  $V = H_2 \oplus H_2^\perp$  согласно [предл. 1.4](#). По индукции,  $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$ , где  $A = H_{2m}^\perp$  анизотропно. Поэтому  $V = H_{2m+2} \oplus A$  и  $A = H_{2m+2}^\perp$ .  $\square$

Замечание 2.1. Ниже, в [теор. 2.4](#) на стр. 20, мы увидим, что разложение из [теор. 2.1](#) единственно в следующем смысле: если  $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$ , где  $U$  и  $W$  анизотропны, то  $k = m$  и существует изометрический изоморфизм  $U \simeq W$ .

#### Следствие 2.1

Следующие свойства пространства  $V$  со скалярным произведением эквивалентны:

- 1)  $V$  изометрически изоморфно гиперболическому пространству
- 2)  $V$  является прямой суммой двух изотропных подпространств
- 3)  $\dim V$  чётна, и в  $V$  имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Пусть выполнено (2). По [предл. 1.2](#) размерность каждого из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности  $V$ , что возможно только если обе эти размерности равны  $\frac{1}{2} \dim V$ . Тем самым, (2) $\Rightarrow$ (3). По [предл. 2.1](#) на стр. 16 каждое изотропное подпространство размерности  $\frac{1}{2} \dim V$  содержится в гиперболическом подпространстве размерности  $\dim V$ , которое таким образом совпадает со всем пространством  $V$ , что даёт импликацию (3) $\Rightarrow$ (1).  $\square$

**2.2. Изометрии и отражения.** Всякий анизотропный вектор  $e \in V$  задаёт разложение пространства  $V$  в прямую ортогональную сумму  $V = \mathbb{k} \cdot e \oplus e^\perp$ . Линейный оператор  $\sigma_e : V \rightarrow V$ , тождественно действующий на гиперплоскости  $e^\perp$  и переводящий вектор  $e$  в  $-e$ , называется *отражением* в гиперплоскости  $e^\perp$ , см. рис. 2◊1. Произвольный вектор  $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$ , где  $v_e = e \beta(e, v) / \beta(e, e)$  это проекция вектора  $v$  на одномерное подпространство  $\mathbb{k} \cdot e$  вдоль гиперплоскости<sup>1</sup>  $e^\perp$ , а  $v_{e^\perp} = v - v_e \in e^\perp$ , переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2 \frac{\beta(e, v)}{\beta(e, e)} \cdot e \quad (2-2)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.2.** Убедитесь, что  $\sigma_e \in O_\beta(V)$  и  $\sigma_e^2 = \text{Id}_V$ , и докажите для любых изометрии  $f \in O(V)$  и анизотропного вектора  $e \in V$  равенство  $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$ .

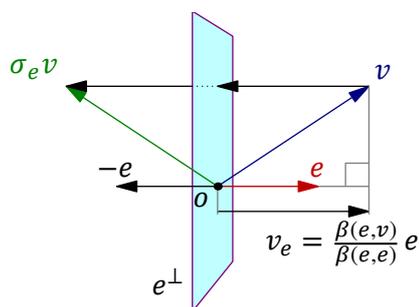


Рис. 2◊1. Отражение  $\sigma_e$ .

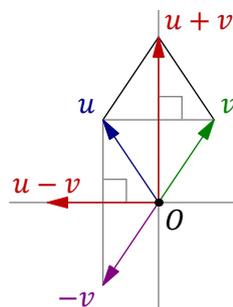


Рис. 2◊2. Отражения в ромбе.

**ЛЕММА 2.1**

В любом пространстве  $V$  со скалярным произведением  $\beta$  для каждой пары различных анизотропных векторов  $u, v$  с равными скалярными квадратами  $\beta(u, u) = \beta(v, v) \neq 0$  существует отражение, переводящее  $u$  либо в  $v$ , либо в  $-v$ .

**Доказательство.** Если  $u$  и  $v$  коллинеарны, то искомым отражением является  $\sigma_v = \sigma_u$ . Если  $u$  и  $v$  не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей  $u + v, u - v$  натянутого на них ромба (см. рис. 2◊2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u + v, u - v) = \beta(u, u) - \beta(v, v) = 0,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы  $u, v$ . Тем самым, хотя бы одно из отражений  $\sigma_{u-v}, \sigma_{u+v}$  определено. При этом  $\sigma_{u-v}(u) = v$ , а  $\sigma_{u+v}(u) = -v$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.3.** Проверьте, последние два равенства.

**ТЕОРЕМА 2.2**

Всякая изометрия  $n$ -мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем  $2n$  отражений.

<sup>1</sup>Мы воспользовались форм. (1-16) на стр. 12: вектор  ${}^\vee e = e / \beta(e, e)$  является двойственным к  $e$  относительно формы  $\beta$  базисным вектором одномерного пространства  $U = \mathbb{k} \cdot e$ , и  $v_e = \beta({}^\vee e, v) e$ .

Доказательство. Индукция по  $n$ . Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора  $E$  и отражения  $-E$ . Пусть  $n > 1$  и  $f : V \rightarrow V$  — изометрия. Выберем в  $V$  какой-нибудь анизотропный вектор  $v$  и обозначим через  $\sigma$  отражение, переводящее  $f(v)$  в  $v$  или в  $-v$ . Композиция  $\sigma f$  переводит  $v$  в  $\pm v$ , а значит, переводит в себя  $(n-1)$ -мерную гиперплоскость  $v^\perp$ . По индукции, действие  $\sigma f$  на  $v^\perp$  является композицией не более  $2n-2$  отражений в гиперплоскостях внутри  $v^\perp$ . Продолжим их до отражений всего пространства  $V$ , добавив в зеркало каждого отражения вектор  $v$ . Композиция полученных отражений совпадает с  $\sigma f$  на гиперплоскости  $v^\perp$ , а её действие на  $v$  либо такое же, как у  $\sigma f$  (при  $\sigma f(v) = v$ ), либо отличается от него знаком (при  $\sigma f(v) = -v$ ). Поэтому  $\sigma f$ , как оператор на всём пространстве  $V$ , есть композиция построенных  $2n-2$  отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости  $v^\perp$ . Следовательно,  $f = \sigma \sigma f$  это композиция не более  $2n$  отражений.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Покажите, что в анизотропном пространстве  $V$  в условиях лем. 2.1 всегда найдётся отражение, переводящее  $u$  в точности в  $v$ , и выведите отсюда, что любая изометрия  $n$ -мерного анизотропного пространства является композицией не более  $n$  отражений.

ТЕОРЕМА 2.3 (ЛЕММА ВИТТА)

Пусть четыре пространства  $U_1, W_1, U_2, W_2$  со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств  $U_1, U_1 \dot{+} W_1, W_1$  изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки  $U_2, U_2 \dot{+} W_2, W_2$ . Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы  $f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$  и  $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$ , то их прямая сумма  $f \oplus g : U_1 \dot{+} W_1 \rightarrow U_2 \dot{+} W_2, (u, w) \mapsto (f(u), g(w))$ , является требуемым изометрическим изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2.$$

Изометрический изоморфизм  $g : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$  строится индукцией по  $\dim U_1 = \dim U_2$ . Если пространство  $U_1$  одномерно с базисом  $u$ , то вектор  $u$  анизотропен. Поэтому векторы  $f(u)$  и  $h(u, 0)$  тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через  $\sigma$  отражение пространства  $U_2 \dot{+} W_2$ , переводящее  $h(u, 0)$  в  $(\pm f(u), 0)$ . Композиция

$$\sigma h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} U_2 \dot{+} W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство  $U_1$  первой суммы на одномерное подпространство  $U_2$  второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к  $U_1$  в первой сумме на ортогональное дополнение к  $U_2$  во второй, что и даёт требуемый изоморфизм  $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\cong} W_2$ . Пусть теперь  $\dim U_1 > 1$ . Выберем в  $U_1$  любой анизотропный вектор  $u$  и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dot{+} W_1 = \mathbb{k} \cdot u \dot{+} u^\perp \dot{+} W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dot{+} W_2 = \mathbb{k} \cdot f(u) \dot{+} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

в которых  $u^\perp \subset U_1$  и  $f(u)^\perp \subset U_2$  означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам  $u$  и  $f(u)$  внутри  $U_1$  и  $U_2$  соответственно. Так как пространства  $\mathbb{k} \cdot u$  и  $\mathbb{k} \cdot f(u)$  изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dot{+} W_1 \xrightarrow{\cong} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

к которым применимо индуктивное предположение.  $\square$

## ТЕОРЕМА 2.4

Построенное в теор. 2.1 разложение пространства  $V$  со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений  $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$  имеет место равенство  $k = m$  и существует изометрический изоморфизм  $U \simeq W$ .

Доказательство. Пусть  $m \geq k$ , так что  $H_{2m} = H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)}$ . Тожественное отображение  $\text{Id} : V \rightarrow V$  задаёт изометрический изоморфизм  $H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)} \dot{+} W$ . По лемме Витта существует изометрический изоморфизм  $U \simeq H_{2(m-k)} \dot{+} W$ . Так как  $U$  анизотропно,  $H_{2(m-k)} = 0$  (иначе в  $U$  будет ненулевой изотропный вектор), откуда  $k = m$  и  $U \simeq W$ .  $\square$

## ТЕОРЕМА 2.5

Если скалярное произведение на пространстве  $V$  невырожденно ограничивается на подпространства  $U, W \subset V$  и существует изометрический изоморфизм  $\varphi : U \simeq W$ , то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма  $f \in O(V)$ , что  $f|_U = \varphi$ .

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм  $\psi : U^\perp \simeq W^\perp$ , то изометрия  $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \simeq W \oplus W^\perp$ ,  $(u, u') \mapsto (\varphi(u), \psi(u'))$  является требуемым автоморфизмом пространства  $V$ . В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы  $\eta : U \dot{+} U^\perp \simeq V$ ,  $(u, u') \mapsto u + u'$ , и  $\zeta : U \dot{+} W^\perp \simeq V$ ,  $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$ . Композиция  $\zeta^{-1}\eta : U \dot{+} U^\perp \simeq U \dot{+} W^\perp$  тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта<sup>1</sup> ортогоналы  $U^\perp$  и  $W^\perp$  изометрически изоморфны.  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 2.2

Для каждого натурального числа  $k$  в диапазоне  $1 \leq k \leq \dim V / 2$  группа изометрий  $O(V)$  транзитивно действует на  $k$ -мерных изотропных и  $2k$ -мерных гиперболических подпространствах в  $V$ .

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из теор. 2.5, а про изотропные — получается из него применением предл. 2.1.  $\square$

**2.3. Квадратичные формы.** Функция  $q : V \rightarrow \mathbb{k}$  на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом второй степени от координат в некотором базисе, т. е. существуют такие базис  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  в  $V$  и однородный многочлен второй степени  $q_e \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , что

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = q_e(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

для всех  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ . Если  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ , то многочлен  $q_e$  можно записать в виде

$$q_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (2-3)$$

где суммирование происходит по всем парам индексов  $1 \leq i, j \leq n$ , а коэффициенты  $q_{ij}$  симметричны по  $i$  и  $j$ , т. е. при  $i \neq j$  число  $q_{ji} = q_{ij}$  равно половине<sup>2</sup> фактического коэффициента

<sup>1</sup>См. теор. 2.3 на стр. 19.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен  $x_1 x_2$  не записывается в виде (2-3).

при  $x_i x_j$  в многочлене  $q_e$ , получающегося после приведения подобных слагаемых в (2-3). Если организовать числа  $q_{ij}$  в симметричную матрицу  $Q_e = (q_{ij})$ , которую мы будем называть *матрицей Грама* многочлена  $q_e$ , и обозначить через  $x$  и  $x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  столбец и строку, составленные из переменных, то (2-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i q_{ij} x_j = x^t Q_e x. \quad (2-4)$$

Сравнивая это с форм. (1-3) на стр. 6, мы заключаем, что  $q(v) = \tilde{q}(v, v)$ , где  $\tilde{q}: V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  — симметричная билинейная форма с матрицей Грама  $Q_e$  в базисе  $e$ . Поскольку

$$q(u+w) - q(u) - q(w) = \tilde{q}(u+w, u+w) - \tilde{q}(u, u) - \tilde{q}(w, w) = 2\tilde{q}(u, w),$$

симметричная билинейная форма  $\tilde{q}$  со свойством  $\tilde{q}(v, v) = q(v)$  однозначно определяется квадратичной формой  $q$ , если  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ . Симметричная билинейная форма  $\tilde{q}$  называется *поляризацией* квадратичной формы  $q$ . Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{aligned} \tilde{q}(u, w) &\mapsto q(v) = \tilde{q}(v, v) \\ q(v) &\mapsto \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u+w) - q(u) - q(w)) \end{aligned} \quad (2-5)$$

не зависят от базиса  $e$  в  $V$ . В частности, для любого базиса  $f = e C_{ef}$  в  $V$  значение  $q(v)$  является однородным многочленом второй степени  $q_f$  от координат вектора  $v$  в базисе  $f$ , причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы  $\tilde{q}$  в базисе  $f$ , будет равна<sup>1</sup>  $Q_f = C_{ef}^t Q_e C_{ef}$ .

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа  $\det Q_e \in \mathbb{k}$  по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$  не зависит от выбора базиса  $e$ . Мы будем обозначать этот класс  $\det q \in \mathbb{k}/\mathbb{k}^{*2}$  и называть его *определителем Грама* квадратичной формы  $q$ . Квадратичная форма  $q$  называется *вырожденной*, если  $\det q = 0$ . Формы с  $\det q \neq 0$  называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы  $q$  означает в точности то же, что невырожденность её поляризации<sup>2</sup>  $\tilde{q}$ . Под *рангом* квадратичной формы  $q$  мы понимаем ранг её поляризации  $\tilde{q}$ , равный рангу матрицы Грама  $Q_e$  в любом базисе  $e$ . Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор  $v \in V$  *изотропным* для квадратичной формы  $q$ , если  $q(v) = 0$ . Квадратичная форма называется *анизотропной*, если  $q(v) \neq 0$  при  $v \neq 0$ .

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 2.3 (из ТЕОР. 2.1 на стр. 17)

Всякая квадратичная форма  $q$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  в подходящих координатах записывается в виде  $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2}, \dots, x_r)$ , где  $r = \text{rk}(q)$  и  $\alpha(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ .  $\square$

Следствие 2.4 (из ТЕОР. 1.1 на стр. 13)

Всякая квадратичная форма над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  линейной обратимой заменой переменных приводится к виду  $\sum a_i x_i^2$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. формулу (1-2) на стр. 6.

<sup>2</sup>См. предл. 1.1 на стр. 8.

Следствие 2.5 (из сл. 1.1 на стр. 14)

Два однородных многочлена второй степени  $f, g \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы  $f, g : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$  имеют одинаковый ранг.  $\square$

Пример 2.1 (квадратичные формы от двух переменных)

Согласно сл. 2.4, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду  $\alpha t^2$  с  $\alpha \neq 0$ , либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2, \quad \text{где } \alpha\beta \neq 0.$$

Условимся писать  $\xi \sim \eta$  для чисел  $\xi, \eta \in \mathbb{k}$ , если  $\xi = \lambda^2 \eta$  для какого-нибудь ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Тогда в первом случае  $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$ , т. е. форма  $q$  вырождена, а во втором случае  $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$  и форма  $q$  невырождена. Тем самым, вырожденность ненулевой квадратичной формы (2-6) означает, что с точностью до постоянного множителя она является полным квадратом линейной формы  $t \in V^*$ . Такая форма  $q$  зануляется вдоль одномерного подпространства  $\text{Ann}(t) \subset V$  и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Если форма (2-6) невырождена, и у неё есть ненулевой изотропный вектор  $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ , то из равенства  $\alpha \vartheta_1^2 + \beta \vartheta_2^2 = 0$  вытекает, что  $\vartheta_2 \neq 0$  и  $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$  является квадратом в поле  $\mathbb{k}$ . В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2 = \alpha \left( t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right) \left( t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right)$$

раскладывается над полем  $\mathbb{k}$  в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма  $q$ , у которой  $-\det q$  является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*<sup>1</sup>. Если же  $-\det q$  не квадрат, то форма  $q$  анизотропна. Число  $-\det(q) = b^2 - ac$  часто обозначают через  $D/4$  и называют  $D$  *дискриминантом* квадратичной формы (2-6).

**2.3.1. Вещественные квадратичные формы.** Из сл. 2.4 вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном векторном пространстве  $V$  в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \quad (2-7)$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор  $e_i$  с  $q(e_i) \neq 0$  на  $\sqrt{|q(e_i)|}$ . Числа  $p$  и  $m$  в представлении (2-7) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара  $(p, m)$  — *сигнатурой*, а разность  $p - m$  — просто *индексом* вещественной квадратичной формы  $q$ .

ТЕОРЕМА 2.6

Числа  $p$  и  $m$  в представлении (2-7) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (2-7).

<sup>1</sup>Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

Доказательство. Будем считать, что  $p \geq m$ , поскольку противоположный случай сводится к этому заменой  $q$  на  $-q$ . Сумма  $p + m = \text{rk } q$  равна рангу билинейной формы  $\tilde{q}$  и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов  $e_k$  с номерами  $k > p + m$  является ядром билинейной формы  $\tilde{q}$ . Классы  $[e_i]$  остальных базисных векторов по модулю  $\ker \tilde{q}$  образуют базис фактор пространства  $W = V/\ker \tilde{q}$ . Форма  $\tilde{q}$  корректно задаёт на  $W$  симметричную билинейную форму  $\tilde{q}_{\text{red}}([u], [w]) = \tilde{q}(u, w)$ , поскольку  $\tilde{q}(u + v_1, w + v_2) = \tilde{q}(u, w)$  для любых  $v_1, v_2 \in \ker \tilde{q}$ . В базисе из классов  $[e_i]$  с  $1 \leq i \leq p + m$ , форма  $q_{\text{red}}$  по-прежнему задаётся формулой (2-7). В частности, она невырождена. Каждая пара базисных векторов  $[e_i], [e_{p+i}]$  порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов  $([e_i] \pm [e_{p+i}])/\sqrt{2}$ . Поэтому форма  $\tilde{q}_{\text{red}}$  является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства  $H_{2m}$ , натянутого на классы  $[e_i], [e_{p+i}]$  с  $1 \leq i \leq m$ , и анизотропного пространства размерности  $p - m$ , натянутого на оставшиеся классы  $[e_j]$  с  $m < j \leq p$ . По теор. 2.4 на стр. 20 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс  $p - m$  и отрицательный индекс инерции  $m$  не зависят от выбора базиса, в котором форма  $q$  имеет вид (2-7).  $\square$

Следствие 2.6 (из доказательства теор. 2.6)

Для каждого  $n$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$  с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — евклидово и *антиевклидово*, получающиеся из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое *антиевклидово* анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю.  $\square$

Следствие 2.7

Два однородных многочлена второй степени  $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеют одинаковый ранг и индекс.  $\square$

**2.3.2. Отыскание сигнатуры вещественной формы.** Зафиксируем в пространстве  $V$  базис и обозначим через  $V_k \subset V$  линейную оболочку первых  $k$  базисных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , а через  $\Delta_k$  их определитель Грама, т. е. главный угловой  $k \times k$  минор матрицы Грама выбранного базиса, сосредоточенный в первых  $k$  строках и первых  $k$  столбцах, и рассматриваемый по модулю умножения на ненулевые положительные числа (ненулевые квадраты поля  $\mathbb{R}$ ). Если он нулевой, ограничение  $q|_{V_k}$  особа, и в частности, обладает изотропными векторами. Если ограничение  $q|_{V_k}$  неособо, то  $\Delta_k = (-1)^{m_k}$ , где показатель  $m_k$  равен отрицательному индексу инерции ограниченной формы  $q|_{V_k}$ . Если в последовательности  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$  не слишком много следующих подряд нулей, то читая её слева направо, часто удаётся проследить изменение индекса формы  $q|_{V_i}$  при переходе от пространства  $V_i$  с ненулевым  $\Delta_i$  к ближайшему справа пространству  $V_j$  с ненулевым  $\Delta_j$ , что позволяет эффективно вычислять индекс.

Например, пусть  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 = 0$ ,  $\Delta_5 = 0$ ,  $\Delta_6 < 0$ . Поскольку форма  $q|_{V_2}$  особа, пространство  $V_2$  является прямой ортогональной суммой отрицательной анизотропной прямой  $\mathbb{R}e_1$  и изотропной прямой. Поскольку ограничение на  $V_3$  неособо, ортогональное дополнение к  $e_1$  внутри  $V_3$  тоже неособо и содержит изотропный вектор. Поэтому оно является

гиперболической плоскостью, а  $V_3 = \mathbb{R}e_1 \oplus H_2$ . Обратите внимание, что  $\Delta_3$  в этом случае обязан отличаться знаком от  $\Delta_1$ , что мы и наблюдаем<sup>1</sup>.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Пусть  $\Delta_{i-1} \neq 0$ ,  $\Delta_i = 0$  и  $\Delta_{i+1} \neq 0$ . Покажите, что  $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} < 0$  и  $V_{i+1} = V_{i-1} \dot{+} H_2$ .

Итак, ограничение  $q|_{V_3}$  имеет сигнатуру  $(1, 2)$ . Те же аргументы показывают, что ограничение формы на  $V_3^\perp$  невырождено и содержит изотропный вектор, а значит имеет сигнатуру  $(2, 1)$  или  $(1, 2)$ . Поскольку знаки у  $\Delta_3$  и  $\Delta_6$  противоположны, имеет место первое, и полная сигнатура  $q$  на  $\mathbb{R}^6$  равна  $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$ . Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Пусть  $\Delta_i \neq 0$ ,  $\Delta_{i+1} = \Delta_{i+2} = 0$  и  $\Delta_{i+3} \neq 0$ . Покажите, что сигнатура пространства  $V_{i+3}$  получается добавлением к сигнатуре пространства  $V_i$  вектора  $(2, 1)$ , когда  $\Delta_i\Delta_{i+3} < 0$ , и вектора  $(1, 2)$ , когда  $\Delta_i\Delta_{i+3} > 0$ .

Если все  $\Delta_k \neq 0$ , то все ограничения  $q|_{V_k}$  неособы, и соседние миноры  $\Delta_i$ ,  $\Delta_{i+1}$  различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции  $m_{i+1} = m_i + 1$ . Поэтому полный отрицательный индекс инерции  $m$  в этом случае равен числу перемен знака в последовательности  $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$ .

**2.3.3. Квадратичные формы над полем  $\mathbb{F}_p$ .** Пусть  $p > 2$  — простое натуральное число и  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$  — поле вычетов по модулю  $p$ . Зафиксируем какой-нибудь не квадрат  $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе  $\mathbb{F}_p^*$  поля  $\mathbb{F}_p$  подгруппу индекса 2. В частности, любой ненулевой элемент поля  $\mathbb{F}_p$  умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо  $\varepsilon$ .

Из этого упражнения и сл. 2.4 на стр. 21 вытекает, что всякая квадратичная форма над  $\mathbb{F}_p$  обратимой линейной заменой переменных приводится к виду

$$q(x) = \sum x_i^2 + \varepsilon \sum x_j^2 \quad (2-8)$$

(наборы переменных в первой и второй сумме не пересекаются). Заметим теперь, что при любых ненулевых  $a, b \in \mathbb{F}_p$  и любом  $c \in \mathbb{F}_p$  уравнение

$$ax_1^2 + bx_2^2 = c \quad (2-9)$$

разрешимо в  $\mathbb{F}_p$  относительно  $(x_1, x_2)$ , поскольку когда  $x_1$  и  $x_2$  независимо друг от друга пробегают поле  $\mathbb{F}_p$ , функции  $ax_1^2$  и  $c - bx_2^2$  принимают по  $(p+1)/2$  различных значений и, стало быть, множества их значений имеют хотя бы один общий элемент  $ax_1^2 = c - bx_2^2$ . На языке квадратичных форм разрешимость уравнения (2-9) означает, что каждая невырожденная квадратичная форма  $q: V \rightarrow \mathbb{F}_p$  на двумерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{F}_p$  принимает все значения из поля  $\mathbb{F}_p$ . В частности, существует вектор  $e$  с  $q(e) = 1$ , а значит, и

<sup>1</sup>А квадратичных форм с  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 = 0$  и  $\Delta_3 < 0$  просто не существует!

такие координаты, в которых форма  $q$  имеет вид  $x_1^2 + x_2^2$  или  $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ . Это замечание позволяет сделать вторую сумму в (2-8) состоящей из не более, чем одного слагаемого. Таким образом, каждая квадратичная форма  $q$  ранга  $r$  над полем  $\mathbb{F}_p$  в подходящих координатах записывается как  $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + x_r^2$ , если  $\det q$  квадрат, и как  $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$ , если  $\det q$  не квадрат.

**2.4. Автодуальные операторы на пространстве со скалярным произведением.** Рассмотрим над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  векторное пространство  $V$  с невырожденной симметричной билинейной формой, которую будем обозначать через

$$(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u, w \mapsto (u, w). \quad (2-10)$$

Линейный оператор  $f: V \rightarrow V$  называется *автодуальным* или *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (2-10), если при всех  $u, w \in V$  выполняется равенство

$$(fu, w) = (u, fw).$$

**УПРАЖНЕНИЕ 2.8.** Покажите, что оператор  $f$  автодуален если и только если отвечающая ему при биекции из н° 1.3.4 на стр. 11 билинейная форма  $\beta_f(u, w) = (u, fw)$  симметрична.

Матрица  $F$  самосопряжённого оператора  $f$  связана с матрицей Грама  $G$  скалярного произведения (2-10) соотношением  $F^t G = GF$ .

**ЛЕММА 2.2**

Если автодуальный линейный оператор  $f: V \rightarrow V$  переводит в себя некоторое подпространство  $U \subset V$ , то он переводит в себя и его ортогонал  $U^\perp$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $w \in U^\perp$ , т. е.  $(u, w) = 0$  для всех  $u \in U$ . Тогда  $(u, fw) = (fu, w) = 0$  для всех  $u \in U$ , ибо  $fu \in U$ . Тем самым,  $fw \in U^\perp$ .  $\square$

**ЛЕММА 2.3**

Собственные векторы с разными собственными значениями у автодуального оператора ортогональны друг другу.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $Fu = \lambda u$  и  $Fw = \mu w$ , то из равенства  $(Fu, w) = (u, Fw)$  вытекает равенство  $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$ .  $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2**

Если характеристический многочлен автодуального линейного оператора  $f: V \rightarrow V$  полностью раскладывается в поле  $\mathbb{k}$  на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора  $f$  анизотропны, то в пространстве  $V$  имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Индукция по  $\dim V$ . Если оператор  $f$  является умножением на скаляр (что имеет место при  $\dim V = 1$ ), то подойдёт любой ортогональный базис пространства  $V$ . Допустим, что  $\dim V > 1$  и оператор  $f$  не скалярен. Поскольку характеристический многочлен  $\det(tE - F)$  имеет корни в поле  $\mathbb{k}$ , у оператора  $F$  есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому  $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ , и ограничение скалярного произведения на  $V_\lambda^\perp$  тоже невырождено. По лем. 2.2 оператор  $f$  переводит подпространство  $V_\lambda^\perp$  в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора  $f$  является произведением характеристических многочленов ограничений  $f|_{V_\lambda}$  и  $f|_{V_\lambda^\perp}$ . В силу единственности разложения на множители в кольце  $\mathbb{k}[t]$  и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладывается на линейные множители в поле  $\mathbb{k}$ . По индуктивному предположению, в подпространстве  $V_\lambda^\perp$  есть ортогональный базис из собственных векторов оператора  $f$ . Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства  $V_\lambda$ , получаем нужный базис в  $V$ .  $\square$

**2.4.1. Автодуальные операторы на евклидовом пространстве.** Покажем, что в евклидовом пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  условия предл. 2.2 выполняются для любого автодуального оператора.

ЛЕММА 2.4

У любого линейного оператора  $f : V \rightarrow V$  на конечномерном векторном пространстве над полем  $\mathbb{R}$  имеется одномерное или двумерное подпространство  $U \subset V$ , которое переводится оператором  $f$  в себя.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор  $v \in V$  и образуем из него  $n + 1$  векторов  $v, fv, f^2v, \dots, f^n v$ , где  $n = \dim V$  и  $f^k v$  обозначает результат  $k$ -кратного последовательного применения оператора  $f$  к вектору  $v$ . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , что  $(f^k + a_1 f^{k-1} + \dots + a_{k-1} f + a_k)v = 0$ . Заключённый в скобки линейный оператор можно воспринимать как результат подстановки  $t = f$  в многочлен  $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$ . Всякий такой многочлен раскладывается в произведение  $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$  линейных двучленов вида  $t - \alpha$  и квадратных трёхчленов вида  $t^2 - \alpha t - \beta$  с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение  $f$  и применяя полученный оператор к вектору  $v$ , мы заключаем, что  $g_1(f) \circ g_2(f) \circ \dots \circ g_m(f)v = 0$ . Рассмотрим наименьшее  $k$ , для которого вектор  $w = g_{k+1}(f) \circ \dots \circ g_m(f)v$  всё ещё отличен от нуля. Тогда  $g_k(f)w = 0$ . Для  $g_k(f) = f - \alpha$  это значит, что  $f(w) = \alpha w$ , т. е. одномерное подпространство  $\mathbb{R} \cdot w$  переводится оператором  $f$  в себя. Для  $g_k(f) = f^2 - \alpha f - \beta$  имеем  $f(f(w)) = \alpha f(w) + \beta w$ , т. е. линейная оболочка векторов  $w$  и  $f(w)$  переводится оператором  $f$  в себя.  $\square$

ЛЕММА 2.5

Характеристический многочлен самосопряжённого оператора на евклидовом пространстве полностью раскладывается на линейные множители над полем  $\mathbb{R}$ .

Доказательство. Индукция по  $\dim V$ . Если  $\dim V = 1$ , доказывать нечего. Если  $\dim V = 2$ , оператор  $f$  задаётся в ортонормальном базисе симметричной матрицей

$$F = F^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен  $\det(tE - F) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$  имеет неотрицательный дискриминант  $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$  и вещественные корни. При  $\dim V > 2$  в пространстве  $V$  имеется одномерное или двумерное подпространство  $U \subset V$ , которое переводится оператором  $f$  в себя. По лем. 2.2 его ортогональное дополнение  $U^\perp$  также переходит в себя под действием  $f$ , а значит,  $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_{U^\perp}}$ . Первый характеристический многочлен

полностью раскладывается на линейные множители над  $\mathbb{R}$  по уже доказанному, второй — по предположению индукции.  $\square$

ТЕОРЕМА 2.7 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Любая квадратичная форма  $q$  на евклидовом пространстве  $V$  имеет в подходящем ортонормальном базисе пространства  $V$  диагональную матрицу Грама. Её диагональные элементы с точностью до перестановки не зависят от выбора базиса и равны собственным числам того единственного автодуального оператора  $f : V \rightarrow V$ , для которого  $q(v) = (v, f v)$ . Если все эти собственные числа различны, ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы  $q$  диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.

Доказательство. По [предл. 2.2](#) в  $V$  есть ортонормальный базис из собственных векторов оператора  $f_q$ . Матрица Грама формы  $q$  в любом ортонормальном базисе совпадает с матрицей оператора  $f_q$ . В ортонормальном базисе из собственных векторов она диагональна, причём на её диагонали стоят собственные числа оператора  $f_q$ , и каждое собственное число  $\lambda$  присутствует столько раз, какова кратность корня  $\lambda$  в характеристическом многочлене оператора  $f_q$ . Поэтому с точностью до перестановки диагональных элементов такая матрица не зависит от выбора нормального базиса. Если все диагональные элементы различны, каждое собственное подпространство оператора  $f_q$  одномерно, все они ортогональны друг другу по [лем. 2.3](#), и нормальные базисные векторы с точностью до знака задаются как векторы единичной длины, порождающие эти подпространства.  $\square$

### §3. Кососимметричные формы и грасмановы многочлены

**3.1. Симплектические пространства.** Согласно теореме Дарбу<sup>1</sup>, каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству  $\mathbb{k}^{2n}$ , на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

как в [прим. 1.3](#) на стр. 9. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать  $\Omega_{2n}$ , по аналогии с гиперболическими пространствами  $H_{2n}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 3.1.** Убедитесь, что прямая ортогональная сумма  $\Omega_{2m} \dot{+} \Omega_{2k}$  изометрически изоморфна  $\Omega_{2(m+k)}$ .

**3.1.1. Симплектическая группа.** Изометрии  $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{2n}$  называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу  $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ , называемую *симплектической группой* пространства  $\Omega_{2n}$ . Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу  $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$  на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid F^t J F = J\}.$$

Если записать такую матрицу  $F$  в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k}),$$

то условие  $F^t J F = J$  приобретёт вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений  $C^t A = A^t C$ ,  $D^t B = B^t D$ ,  $E + C^t B = A^t D$ , из которых видно, что полная линейная группа  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$  гомоморфно вкладывается в симплектическую группу  $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$  по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t-1} \end{pmatrix}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 3.2.** Проверьте все эти утверждения прямыми вычислениями.

**3.1.2. Лагранжевы подпространства.** Изотропные подпространства максимальной возможной размерности  $n$  в симплектическом пространстве  $\Omega_{2n}$  называются *лагранжевыми*. Прямым аналогом [предл. 2.1](#) на стр. 16 является следующий факт.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1**

Каждое изотропное подпространство  $U$  невырожденной кососимметричной формы  $\omega$  на пространстве  $V$  содержится в некотором симплектическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim U$ , и любой базис в  $U$  дополняется до симплектического базиса в  $W$ .

<sup>1</sup>См. [теор. 1.2](#) на стр. 14.

Доказательство. Выберем в  $U$  базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , дополним его до базиса в  $V$  и рассмотрим двойственный к нему относительно  $\omega$  базис. Первые  $m$  векторов  $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$  этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (3-1)$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов  $u_j^\vee$  любой линейной комбинации векторов  $u_i$ . Заменяя каждый вектор  $u_j^\vee$  вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{v < j} \omega(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v, \quad (3-2)$$

получаем набор векторов  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , также удовлетворяющий равенствам (3-1), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех  $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0.$$

Таким образом, векторы  $u_i$  и  $w_j$  с  $1 \leq i, j \leq m$  составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве  $W$ .  $\square$

#### ТЕОРЕМА 3.1

Для каждого лагранжева подпространства  $L \subset V$  найдётся такое лагранжево подпространство  $L' \subset V$ , что  $V = L \oplus L'$ . При этом каждый базис  $e$  подпространства  $L$  однозначно достраивается некоторым базисом  $e'$  подпространства  $L'$  до симплектического базиса пространства  $V$ . При фиксированном  $L'$  все дополнительные к  $L$  лагранжевы подпространства  $L''$  биективно соответствуют линейным операторам  $f : L' \rightarrow L$ , удовлетворяющим равенству<sup>1</sup>

$$\omega(u_1, f u_2) = -\omega(f u_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'.$$

Доказательство. Согласно предл. 3.1 базис  $e$  подпространства  $L$  достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем  $L$  симплектическом подпространстве  $W \subset V$  размерности  $\dim W = 2 \dim L = \dim V$ . Поэтому  $W = V$  и в качестве  $L'$  можно взять линейную оболочку последних  $n = \dim L$  векторов получающегося таким образом симплектического базиса в  $V$ . Индуцированное правой корреляцией  $\omega^\wedge : V \rightarrow V^*$  отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \rightarrow L^*, v \mapsto \omega(*, v)|_L, \quad (3-3)$$

переводящее вектор  $v \in L'$  в линейную форму  $u \mapsto \omega(u, v)$  на подпространстве  $L \subset V$ , является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис  $e'$  подпространства  $L'$ , дополняющий базис  $e$  в  $L$  до симплектического базиса в  $V$ , в двойственный к  $e$  базис  $e^*$  пространства  $L^*$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис  $e'$  в  $L'$  однозначно восстанавливается по  $e$  как прообраз двойственного к  $e$  базиса в  $L^*$  при независящем от выбора базиса изоморфизме (3-3).

<sup>1</sup>Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* или *антиавтодуальными* относительно формы  $\omega$ .

Далее, каждое дополнительное к  $L$  подпространство  $L'' \subset L' \oplus L$  биективно проектируется на  $L'$  вдоль  $L$ , ибо ядро такой проекции равно  $L'' \cap L$ . Поэтому для любого вектора  $u \in L'$  существует единственный такой вектор  $f(u) \in L$ , что  $u + f(u) \in L''$ . Правило  $u \mapsto f(u)$  задаёт линейное отображение  $f: L' \rightarrow L$ , графиком которого является подпространство  $L'' \subset L' \oplus L$ . Таким образом мы получаем биекцию между линейными отображениями  $f: L' \rightarrow L$  и подпространствами  $L'' \subset L' \oplus L$ , которые изоморфно проектируются на  $L'$  вдоль  $L$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь в этом.

При этой биекции изотропность подпространства  $L''$  в  $V$  равносильна антиавтодуальности оператора  $f: L' \rightarrow L$ , графиком которого оно является, ибо

$$\omega(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega(u_1, f(u_2)) + \omega(f(u_1), u_2)$$

в силу лагранжевости подпространств  $L' \ni u_1, u_2$  и  $L \ni f(u_1), f(u_2)$ .  $\square$

**3.2. Грассманы многочлены.** Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  грассмановых многочленов от переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{k}$ . Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассманы переменные  $\xi_i$  не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям<sup>1</sup>

$$\forall i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0, \quad (3-4)$$

где символ « $\wedge$ » обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, каждый грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Для каждого набора  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  строго возрастающих слева направо номеров  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  имеется грассманов моном

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}, \quad (3-5)$$

знак которого при перестановке  $g \in S_m$  переменных  $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}$  меняется по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \text{sgn}(g) \cdot \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_m}. \quad (3-6)$$

Мономы (3-5), занумерованные всевозможными подмножествами  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , составляют базис алгебры  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  как векторного пространства над  $\mathbb{k}$  и перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \emptyset \end{cases} \quad (3-7)$$

где  $\text{sgn}(I, J) = \pm 1$  обозначает знак *тасующей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров  $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k$ , в котором  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  и  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Убедитесь, что для дополнительных друг к другу наборов  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  и  $J = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$  знак  $\text{sgn}(I, J) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+m(m+1)/2}$ .

<sup>1</sup>Если  $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$  соотношения  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  вытекают из соотношений  $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$  и могут быть опущены. Однако когда  $\text{char} \mathbb{k} = 2$  именно соотношения на квадраты  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  отличает грассманы переменные от обычных коммутативных.

Единственный моном (3-5) нулевой степени  $1 \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\emptyset}$ , отвечающий пустому подмножеству  $I = \emptyset$ , является единицей грассмановой алгебры. Единственный моном старшей степени

$$\xi_{\text{top}} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$$

аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени  $k$  образуют векторное пространство размерности  $\binom{n}{k}$ , базис в котором составляют мономы (3-5), отвечающие всевозможным  $k$ -элементным подмножествам  $I$ . Размерность всей грассмановой алгебры  $\dim \mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = 2^n$ .

Два грассмановых монома степеней  $m$  и  $k$  коммутируют друг с другом по правилу

$$\begin{aligned} (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}) \wedge (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) &= \\ &= (-1)^{km} (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) \wedge (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}), \end{aligned}$$

ибо при переносе каждой из  $k$  переменных  $\xi_j$  через  $m$  переменных  $\xi_i$  происходит  $m$  транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов  $\eta$  и  $\omega$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta. \quad (3-8)$$

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Опишите центр<sup>1</sup> грассмановой алгебры.

**3.3. Грассманова алгебра векторного пространства.** Если в векторном пространстве  $V$  выбран базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , алгебра грассмановых многочленов  $\mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  от базисных векторов пространства  $V$  обозначается  $\Lambda V$  и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства  $V$ . Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством  $V$  и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени  $k$  является линейной оболочкой всевозможных произведений  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$  из  $k$  произвольных векторов  $v_i \in V$  и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени  $k$  через  $\Lambda^k V$ , мы получаем разложение алгебры  $\Lambda V$  в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V,$$

где  $\Lambda^0 V \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k} \cdot 1$  обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

Если векторы  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$  линейно выражены через векторы  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$  при помощи некоторой матрицы перехода  $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{k})$  по формуле  $\mathbf{u} = \mathbf{w} C$ , то их грассмановы произведения  $u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m}$  линейно выражаются через грассмановы произведения  $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$  по формулам

$$\begin{aligned} u_J &= u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \dots \wedge u_{j_m} = \left( \sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g \in S_m} \text{sgn}(g) c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \dots c_{i_{g(m)} j_m} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Т.е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

где  $c_{IJ} = \det C_{IJ}$  обозначает определитель  $m \times m$ -подматрицы  $C_{IJ} \subset C$ , сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из  $J$  и строк с номерами из  $I$ , а суммирование происходит по всем наборам  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  из  $m$  возрастающих номеров  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \ell$ . Определитель  $c_{IJ} = \det C_{IJ}$  называется  $IJ$ -тым минором  $m$ -того порядка в матрице  $C$ . Таким образом,  $IJ$ -тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном  $u_j$  через грассмановы мономы  $w_I$  равен  $IJ$ -тому минору  $m$ -того порядка в матрице выражающей векторы  $\mathbf{u}$  через векторы  $\mathbf{w}$ .

В частности, если наборы векторов  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  и  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  оба являются базисами пространства  $V$ , то базисные грассмановы мономы  $e_J$  пространства  $\Lambda^m V$  выражаются через базисные мономы  $f_I$  при помощи матрицы перехода размера  $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$ , у которой в позиции  $IJ$  стоит  $IJ$ -тый минор  $(c_{IJ})$  матрицы  $C_{fe}$ , выражающей  $\mathbf{e}$  через  $\mathbf{f}$ . Эта матрица обозначается  $\Lambda^m C_{fe}$  и называется  $m$ -той внешней степенью матрицы  $C_{fe}$ .

Пример 3.1 (соотношения Лапласа)

Для каждого набора возрастающих индексов  $J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$  положим

$$\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m, \quad |J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$$

и условимся обозначать через  $\hat{J} = (\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}) = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$  дополнительный к  $J$  набор из  $\deg \hat{J} = n - m$  возрастающих индексов.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ , столбцы которой, понимаемые как векторы координатного пространства  $\mathbb{k}^n$ , обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Тогда матрица  $A$  является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $\mathbb{k}^n$ . Для любых двух мультииндексов  $I, J$  одинаковой длины  $\deg I = \deg J = m$  грассмановы произведения  $\alpha_J$  и  $\alpha_{\hat{J}}$  имеют дополнительные степени  $m$  и  $n - m$  и перемножаются по форм. (3-7) на стр. 30, которая с учётом упр. 3.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{J}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (3-9)$$

Выражая грассмановы произведения  $\alpha_J$  и  $\alpha_{\hat{J}}$  в левой части (3-9) через базисные мономы  $e_K$ , получаем

$$\left( \sum_K e_K a_{KJ} \right) \wedge \left( \sum_L e_L a_{L\hat{J}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}},$$

где  $K$  пробегает все возрастающие мультииндексы длины  $\deg K = m$ . Поскольку правая часть формулы (3-9) при  $I = J$  равна  $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ , для любых двух наборов  $J, I$  из  $m$  строк произвольной квадратной матрицы  $A$  выполняются соотношения Лапласа

$$\sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (3-10)$$

где суммирование идёт по всем наборам  $K$  из  $m = \deg K$  строк матрицы  $A$ .

При  $I = J$  соотношение (3-10) даёт формулу для вычисления определителя<sup>1</sup>

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \quad (3-11)$$

<sup>1</sup>С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём  $n$ -мерного параллелепипеда через объёмы его  $m$ -мерных и  $(n - m)$ -мерных граней.

через всевозможные миноры  $a_{KJ}$  порядка  $m$ , сосредоточенные в  $m$  фиксированных столбцах матрицы  $A$  с номерами  $J$ , и *дополнительные* к ним миноры  $a_{j\hat{K}}$  порядка  $n - m$ , равные определителям матриц, получающихся из  $A$  вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор  $a_{KJ}$ . Произведение  $(-1)^{|K|+|J|} a_{j\hat{K}}$  называется *алгебраическим дополнением* к минору  $a_{KJ}$  и обозначается  $\hat{a}_{KJ}$ .

При  $I \neq J$  соотношение (3-10) имеет вид  $\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{IK} = 0$  и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части (3-11) тем, что миноры  $a_{KJ}$  умножаются не на свои алгебраические дополнения  $\hat{a}_{KJ}$ , а на дополнения  $\hat{a}_{IK}$  к минорам  $a_{IK}$ , сосредоточенным в другом наборе столбцов  $I \neq J$ .

Если согласованно занумеровать все  $m$ -элементные подмножества и все  $(n - m)$ -элементные подмножества в множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  так, чтобы дополнительные подмножества  $J$  и  $\hat{J}$  имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E \quad (3-12)$$

на матрицы размера  $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$ , в котором  $(IJ)$ -тый элемент матрицы  $\Lambda^{n-m} \hat{A}^t$  равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{j\hat{i}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (3-13)$$

ПРИМЕР 3.2 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПУЧКА МАТРИЦ)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$  называется *пучком матриц* и обозначается  $(AB)$ . Таким образом, всякая матрица из пучка  $(AB)$  имеет вид  $t_0 A + t_1 B$ , где  $t_0, t_1 \in \mathbb{k}$ , а её определитель  $\det(t_0 A + t_1 B)$  является однородным многочленом степени  $n$  от  $t_0, t_1$ . Покажем, что коэффициент этого многочлена при  $t_0^k t_1^{n-k}$  равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ}, \quad (3-14)$$

где суммирование идёт по всем  $k$ -элементным подмножествам  $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ .

Для этого обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  столбцы матриц  $A$  и  $B$ , понимаемые как векторы координатного пространства  $\mathbb{k}^n$  со стандартным базисом  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Тогда

$$(t_0 a_1 + t_1 b_1) \wedge (t_0 a_2 + t_1 b_2) \wedge \dots \wedge (t_0 a_n + t_1 b_n) = \det(t_0 A + t_1 B) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Моном  $t_0^k t_1^{n-k}$  возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь  $k$  из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных  $n - k$  скобках. Если обозначить номера этих  $k$  скобок через  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  то вклад в коэффициент при  $t_0^k t_1^{n-k}$  будет равен

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \left( \sum_J e_J a_{JI} \right) \wedge \left( \sum_K e_K b_{K\hat{I}} \right) = \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI} b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} b_{j\hat{i}} \end{aligned}$$

Полный коэффициент при  $t_0^k t_1^{n-k}$  в  $\det(t_0 A + t_1 B)$  получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам  $I$  из  $k$  возрастающих номеров, что и даёт формулу (3-14). В обозначениях из (3-12) её можно переписать в виде

$$\det(t_0 A + t_1 B) = \sum_{k=0}^n \operatorname{tr} (\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t) t_0^k t_1^{n-k}, \quad (3-15)$$

ПРИМЕР 3.3 (ГРАССМАНОВЫ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ)

Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени  $\omega \in \Lambda^2 V$  на конечномерном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  в подходящем базисе  $\mathbf{e}$  пространства  $V$  может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (3-16)$$

Для этого рассмотрим произвольный базис  $\mathbf{u}$  и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент  $\alpha_2 \neq 0$  и вектор  $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \neq 0$ . Перейдём к новому базису  $\mathbf{v}$  из векторов  $v_i = u_i$  при  $i \neq 2$  и вектора  $v_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу  $u_2 = (v_2 - \alpha_3 v_3 - \dots - \alpha_n v_n) / \alpha_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых  $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{k}$ . Переходя к базису  $\mathbf{w}$  из векторов  $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$  и  $w_i = v_i$  при  $i \neq 1$ , получаем  $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$ , после чего процесс может быть продолжен по индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. (ПОЛЯРИЗАЦИЯ ГРАССМАНОВОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ) Если  $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$ , то каждый однородный грассманов многочлен второй степени  $\omega \in \Lambda^2 V$  можно однозначно выразить через произвольно зафиксированный базис  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  пространства  $V$  в виде

$$\omega = \sum_{ij} \omega_{ij} e_i \wedge e_j = (\mathbf{e} \Omega_e) \wedge \mathbf{e}^t, \quad \text{где } \Omega_e = (\omega_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{k}),$$

индексы  $i, j$  независимо пробегают все значения от 0 до  $n$ , а числа  $\omega_{ij} \in \mathbb{k}$  кососимметричны по этим индексам, т. е.  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  и  $\omega_{ii} = 0$ . Таким образом, при  $i < j$  число  $\omega_{ij}$  равно половине коэффициента при базисном грассмановом мономе  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$  в приведённом разложении многочлена  $\omega$  по стандартному базису из форм. (3-5) на стр. 30. Кососимметричная матрица  $\Omega_e = (\omega_{ij})$  называется *матрицей Грама* квадратичного грассманова многочлена  $\omega$  в базисе  $\mathbf{e}$ . При выборе другого базиса  $\mathbf{f}$ , через который базис  $\mathbf{e}$  выражается по формуле  $\mathbf{e} = \mathbf{f} C_{fe}$ , матрица Грама  $\Omega_f$  многочлена  $\omega$  в базисе  $\mathbf{f}$  будет связана с матрицей Грама  $\Omega_e$  соотношением

$$\Omega_e = C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t \quad (3-17)$$

поскольку  $\omega = (\mathbf{e} \Omega_e) \wedge \mathbf{e}^t = (\mathbf{f} C_{fe} \Omega_e) \wedge (C_{fe}^t \mathbf{f}^t) = (\mathbf{f} C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t) \wedge \mathbf{f}^t$ .

В частности, над полем характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  результат предыдущего [прим. 3.3](#) можно было бы вывести из теоремы Дарбу<sup>1</sup> о кососимметричных билинейных формах, в доказательстве которой мы видели, что для любой кососимметричной матрицы  $\Omega$  существует такая обратимая матрица  $C$ , что все ненулевые элементы матрицы  $C\Omega C^t$  сосредоточены в расположенных на главной диагонали  $2 \times 2$ -блоках вида  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама  $\Omega$  в некотором базисе  $f$ , в базисе  $e = fC$  записывается как  $\omega = 2(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots)$ , откуда уже совсем легко перейти к виду (3-16).

**Предложение 3.2**

Над полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  однородный грассманов многочлен  $\omega \in \Lambda^2 V$  тогда и только тогда разложим в произведение  $u \wedge w$  двух векторов  $u, w \in V$ , когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

**Доказательство.** Если  $\omega = u \wedge w$ , то  $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$ . Чтобы получить обратное, выберем в  $V$  базис  $e$ , в котором  $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$ . Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  войдёт в  $\omega \wedge \omega$  с ненулевым коэффициентом 2, а значит,  $\omega \wedge \omega \neq 0$ . Таким образом, равенство  $\omega \wedge \omega = 0$  влечёт равенство  $\omega = e_1 \wedge e_2$ .  $\square$

**3.4. Пфаффиан.** Рассмотрим кососимметричную матрицу  $A = (a_{ij})$  размера  $(2n) \times (2n)$ . Будем считать её элементы  $a_{ij}$  с  $i < j$  независимыми коммутирующими переменными и обозначим через  $\mathbb{Z}[a_{ij}]$  кольцо многочленов от этих переменных с целыми коэффициентами. В этом разделе мы покажем, что существует и единствен такой многочлен  $\text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ , что

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(J') = 1,$$

где  $J'$  — блочно диагональная матрица из  $n$  идущих по главной диагонали  $2 \times 2$ -блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

как в доказательстве [теор. 1.2](#) на стр. 14. Многочлен  $\text{Pf}(A)$  называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы  $A$  и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (3-18)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  в объединение  $n$  неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств  $\{i_\nu, j_\nu\}$ , порядок внутри которых тоже не существует, а  $\text{sgn}$  означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы  $S_{2n}$ .

**Упражнение 3.9.** Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (3-18) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

<sup>1</sup>См. [теор. 1.2](#) на стр. 14.

Чтобы хоть как-то извлечь квадратный корень из  $\det A$ , интерпретируем  $A$  как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства  $K^{2n}$  над полем  $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$  рациональных функций от переменных  $a_{ij}$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{Q}$ . Доказывая теор. 1.2 на стр. 14, мы видели, что в  $K^{2n}$  есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама  $J'$ . Поэтому  $A = CJ'C^t$  для некоторой матрицы  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ . Так как  $\det J' = 1$ , определитель  $\det(A) = \det(C)^2$ . Остаётся убедиться, что  $\det C$  является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (3-18).

Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу  $B = (b_{ij})$ , наддиагональные элементы  $b_{ij}$  которой также будем считать независимыми переменными, и образуем однородный грасманов многочлен  $\beta_B(\xi)$  степени 2 от грасмановых переменных  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$  с коэффициентами в кольце  $\mathbb{Z}[b_{ij}]$  по формуле  $\beta_B(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij} \xi_i \wedge \xi_j$ . Поскольку чётные мономы  $\xi_i \wedge \xi_j$  лежат в центре грасмановой алгебры,  $n$ -тая грасманова степень

$$\begin{aligned} \beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \\ &= \left( \sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} \xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} \xi_{i_2} \wedge \xi_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n} \xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n} \right) = \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n) b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \dots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\ &= 2^n n! \text{Pf}(B) \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}, \end{aligned} \quad (3-19)$$

где в предпоследней строке, как и в формуле (3-18), суммирование происходит по всем разбиениям множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  в объединение  $n$  неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств  $\{i_\nu, j_\nu\}$ , порядок внутри которых тоже не существен, и  $\text{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$  означает тот же самый многочлен, что и в формуле (3-18). Заменим в (3-19) грасмановы переменные  $\xi$  на новые грасмановы переменные  $\eta$  по формуле  $\xi = \eta C$ , где  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$ . В правой части (3-19) получим  $2^n n! \text{Pf}(B) \det C \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$ . Квадратичная форма  $\beta_B(\xi)$  в самой левой части (3-19) превратится в

$$\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = (\eta C B) \wedge (\eta C)^t = (\eta C B C^t) \wedge \eta^t = \beta_{C B C^t}(\eta),$$

а её  $n$ -тая грасманова степень — в  $\beta_{C B C^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n! \text{Pf}(C B C^t) \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$ . Таким образом, для любой матрицы  $C \in \text{GL}_{2n}(K)$  в кольце многочленов  $K[b_{ij}]$  от переменных  $b_{ij}$  с коэффициентами в поле  $K$  выполняется равенство

$$\text{Pf}(C B C^t) = \text{Pf}(B) \det C. \quad (3-20)$$

Полагая в этом равенстве  $B = J'$  и беря в качестве  $C$  такую матрицу, что  $CJ'C^t = A$ , получаем в поле  $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$  равенство  $\text{Pf}(A) = \det C$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что  $\text{Pf}(J') = 1$ .

Это доказывает существование пфаффина и формулу (3-18). Единственность пфаффина вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = (x - \text{Pf}(A))(x + \text{Pf}(A)) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце  $\mathbb{Z}[a_{ij}]$  ровно два корня  $x = \pm \text{Pf}(A)$ , и требование  $\text{Pf}(J') = 1$  однозначно фиксирует нужный знак.

## §4. Проективные пространства

**4.1. Проективизация.** С каждым  $(n + 1)$ -мерным векторным пространством  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  помимо  $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  связано  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в  $V$  или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в  $\mathbb{A}(V)$ . Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь  $\mathbb{A}(V)$  следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость. Каждая такая гиперплоскость однозначно задаётся неоднородным линейным уравнением  $\xi(x) = 1$ , где  $\xi \in V^*$  — ненулевая линейная форма на  $V$  (см. рис. 4♦1), и называется аффинной картой  $U_\xi$  на  $\mathbb{P}(V)$ .

Упражнение 4.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами  $\xi \in V^*$  и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в  $\mathbb{A}(V)$ .

В карте  $U_\xi$  видны все одномерные подпространства, порождённые векторами  $v \in V$  с  $\xi(v) \neq 0$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$  состоит из одномерных подпространств, лежащих в параллельном экрану  $U_\xi$  векторном подпространстве  $\text{Ann } \xi \subset V$  размерности  $n$ . Таким образом, невидимые в карте  $U_\xi$  точки  $n$ -мерного проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  образуют  $(n - 1)$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ . Оно называется бесконечно удалённой гиперплоскостью карты  $U_\xi$ . Точки  $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  можно воспринимать как направления в аффинной карте  $U_\xi$ .

Из сказанного вытекает, что  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n$  разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до  $n$ :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$  это одна точка.

Упражнение 4.2. Какое соотношение на  $q$  получится, если независимо подсчитать количества точек в левой и правой части этого равенства над конечным полем из  $q$  элементов?

**4.1.1. Глобальные однородные координаты.** Зафиксируем в  $V$  координаты  $x_0, x_1, \dots, x_n$  относительно какого-нибудь базиса  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

задают одну и ту же точку  $p \in \mathbb{P}_n$  если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений<sup>1</sup>  $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$  для всех  $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$ .

<sup>1</sup>При этом равенства вида  $0 : x = 0 : y$  и  $x : 0 = y : 0$ , в которых  $x$  и  $y$  либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

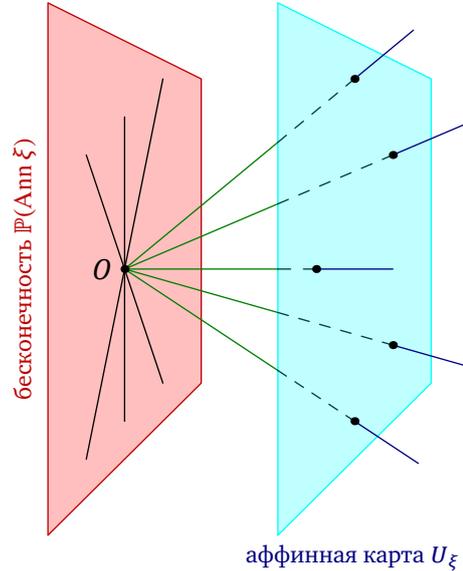


Рис. 4♦1. Проективный мир.

Иначе говоря, с точкой  $p \in \mathbb{P}_n$  взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  между ними. Эти отношения называются *однородными координатами* точки  $p$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

**4.1.2. Локальные аффинные координаты.** Любой набор ковекторов  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$ , дополняющий ковектор  $\xi$  до базиса в  $V^*$ , задаёт в аффинной карте  $U_\xi$  аффинную систему координат с началом в точке  $e_0$  и базисными векторами  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , где  $e_0, e_1, \dots, e_n$  это двойственный к  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  базис пространства  $V$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Убедитесь, что  $e_0 \in U_\xi$ , а  $e_1, e_2, \dots, e_n$  составляют базис в  $\text{Ann } \xi$ .

Каждое наблюдаемое в карте  $U_\xi$  одномерное подпространство, порождённое ненулевым вектором  $v \in V$ , изображается в нём точкой  $v/\xi(v) \in U_\xi$  с аффинными координатами

$$t_i = \xi_i(v/\xi(v)) = \xi_i(v)/\xi(v), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n.$$

Обратите внимание, что локальные аффинные координаты точки  $v \in \mathbb{P}(V)$  являются не линейными, а дробно линейными функциями от глобальных однородных координат этой точки.

ПРИМЕР 4.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ)

Проективная прямая  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  целиком покрывается двумя аффинными картами  $U_0 = U_{x_0}$  и  $U_1 = U_{x_1}$ , которые представляют собою прямые  $x_0 = 1$  и  $x_1 = 1$  в аффинном пространстве  $\mathbb{k}^2$ , см. рис. 4♦2.

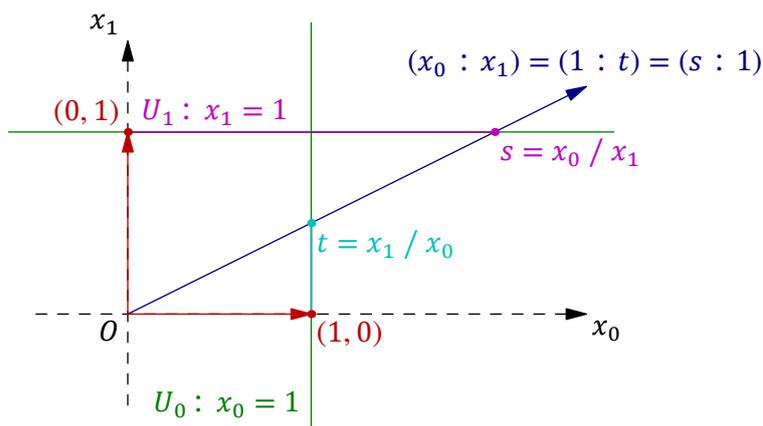


Рис. 4♦2. Стандартные карты на  $\mathbb{P}_1$ .

В карте  $U_0$  видны все одномерные подпространства в  $\mathbb{k}^2$  кроме вертикальной координатной оси  $(0 : 1)$ , которая является единственной бесконечно удалённой точкой этой карты. В качестве локальной аффинной координаты на  $U_0$  годится функция  $t = x_1 / x_0$ . В карте  $U_1$  видны все точки  $(x_0 : x_1) = \left(\frac{x_0}{x_1} : 1\right)$ , у которых  $x_1 \neq 0$ , и в качестве локальной аффинной координаты в этой карте можно взять функцию  $t = x_0 / x_1$ . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_1$  является горизонтальная координатная ось  $(1 : 0)$ . Координаты  $s$  и  $t$  одной и той же точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ , видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением  $t = 1/s$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, проективная прямая  $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$  является результатом склейки двух аффинных прямых  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$  с координатами  $s$  и  $t$  вдоль дополнения до начал координат по правилу: точка с координатой  $s$  на первой прямой отождествляется с точкой с координатой  $t = 1/s$  на второй.

Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , результат такой склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, см. рис. 4◊3.

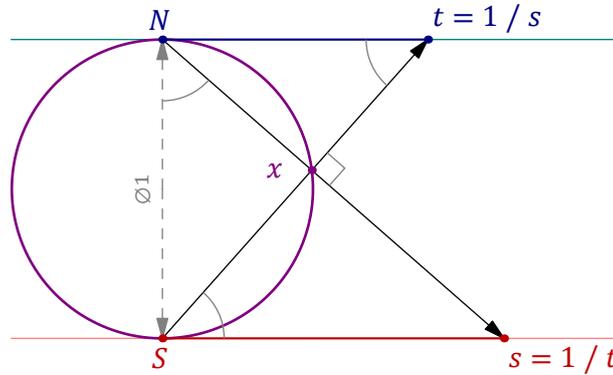


Рис. 4◊3.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ .

Из подобия прямоугольных треугольников  $NSs$  и  $tNS$  на рис. 4◊3 вытекает, что точка с координатой  $s$  на верхней касательной и точка с координатой  $t$  на нижней проектируются в одну и ту же точку  $x$  окружности если и только если  $t = 1/s$ . Получаемое таким образом отождествление «полной числовой прямой»  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$  с окружностью хорошо согласуется с принятыми в вещественном анализе представлениями о бесконечности: уходу координаты  $t$  на бесконечность по верхней числовой прямой отвечает стремление к нулю координаты  $s = 1/t$  на нижней, и сжимающиеся  $\varepsilon$ -окрестности точки  $S$  на окружности выглядят на верхней числовой прямой как дополнения до неограниченно увеличивающихся отрезков  $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ , используемые в анализе как «окрестности бесконечности».

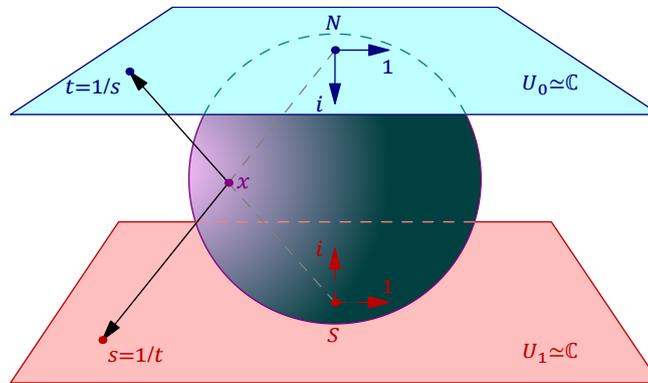


Рис. 4◊4.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

При  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  результат склейки двух аффинных прямых  $A^1 = \mathbb{C}$  вдоль дополнений до нуля по правилу  $t \leftrightarrow 1/t$  можно воспринимать как сферу диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, см. рис. 4◊4. Если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы

$1, i \in \mathbb{C}$  направить так<sup>1</sup>, как на рис. 4◊4, то комплексные числа  $s$  и  $t$  из разных плоскостей спроектируются в одну и ту же точку  $P$  сферы если и только если<sup>2</sup>  $\text{Arg } s = -\text{Arg } t$  и  $|s| = 1/|t|$ , т. е. когда  $s = 1/t$  в  $\mathbb{C}$ . По этой причине комплексную проективную прямую  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  часто называют сферой Римана, а также *полной комплексной плоскостью*.

ПРИМЕР 4.2 (вещественная проективная плоскость  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ )

Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в  $\mathbb{R}^3$  пересекает единичную замкнутую полусферу  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 \geq 0$ . При этом любая не лежащая в плоскости  $x_0 = 0$  прямая пересекает полусферу ровно в одной внутренней точке, а каждая прямая из плоскости  $x_0 = 0$  — в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  гомеоморфно<sup>3</sup> полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 4◊5.

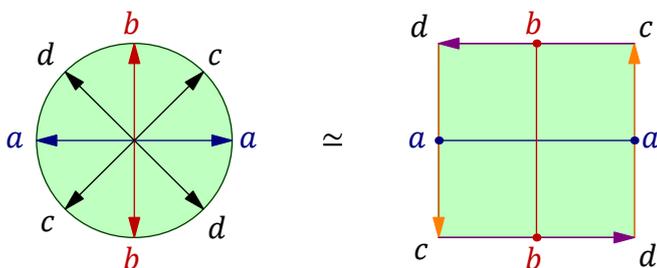


Рис. 4◊5.  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как ленту Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 4◊6.

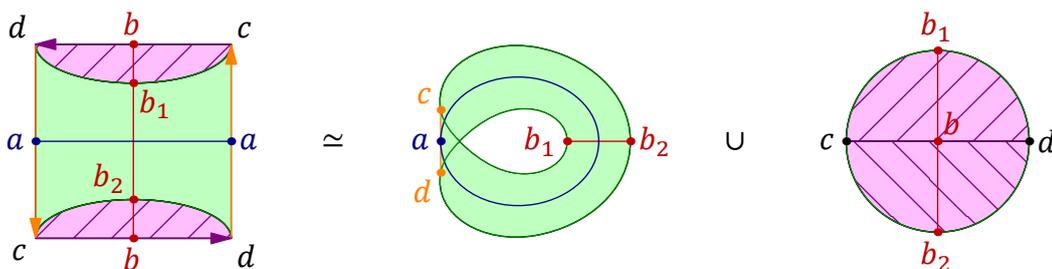


Рис. 4◊6.  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

<sup>1</sup>Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекачиванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

<sup>2</sup>Первое очевидно из рис. 4◊4, второе — из рассмотрения сечения сферы плоскостью  $NxS$ , которое изображено на рис. 4◊3 выше.

<sup>3</sup>Биективное отображение между топологическими пространствами называется *гомеоморфизмом*, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли<sup>1</sup> на  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю  $a$ , т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 4.3 (вещественное проективное пространство  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$ )

Каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с направляющим вектором  $e$  единичной длины на угол  $\varphi \in [0, \pi]$ , если смотреть вдоль вектора  $e$ , точкой<sup>2</sup>  $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$ . В результате все повороты на углы, меньшие  $\pi$ , изобразятся внутренними точками шара радиуса  $\pi$  с центром в нуле. Диаметрально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол  $\pi$  вокруг соединяющей эти точки прямой<sup>3</sup>. Таким образом собственная ортогональная группа  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметрально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 4.2, применённая к пространству  $\mathbb{R}^4$ , показывает, что вещественное проективное пространство  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$  допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в  $\mathbb{R}^4$  пересекает единичную замкнутую полусферу

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_0 \geq 0,$$

и все не лежащие в гиперплоскости  $x_0 = 0$  прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из гиперплоскости  $x_0 = 0$  — по двум диаметрально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Остаётся заметить, что полусфера в  $\mathbb{R}^4$  гомеоморфна шару в  $\mathbb{R}^3$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на непрерывно меняющийся от 0 до  $2\pi$  угол образует в пространстве  $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 4.4 (СТАНДАРТНЫЕ АФФИННЫЕ КАРТЫ НА  $\mathbb{P}_n$ )

Набор из  $(n+1)$  аффинных карт  $U_\nu = U_{x_\nu}$ , задаваемых в  $\mathbb{A}^{n+1}$  уравнениями  $x_\nu = 1$ , называется *стандартным аффинным покрытием* проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ . Для каждого  $\nu = 0, 1, \dots, n$  в качестве стандартных локальных аффинных координат на карте  $U_\nu$  берутся  $n$  линейных форм  $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i/x_\nu$ , где  $0 \leq i \leq n$  и  $i \neq \nu$ . Таким образом, пространство  $\mathbb{P}_n$

<sup>1</sup>Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

<sup>2</sup>Т. е. концом вектора длины  $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$ , отложенного в направлении единичного вектора  $e$ .

<sup>3</sup>Он виден как поворот на угол  $\pi$  независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

можно представлять себе как результат склейки  $(n + 1)$  различных копий  $U_0, U_1, \dots, U_n$  аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  по их фактическим пересечениям внутри  $\mathbb{P}^n$ . В однородных координатах на  $\mathbb{P}^n$  пересечение  $U_\mu \cap U_\nu$  описывается как множество всех таких  $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , у которых обе координаты  $x_\mu$  и  $x_\nu$  не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на картах  $U_\mu$  и  $U_\nu$  это множество задаётся, соответственно, неравенствами  $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$  и  $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$ . При этом точка  $t^{(\mu)} \in U_\mu$  склеивается с точкой  $t^{(\nu)} \in U_\nu$  если и только если  $t_\nu^{(\mu)} = 1 / t_\mu^{(\nu)}$  и  $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)} / t_\mu^{(\nu)}$  для  $i \neq \mu, \nu$ . Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат  $t^{(\nu)}$  к локальным координатам  $t^{(\mu)}$ .

#### Пример 4.5 (Аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая  $C$ , заданная в однородных координатах на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  уравнением  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ . В стандартной

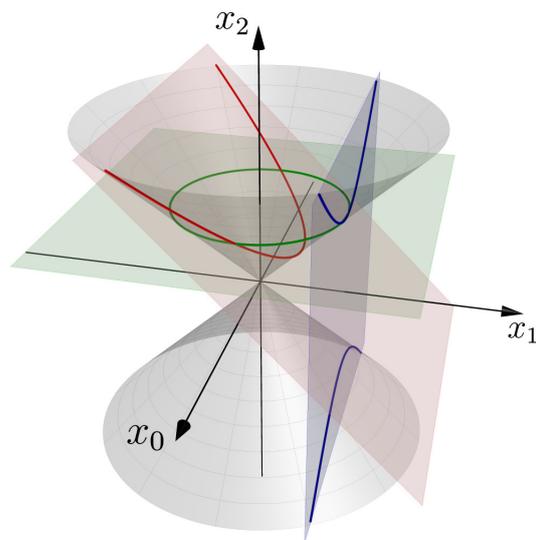


Рис. 4♦7. Аффинные изображения проективной коники.

карте  $U_1$ , где  $x_1 = 1$ , в локальных координатах  $t_0 = x_0 / x_1$  и  $t_2 = x_2 / x_1$  это уравнение превращается в уравнение гиперболы  $t_2^2 - t_0^2 = 1$ . В стандартной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ , в локальных координатах  $t_0 = x_0 / x_2$ ,  $t_1 = x_1 / x_2$  — в уравнение окружности  $t_0^2 + t_1^2 = 1$ . В нестандартной карте  $U_{x_1+x_2}$ , где  $x_1 + x_2 = 1$ , в локальных координатах  $t = x_0 / (x_1 + x_2)$  и  $s = (x_2 - x_1) / (x_2 + x_1)$  после переноса  $x_1^2$  из левой части направо и деления обеих частей на  $x_2 + x_1$  наше однородное уравнение превратится в уравнение параболы  $t^2 = u$ . Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$  в различных аффинных картах. Вид кривой  $C$  в карте  $U_\xi \subset \mathbb{P}_2$  определяется тем, как располагается по отношению к  $C$  бесконечно удалённая прямая  $\xi(x) = 0$  этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответ-

ственно, когда эта прямая не пересекается с  $C$ , касается  $C$  и пересекается с  $C$  в двух различных точках, см. рис. 4♦7.

**4.2. Проективные подпространства.** Проективизации  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  векторных подпространств  $U \subset V$  называются *проективными подпространствами* в  $\mathbb{P}(V)$ . Через любые две различные точки  $a, b \in \mathbb{P}(V)$  проходит единственная проективная прямая  $(ab)$ . Она является проективизацией линейной оболочки непропорциональных векторов  $a, b$  и состоит из всевозможных ненулевых линейных комбинаций  $\lambda a + \mu b$ , рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Отношение  $(\lambda : \mu)$  коэффициентов в разложения вектора  $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$  можно использовать в качестве внутренней однородной координаты точки  $v$  на проективной прямой  $(ab)$ .

**Упражнение 4.7.** Убедитесь, что  $k$ -мерное проективное подпространство наблюдается в любой задевающей его аффинной карте как  $k$ -мерное аффинное подпространство.

#### Предложение 4.1

Для любых двух проективных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}^n$  выполняется неравенство

$$\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n.$$

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $L = \mathbb{P}(U)$ ,  $\mathbb{P}(W)$ , где  $U, W \subset V$  — векторные подпространства. Тогда  $K \cap L = \mathbb{P}(U \cap W)$  имеет размерность  $\dim K \cap L = \dim(U \cap W) - 1 \geq \dim U + \dim W - \dim V - 1 = \dim K + 1 + \dim L + 1 - (n + 1) - 1 = \dim K + \dim L - n$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь, что любые две прямые на  $\mathbb{P}_2$  пересекаются.

**4.2.1. Проективная двойственность.** Проективизации  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$  двойственных друг другу векторных пространств  $V$  и  $V^*$  называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: соотношение  $\varphi(v) = 0$  на вектор  $v \in V$  ковектор  $\varphi \in V^*$  линейно как по  $v$ , так и по  $\varphi$ , и задаёт при фиксированном  $\varphi \in \mathbb{P}_n^\times$  гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n$ , а при фиксированном  $v \in \mathbb{P}_n$  — гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n^\times$ , состоящую из всех гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через точку  $v \in \mathbb{P}_n$ . Так как две линейные формы задают одну и ту же гиперплоскость в векторном пространстве если и только если они пропорциональны, гиперплоскости в проективном пространстве биективно соответствуют точкам двойственного проективного пространства.

Напомним<sup>1</sup>, что между векторными подпространствами дополнительных размерностей в  $V$  и  $V^*$  имеется каноническая биекция  $U \simeq \text{Ann}(U)$ . На языке проективной геометрии это означает, что множество гиперплоскостей, содержащих заданное  $m$ -мерное проективное подпространство  $K = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ , является проективным подпространством  $K^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\text{Ann } U) \subset \mathbb{P}_n^\times$  размерности  $n - m - 1$ , и при каждом  $m = 0, 1, \dots, (n - 1)$  соответствие  $K \simeq K^\times$  между  $m$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n$  и  $(n - m - 1)$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n^\times$  взаимно однозначно и оборачивает включения. Это соответствие называется *проективной двойственностью*. Оно позволяет переговаривать геометрические утверждения в эквивалентные двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Поскольку биекция  $U \simeq \text{Ann}(U)$  переводит пересечения векторных пространств в суммы и наоборот, соответствие  $K \simeq K^\times$  переводит пересечение  $K \cap L$  проективных подпространств в *линейное соединение*<sup>2</sup>  $J(K^\times, L^\times)$  — объединение всех проективных прямых<sup>3</sup>  $(\varphi\psi)$  с  $\varphi \in K^\times$ ,  $\psi \in L^\times$ . Наоборот, линейное соединение  $J(K, L)$  двойственно пересечению  $K^\times \cap L^\times$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Убедитесь, что  $\mathbb{P}(U + W) = J(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W))$  в  $\mathbb{P}(V)$  для любых ненулевых векторных подпространств  $U, W \subset V$ .

**4.2.2. Дополнительные подпространства и проекции.** Подпространства  $K = \mathbb{P}(U)$  и  $L = \mathbb{P}(W)$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *дополнительными*, если

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{и} \quad \dim K + \dim L = n - 1.$$

Например, любые две непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность проективных подпространств означает, что подлежащие им векторные подпространства  $U, W \subset V$  трансверсальны, т. е.  $U \cap W = \{0\}$ , и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n + 1) = \dim V,$$

<sup>1</sup>См. п. 1.1 на стр. 5.

<sup>2</sup>Обозначение  $J$  является сокращением от английского *join*.

<sup>3</sup>Здесь и далее удобно считать, что «прямая»  $(aa)$  это одна точка  $a$ .

откуда  $V = U \oplus W$ . В этом случае любой вектор  $v \in V$  имеет единственное разложение  $v = u + w$  с  $u \in U$  и  $w \in W$ . Если вектор  $v$  не лежит ни в  $U$ , ни в  $W$ , обе компоненты этого разложения отличны от нуля. Это означает, что для любой точки  $p \notin K \sqcup L$  существует единственная проходящая через  $p$  прямая  $\ell$ , пересекающая как  $K$ , так и  $L$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Убедитесь в этом.

Всякая пара дополнительных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  задаёт проекцию из  $K$  на  $L$

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L, \quad (4-1)$$

которая тождественно действует на  $L$  и переводит каждую точку  $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$  в точку пересечения подпространства  $L$  с той единственной прямой, которая проходит через точку  $p$  и пересекает оба подпространства  $K$  и  $L$ . На языке линейной алгебры, проекция переводит каждый вектор  $v = u + w$  с ненулевой компонентой  $w \in W$  в эту компоненту. В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , согласованных с разложением  $V = U \oplus W$  так, что начальный кусок  $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$  является координатами в  $K$ , а остаток  $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$  — координатами в  $L$ , проекция  $\pi_L^K$  просто удаляет первые  $(m + 1)$  координат  $x_\nu$  с  $0 \leq \nu \leq m$ .

**4.3. Квадрики.** Одномерные изотропные подпространства ненулевой квадратичной формы  $q$  на векторном пространстве  $V$  образуют в  $\mathbb{P}(V)$  геометрическую фигуру, которая называется *проективной квадрикой* и обозначается  $V(q)$ . Квадрика  $V(q)$  называется *гладкой* (а также *невырожденной* или *неособой*), если квадратичная форма  $q$  невырождена<sup>1</sup>. В противном случае квадрика называется *особой* или *вырожденной*.

ПРИМЕР 4.6 (квадрики на  $\mathbb{P}_1$ , геометрическая переформулировка ПРИМ. 2.1 на стр. 22)

Если  $\dim V = 2$ , уравнение  $q(x) = 0$  в ортогональном базисе формы  $q$  преобразуется либо к виду  $x_0^2 = 0$ , либо к виду  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ , где  $\alpha \neq 0$ . В первом случае форма  $q$  вырождена, а квадрика  $V(q)$  состоит из единственной точки  $p = (0 : 1)$ , представляющей одномерное ядро формы  $q$ . Гладкая квадрика  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$  либо пуста, либо состоит из двух различных точек. Первое равносильно тому, что  $-\alpha$  не является квадратом в  $\mathbb{k}$ , и над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  такого не бывает. Если же  $-\alpha = \delta^2$ , то форма  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$  зануляется ровно в двух различных точках  $(\pm \delta : 1) \in \mathbb{P}_1$ . Различить эти случаи можно при помощи определителя Грама формы  $q$  в произвольном базисе пространства  $V$ . В первом случае он нулевой, а в двух оставшихся сравним по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$  с коэффициентом  $\alpha$ . Таким образом, квадрика  $V(q)$  состоит из двух различных точек, пуста или является двойной точкой, когда её дискриминант<sup>2</sup>  $D/4 = -\det q$  является, соответственно, ненулевым квадратом, ненулевым не квадратом или обращается в нуль.

СЛЕДСТВИЕ 4.1

Квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  может пересекать прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_n$  ровно одним из следующих четырёх способов: либо  $\ell \subset Q$ , либо  $\ell \cap Q$  это одна двойная точка, либо  $\ell \cap Q$  это две различные точки, либо  $\ell \cap Q = \emptyset$ , причём над алгебраически замкнутым полем последний случай невозможен.  $\square$

**4.3.1. Касательные прямые и касательное пространство.** Прямая, проходящая через точку  $p$  квадрики  $Q$ , называется *касательной* к  $Q$  в точке  $p$ , если она лежит на квадрике  $Q$  или пересекает  $Q$  по двойной точке  $p$ . Объединение всех прямых, касающихся квадрики  $Q$  в точке  $p$ , обозначается  $T_p Q$  и называется *касательным пространством* к  $Q$  в точке  $p \in Q$ .

<sup>1</sup>Т. е. её поляризация  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  удовлетворяет условиям предл. 1.1 на стр. 8.

<sup>2</sup>См. прим. 2.1 на стр. 22.

Таким образом, прямая  $(ab)$  является касательной к квадрике  $Q = V(q)$  если и только если ограничение квадратичной формы  $q$  на линейную оболочку векторов  $a, b$  вырождено, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} q(a) & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(a, b) & q(b) \end{pmatrix} = 0, \quad (4-2)$$

где  $\tilde{q}: V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  это поляризация<sup>1</sup> формы  $q$ . Если  $a \in Q$ , равенство (4-2) равносильно ортогональности точек  $a$  и  $b$ :

$$b \in T_a Q \iff \tilde{q}(a, b) = 0. \quad (4-3)$$

Если  $b \notin Q$ , то ограничение формы  $q$  на одномерное подпространство  $b \subset V$  невырождено и  $V = b \oplus b^\perp$ . Формула (4-3) утверждает, что видимый из точки  $b \notin Q$  контур квадрики  $Q$ , т. е. ГМТ пересечения с квадрикой  $Q$  всевозможных касательных, опущенных на неё из точки  $b$ , высекается из квадрики  $Q$  не проходящей через точку  $b$  гиперплоскостью

$$\mathbb{P}(b^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, b) = 0\}, \quad (4-4)$$

которая называется *полярой* точки  $b$  относительно квадрики  $Q$ . Из формулы (4-3) также следует, что касательное пространство

$$T_a Q = \mathbb{P}(a^\perp) = \{x \mid \tilde{q}(x, a) = 0\} \quad (4-5)$$

либо является гиперплоскостью в  $\mathbb{P}(V)$ , либо совпадает со всем пространством  $\mathbb{P}(V)$ . В первом случае точка  $a \in Q$  называется *гладкой* или *неособой*, а во втором — *особой*. Особость означает, что  $\tilde{q}(v, a) = 0$  для всех  $v \in V$ , т. е. что  $a$  лежит в ядре корреляции<sup>2</sup>  $\hat{q}: V \rightarrow V^*$ , переводящей вектор  $v \in V$  в линейную форму  $w \mapsto \tilde{q}(w, v)$  на пространстве  $V$ . Все ненулевые векторы из  $\ker \hat{q}$  изотропны и являются особыми точками квадрики  $Q$ . Проективное подпространство

$$\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset Q$$

называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадрики  $Q$ . Оно непусто если и только если квадрика  $Q$  особа в указанном в самом начале н° 4.3 смысле.

#### ТЕОРЕМА 4.1

Пересечение особой квадрики  $Q$  с любым дополнительным к  $\text{Sing } Q$  проективным подпространством  $L \subset \mathbb{P}(V)$  является гладкой (возможно пустой) квадрикой  $Q' = L \cap Q$  в подпространстве  $L$ , и исходная квадрика  $Q$  является линейным соединением<sup>3</sup>  $Q'$  и  $\text{Sing } Q$ .

*Доказательство.* Невырожденность ограничения формы  $q$  на подпространство  $L$  была доказана в предл. 1.5 на стр. 15. Каждая пересекающая  $\text{Sing } Q$  прямая, будучи касательной к квадрике  $Q$ , либо целиком лежит на квадрике  $Q$ , либо пересекает  $Q$  ровно в одной точке — точке своего пересечения с  $\text{Sing } Q$ . Поэтому каждая прямая  $(a, b)$  с  $a \in \text{Sing } Q$ ,  $b \in Q'$  целиком лежит на  $Q$ , т. е.  $J(Q', \text{Sing } Q) \subset Q$ . По упр. 4.10 каждая не лежащая в  $L$  гладкая точка  $c \in Q$  лежит на некоторой прямой, пересекающей  $L$  и  $\text{Sing } Q$ . Поскольку эта прямая пересекает  $Q$  в точке  $c \notin \text{Sing } Q$ , она целиком лежит на квадрике, а значит, пересекает  $L$  в точке, лежащей на квадрике  $Q'$ . Поэтому  $Q \subset J(Q', \text{Sing } Q)$ .  $\square$

**Упражнение 4.11.** Покажите, что квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

<sup>1</sup>См. н° 2.3 на стр. 20.

<sup>2</sup>См. н° 1.2.2 на стр. 7.

<sup>3</sup>Т. е. объединением всех прямых вида  $(ab)$  с  $a \in Q'$  и  $b \in \text{Sing } Q$ , ср. с упр. 4.9 на стр. 43.

**4.3.2. Коники.** Квадрики на плоскости называются *кониками*. Примером гладкой коники является кривая из [прим. 4.5](#). Вырожденная коника задаётся квадратичной формой  $q$  ранга 1 или 2. В первом случае  $q$  является квадратом линейной формы, поскольку в ортогональном базисе записывается в виде  $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2$ . Соответствующая коника  $C = V(q)$  называется *двойной прямой*. Она выглядит как прямая  $x_0 = 0$  и совпадает с  $\text{Sing } C$ . В свете [теор. 4.1](#) коника  $C$  является линейным соединением прямой  $\text{Sing } C$  и пустой квадрики<sup>1</sup>. Если  $\text{rk } q = 2$ , пространство  $\text{Sing } q$  является точкой — проективизацией одномерного ядра формы  $Q$ . По [теор. 4.1](#) пересечение такой коники  $C$  с любой не проходящей через особую точку прямой является гладкой квадрикой на этой прямой и, как мы видели [прим. 4.6](#), либо пусто, либо состоит из двух разных точек, причём первый случай над алгебраически замкнутым полем невозможен. В первом случае коника  $C$  называется *двойной точкой* и совпадает со своей особой точкой. Например, над полем  $\mathbb{R}$  уравнение  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  задаёт двойную точку  $(0 : 0 : 1)$ . Во втором случае коника  $C$  является объединением двух различных прямых, пересекающихся в её особой точке, и называется *распавшейся*. В ортогональном базисе уравнение коники ранга 2 приводится к тому же самому виду  $x_0^2 + \alpha x_1^2 = 0$ , что и в [прим. 4.6](#). Точка  $(0 : 0 : 1)$  является особой, ограничение формы на дополнительную к ядру прямую  $x_2 = 0$  анизотропно если  $-\alpha$  не квадрат, и гиперболично если  $-\alpha$  является квадратом. Во втором случае форма разлагается в произведение двух линейных множителей, задающих две прямые, на которые распадается коника  $C$ .

Невырожденная квадратичная форма  $q$  на трёхмерном пространстве либо анизотропна, либо является прямой ортогональной суммой двумерной гиперболической и одномерной анизотропной форм. В первом случае  $V(q) = \emptyset$ . Над полем  $\mathbb{R}$  такая коника задаётся уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Над алгебраически замкнутым полем таких коник не бывает. Во втором случае квадратичная форма в подходящих координатах записывается уравнением

$$x_1^2 = x_0 x_2. \quad (4-6)$$

Поскольку любые значения  $x_0 = t_0$ ,  $x_1 = t_1$  однозначно дополняются до тройки

$$(t_0 : t_1 : t_1^2/t_0) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2),$$

удовлетворяющей уравнению (4-6), коника (4-7) является образом вложения

$$\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0 : t_1) \mapsto (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2). \quad (4-7)$$

Когда точка  $(t_0 : t_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , точка  $(x_0 : x_1 : x_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$  ровно по одному разу пробегает все изотропные подпространства квадратичной формы  $x_1^2 - x_0 x_2$ .

Итак, над любым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеется единственная с точностью до линейной замены координат непустая невырожденная коника. В подходящих координатах она задаётся уравнением (4-6) и допускает рациональную параметризацию (4-7).

<sup>1</sup>Дополнительным подпространством к прямой на плоскости является точка — проективизация какого-нибудь одномерного подпространства в  $V$ , а невырожденная форма на одномерном пространстве автоматически анизотропна.

Пример 4.7 (проекция коники на прямую)

Получить рациональную параметризацию непустой невырожденной коники  $C = V(q)$  можно без приведения её уравнения к виду  $x_1^2 = x_0x_2$ , если явно известна хотя бы одна точка  $p \in C$ . Для этого надо спроектировать из точки  $p$  на конику  $C$  любую не проходящую через  $p$  прямую  $\ell$ , как на рис. 4◊8. По сл. 4.1, каждая не касающаяся коники  $C$  в точке  $p$  прямая  $(pr)$  с  $r \in \ell$  пересекает конику  $C$  ещё ровно в одной, отличной от  $p$  точке  $x = x(r) \in C$ . Для точки  $r = T_p C \cap \ell$  положим  $x(r) = p$ . Полученную биекцию легко описать явными формулами. Если  $r \in \ell \cap C$ , то  $x(r) = r$ . Если точка  $r$  анизотропна, то отражение<sup>1</sup> изотропного вектора  $p$  в гиперплоскости  $r^\perp$

$$\sigma_r(p) = p - 2 \frac{\tilde{q}(p, r)}{\tilde{q}(r, r)} r \quad (4-8)$$

тоже является изотропным вектором и лежит на прямой  $(pr)$ . Эта точка совпадает с точкой  $p$  если и только если  $p \in r^\perp$ , т. е. когда прямая  $(rp)$  касается<sup>2</sup> коники  $C$  в точке  $p$ . Таким образом, формула (4-8) задаёт биекцию между точками  $r \in \ell \setminus C$  и точками  $x = \sigma_r(p) \in C \setminus \ell$ . Соответствующие друг другу точки связаны соотношением

$$q(r) \cdot (p - x) = 2\tilde{q}(p, r) \cdot r. \quad (4-9)$$

Если выбрать на прямой  $\ell$  базис  $a, b$  и использовать  $p, a, b$  в качестве базиса на  $\mathbb{P}_2$ , то однородные координаты  $(x_p : x_a : x_b)$  точки  $x \in C$ , удовлетворяющей (4-9), и однородные координаты  $(t_a : t_b)$  точки  $r = t_a a + t_b b \in \ell$  выразятся друг через друга так:

$$\begin{aligned} (x_p : x_a : x_b) &= (q(t_a a + t_b b) : -2t_a \tilde{q}(p, t_a a + t_b b) : -2t_b \tilde{q}(p, t_a a + t_b b)) \\ (t_a : t_b) &= (x_a : x_b). \end{aligned} \quad (4-10)$$

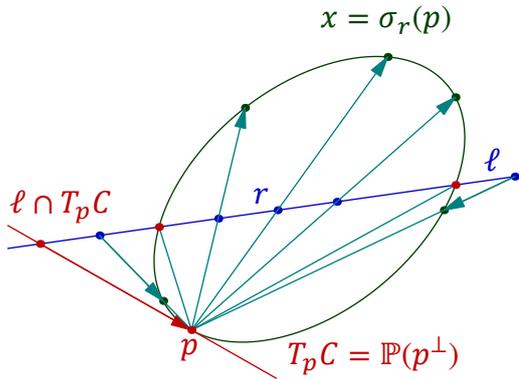


Рис. 4◊8. Проекция коники на прямую.

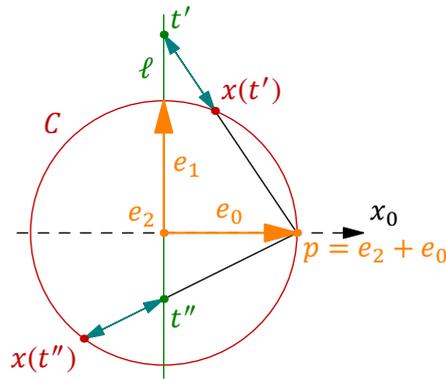


Рис. 4◊9. Параметризация окружности.

Пример 4.8 (рациональная параметризация окружности и пифагоровы тройки)

Окружность  $x_0^2 + x_1^2 = 1$  является изображением гладкой проективной коники  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$  из прим. 4.5 в стандартной аффинной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ . Построим рациональную параметризацию этой коники при помощи проекции из точки  $p = e_0 + e_2 = (1 : 0 : 1)$  на задаваемую уравнением  $x_0 = 0$  прямую  $\ell = (e_1 e_2)$ , см. рис. 4◊9. Беря  $r = t_1 e_1 + t_2 e_2 = (0 : t_1 : t_2)$ , получаем  $\tilde{q}(p, r) = -t_2$ ,  $q(r) = t_1^2 - t_2^2$ , и по формуле (4-10),

$$x = (pr) \cap C = (t_1^2 - t_2^2)(e_0 + e_2) + 2t_2^2 e_2 + 2t_1 t_2 e_1 = (t_1^2 - t_2^2) e_0 + 2t_1 t_2 e_1 + (t_1^2 + t_2^2) e_2$$

<sup>1</sup>См. н° 2.2 на стр. 18.

<sup>2</sup>См. формулу (4-3) на стр. 45.

В стандартном базисе  $e_0, e_1, e_2$  эта точка имеет однородные координаты

$$(x_0 : x_1 : x_2) = ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2)). \quad (4-11)$$

Альтернативный способ получения рациональной параметризации заключается в приведении квадратичной формы  $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  к виду  $a_1^2 = a_0a_2$  и использовании параметризации

$$(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)$$

из форм. (4-7) на стр. 46. Это делается при помощи линейной замены переменных

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = (a_0 + a_2)/2, \end{cases}$$

превращающей (4-7) в (4-11). Обратите внимание, что подставляя в правую часть формулы (4-11) всевозможные  $(t_0, t_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , мы получим слева все возможные пифагоровы тройки<sup>1</sup> с точностью до пропорциональности.

**4.4. Проективные многообразия.** Если ковекторы  $x_0, x_1, \dots, x_n$  образуют базис векторного пространства  $V^*$ , то алгебра многочленов  $\mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  от этих ковекторов обозначается  $SV^*$  и называется *симметрической алгеброй* векторного пространства  $V^*$ . Как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , она раскладывается в прямую сумму векторных подпространств:

$$SV^* = \bigoplus_{k \geq 0} S^k V^*,$$

где  $S^k V^*$  — пространство однородных многочленов степени  $k$  от  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Как и для грасмановых многочленов<sup>2</sup>, использование не привязанных к выбору базиса названий и обозначений мотивировано тем, что пространство  $S^1 V^*$  однородных линейных многочленов канонически отождествляется с векторным пространством  $V^*$ , а каждое  $S^k V^*$  — с линейной оболочкой всевозможных произведений  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k$ , составленных из произвольных  $k$  ковекторов  $\varphi_i \in V^*$ . Пространство констант  $S^0 V^* = \mathbb{k} \cdot 1$  тоже от выбора базиса не зависит.

Более того, гомоморфизм алгебры многочленов в алгебру функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$

$$\mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}^V,$$

который сопоставляет многочлену  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  функцию, принимающую на векторе  $v = \sum \lambda_i e_i$  значение  $f(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , где  $e_0, e_1, \dots, e_n$  — двойственный к  $x_0, x_1, \dots, x_n$  базис в  $V$ , тоже не зависит от выбора базиса, поскольку отображает каждое произведение ковекторов  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k$  в функцию  $v \mapsto \prod \varphi_i(v)$ , ничего ни про какие базисы не ведающую.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. (СИММЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА)** Симметрическая алгебра  $SV$  имеется у любого векторного пространства  $V$  и, по определению, представляет собою алгебру многочленов  $\mathbb{k}[e_1, e_2, \dots, e_m]$  от базисных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$  произвольного базиса в  $V$ . Она является прямой суммой векторных пространств  $S^k V$ , порождённых всевозможными произведениями  $v_1 v_2 \dots v_k$  векторов  $v_i \in V$  и называемых  $k$ -тыми *симметрическими степенями* векторного пространства  $V$ .

<sup>1</sup>Т. е. целочисленные решения уравнения Пифагора  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ .

<sup>2</sup>См. п° 3.3 на стр. 31.

**4.4.1. Однородные уравнения.** Важное отличие проективной геометрии от аффинной состоит в том, что отличный от константы многочлен  $f \in SV^*$  не является функцией на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$ , поскольку его значения  $f(v)$  и  $f(\lambda v)$  на пропорциональных векторах обычно отличаются друг от друга. Тем не менее, множество нулей однородного многочлена

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}, \quad \text{где } f \in S^k V^*,$$

является геометрической фигурой в  $\mathbb{P}(V)$ , так как равенства  $f(v) = 0$  и  $f(\lambda v) = \lambda^k f(v) = 0$  эквивалентны для ненулевых  $v \in V$  и  $\lambda \in \mathbb{k}$ . На геометрическом языке, аффинная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$  представляет собою конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, а каждая такая прямая является точкой в проективном пространстве. Множество этих точек называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени  $k = \deg f$ . Пересечение проективных гиперповерхностей, т. е. множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности ненулевых решений системы однородных полиномиальных уравнений, называются *проективным алгебраическим многообразием*.

Простейшими примерами проективных многообразий служат проективные подпространства  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ . Каждое такое подпространство задаётся системой однородных линейных уравнений  $\varphi(v) = 0$ , где  $\varphi$  пробегает  $\text{Ann } U \subset V^*$  или какую-нибудь систему линейных порождающих этого подпространства.

**4.4.2. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности.** Пусть аффинная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{A}^n$  в аффинном координатном пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$  задаётся (неоднородным) многочленом степени  $d$  вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый многочлен  $f_k \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  однороден степени  $k$ . Вложим  $\mathbb{A}^n$  в проективное координатное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  в качестве стандартной аффинной карты  $U_0$  и образуем однородный многочлен

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который получается из  $f$  умножением каждого монома на такую степень переменной  $x_0$ , которая делает степень всего монома равной  $d$ . Многочлен  $\bar{f}$  превращается в  $f$ , если положить  $x_0 = 1$ . Таким образом, многочлены  $f$  и  $\bar{f}$  однозначно определяют друг друга. Проективная гиперповерхность  $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$  называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности  $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ . Последняя является пересечением проективной гиперповерхности  $V(\bar{f})$  со стандартной аффинной картой  $U_0$ . Дополнение  $V(\bar{f}) \setminus U_0 = V(\bar{f}) \cap \mathbb{P}(\text{Ann } x_0)$ , т. е. пересечение гиперповерхности  $V(\bar{f})$  с бесконечно удалённой проективной гиперплоскостью аффинной карты  $U_0$ , задаётся в однородных координатах  $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$  на этой гиперплоскости однородным уравнением  $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , т. е. старшей однородной компонентой многочлена  $f$ . Точки этой проективной гиперповерхности называются *асимптотическими направлениями* аффинной гиперповерхности  $V(f)$ .

Пример 4.9 (каскадальная кубика)

Проективным замыканием аффинной кубической кривой  $x_1 = x_2^3$  является проективная кубическая кривая  $x_0^2 x_1 = x_2^3$ , имеющая ровно одну бесконечно удалённую точку  $(0 : 1 : 0)$ . В покрывающей эту точку стандартной аффинной карте  $U_1$ , где  $x_1 = 1$ , эта кривая задаётся уравнением<sup>1</sup>  $x_0^2 = x_2^3$  и имеет острив в точке  $(0 : 1 : 0)$ .

<sup>1</sup>Аффинная кривая с таким уравнением называется *полукубической параболой*.

**4.4.3. Пространство гиперповерхностей.** Поскольку пропорциональные однородные многочлены задают одну и ту же гиперповерхность, каждая гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  степени  $d$  определяется не многочленом  $f$ , а задаваемой этим многочленом точкой проективного пространства  $\mathbb{P}(S^d V^*)$ , которое называется *пространством гиперповерхностей* степени  $d$  в  $\mathbb{P}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.12. Найдите размерность пространства  $\mathbb{P}(S^d V^*)$ .

Так как для произвольно зафиксированной точки  $p \in \mathbb{P}(V)$  уравнение  $f(p) = 0$  является *линейным* уравнением на  $f \in S^d V^*$ , гиперповерхности степени  $d$ , проходящие через заданную точку  $p$ , образуют гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Через любые пять точек на  $\mathbb{P}_2$  можно провести конику. Если никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она вдобавок ещё и гладкая.

Доказательство. Согласно [упр. 4.12](#), коники на плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  являются точками пространства  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Поскольку любые пять гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_5$  имеют непустое пересечение, через любые пять точек в  $\mathbb{P}_2$  проходит хотя бы одна коника. Если какие-то три из пяти точек коллинеарны, то проходящая через них прямая содержится в конике по [сл. 4.1](#) на [стр. 44](#). Стало быть, коника распадается. Если при этом никакие четыре из пяти точек не коллинеарны, вторая компонента распавшейся коники однозначно фиксируется тем, что проходит через оставшиеся две точки. Если никакие три из пяти точек не коллинеарны, то проходящая через них коника не может быть особой в силу сказанного в [п° 4.3.2](#) на [стр. 46](#). Гладкая коника, проходящая через пять заданных точек автоматически единственна в силу следующего ниже [предл. 4.3](#).  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3

Гладкая коника и произвольная кривая степени  $d$  на  $\mathbb{P}_2$  либо пересекаются не более, чем по  $2d$  точкам, либо коника целиком содержится в кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Согласно [форм. \(4-7\)](#) на [стр. 46](#), гладкая коника на  $\mathbb{P}_2$  состоит из точек вида  $x = q(t)$ , где  $q : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  — вложение, задаваемое однородными многочленами второй степени. Все значения  $t$ , при которых коника пересекает кривую с уравнением  $f(x) = 0$ , являются корнями однородного уравнения  $f(q(t)) = 0$ , левая часть которого либо тождественно обращается в нуль, либо является однородным многочленом степени  $2d$  от  $t = (t_0, t_1)$ . В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае многочлен имеет не более  $2d$  различных корней<sup>1</sup> на  $\mathbb{P}_1$ .  $\square$

**4.4.4. Линейные системы.** Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями  $V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m)$  задаётся уравнением вида  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение  $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$ , которое называется *базисным множеством* линейной

<sup>1</sup>Ср. с [форм. \(4-12\)](#) на [стр. 52](#) ниже.

системы. Поскольку базисное множество является пересечением *всех* гиперповерхностей системы, оно не зависит от выбора линейных образующих в этой системе.

По старинной традиции, одномерные, двумерные и трёхмерные линейные системы называются *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Например, все прямые, проходящие через заданную точку  $p \in \mathbb{P}_2$ , образуют пучок, ибо составляют прямую<sup>1</sup>  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ . Точно также все двумерные плоскости, проходящие через заданную прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_3$ , составляют прямую  $\ell^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$  и, стало быть, тоже образуют пучок.

Так как любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, в любом пучке гиперповерхностей<sup>2</sup> всегда имеется гиперповерхность, проходящая через любую наперёд заданную точку.

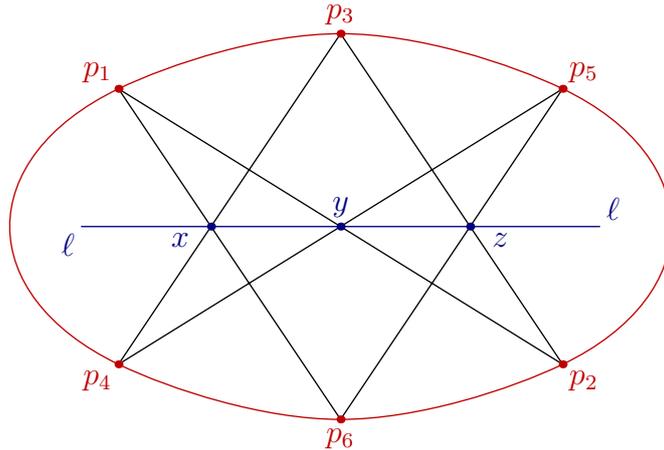


Рис. 4♦10. Гексограмма Паскаля.

#### ПРИМЕР 4.10 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Существует замечательный критерий того, когда через шесть точек  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , никакие три из которых не коллинеарны, можно провести конику. Для этого необходимо и достаточно, чтобы три точки пересечений пар «противоположных сторон» шестиугольника  $p_1, p_2, \dots, p_6$

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

лежали на одной прямой, см. рис. 4♦10. Следующее простое соображение, принадлежащее Якоби, доказывает необходимость (для  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ). Пусть все шесть точек лежат на конике  $C$ , автоматически гладкой. Рассмотрим две распавшиеся кубические кривые  $F = (p_1p_2) \cup (p_3p_4) \cup (p_5p_6)$  и  $G = (p_2p_3) \cup (p_4p_5) \cup (p_6p_1)$  и выберем на конике  $C$  седьмую точку  $p_7$ , отличную от шести заданных. Все кубические кривые из пучка  $(FG) = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$  проходят через девять точек  $\{p_1, \dots, p_6, x, y, z\} = F \cap G$ , и хотя бы одна из этих кривых, назовём её  $Q$ , проходит через точку  $p_7$ , а значит, пересекает конику  $C$  по семи точкам. Согласно предл. 4.3, это означает, что коника  $C$  содержится в кубической кривой  $Q$  в качестве компоненты. Из теоремы Гильберта о нулях, которая доказывается в курсе коммутативной алгебры, следует, что уравнение кубики  $Q$  делится на уравнение коники  $C$ . Частное — однородный многочлен первой степени — задаёт прямую, проходящую через не лежащие на конике  $C$  базисные точки  $x, y, z$  пучка  $(FG)$ .

В следующем §5 мы дадим два различных самодостаточных доказательства теоремы Паскаля, использующие свойства проективных преобразований.

<sup>1</sup>См. н° 4.2.1 на стр. 43.

<sup>2</sup>Любой степени и над любым полем.

**4.4.5. Конфигурации точек на прямой.** На двумерном векторном пространстве  $U$  имеется единственная с точностью до пропорциональности билинейная кососимметричная форма площади  $\det : U \times U \rightarrow \mathbb{k}, (u, w) \mapsto \det(u, w)$ , сопоставляющая паре векторов определитель матрицы их координат в каком-нибудь базисе. При замене базиса эта форма умножается на ненулевую константу — определитель матрицы перехода. Правая корреляция формы площади задаёт изоморфизм  $\det^\wedge : U \simeq U^*$ , переводящий вектор  $w \in U$  в линейную форму  $u \mapsto \det(u, w)$  и с точностью до пропорциональности не зависящий от выбора базиса. Переходя к проективизациям, мы получаем канонический изоморфизм  $\det : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(U^*)$  между двойственными проективными прямыми  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  и  $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ , переводящий точку  $p = (p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$  в точку  $p^* = (p_1 : -p_0) \in \mathbb{P}_1^\times$ , задаваемую однородным линейным многочленом

$$p^*(x_0, x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(x, p) = p_1 x_0 - p_0 x_1 \in S^1 U^*,$$

который однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что  $p = V(p^*)$ . Таким образом, точки проективной прямой, т. е. гиперповерхности степени 1 в  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , взаимно однозначно соответствуют точкам пространства  $\mathbb{P}(S^1 U^*) = \mathbb{P}_1^\times$  таких гиперповерхностей.

Любая конечная конфигурация из  $d$  неупорядоченных точек  $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$ , среди которых могут быть совпадающие, является алгебраической гиперповерхностью  $V(f)$  степени  $d$ , задаваемой однородным многочленом

$$f(x_0, x_1) = p_1^* p_2^* \dots p_d^* = \prod_{i=1}^d \det(x, p_i) = \prod_{v=1}^d (p_{i,1} x_0 - p_{i,0} x_1), \quad (4-12)$$

где  $(p_{i,0} : p_{i,1})$  это однородная координата точки  $p_i$ . Точки  $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$  называются *корнями* однородного многочлена (4-12). Разложение (4-12) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням, с той только разницей, что в формуле (4-12) и многочлен  $f$ , и числа  $(p_{i,0} : p_{i,1})$  рассматриваются с точностью до пропорциональности, т. е. как точки проективных пространств  $\mathbb{P}_d^\times = \mathbb{P}(S^d U^*)$  и  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$ . Однородный многочлен степени  $d$  от двух переменных имеет не более  $d$  различных корней на  $\mathbb{P}_1$ , а если основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей<sup>1</sup>, всегда существует ровно  $d$ . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  точки пространства  $\mathbb{P}_d^\times = \mathbb{P}(S^d U^*)$  гиперповерхностей степени  $d$  в  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  находятся в биекции со всевозможными конфигурациями из  $d$ -неупорядоченных точек на  $\mathbb{P}_1$ .

**4.4.6. Рациональные нормальные кривые.** Двойственный способ думать про  $d$ -точечные конфигурации  $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}(U)$  заключается в том, чтобы воспринимать их как точки проективного пространства  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$  однородных многочленов степени  $d$  от базисных векторов  $e_0, e_1$  пространства  $U$ . При таком подходе конфигурации  $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1$  сопоставляется произведение  $p_1 p_2 \dots p_d \in \mathbb{P}_d$ .

Покажем, что над произвольным полем  $\mathbb{k}$ , характеристика которого не делит  $d$ , множество всех тех  $d$ -точечных конфигураций на  $\mathbb{P}_1$ , где все  $d$  точек совпадают друг с другом, образуют алгебраическую кривую  $C_d \subset \mathbb{P}_d$ . Эта кривая называется *кривой Веронезе* или *рациональной нормальной кривой* степени  $d$  в  $\mathbb{P}_d$ . По определению, она является образом вложения Веронезе

$$v_d : \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(S^d U), \quad a \mapsto a^d, \quad (4-13)$$

<sup>1</sup>Кратностью корня  $p$  однородного многочлена  $f(x_0, x_1)$  по-определению называется максимальная степень линейной формы  $\det(x, p)$ , на которую многочлен  $f$  делится в кольце  $\mathbb{k}[x_0, x_1]$ .

переводящего линейный двучлен  $a = t_0 e_0 + t_1 e_1$  в однородный многочлен

$$(t_0 e_0 + t_1 e_1)^d = \sum_{i=0}^d t_0^{d-i} t_1^i \binom{d}{i} e_0^{d-1} e_1^i.$$

Если  $\text{char} \mathbb{k} \nmid d$ , мономы  $\binom{d}{i} e_0^{d-1} e_1^i$  образуют базис<sup>1</sup> векторного пространства  $S^d U$ , и в однородных координатах относительно этого базиса отображение Веронезе  $v_d : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_d$  имеет вид

$$(t_0 : t_1) \mapsto (t_0^d : t_0^{d-1} t_1 : t_0^{d-2} t_1^2 : \dots : t_1^d).$$

Координаты в правой части образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $t_1/t_0$ . Наоборот, любой набор из  $d+1$  чисел  $a_0, a_1, \dots, a_d$ , образующих геометрическую прогрессию, т. е. таких, что

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

находится в образе отображения Веронезе. Тем самым, кривая Веронезе описывается системой однородных квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = a_i a_{j+1} - a_{i+1} a_j = 0, \quad \text{где } 0 \leq i < j \leq d. \quad (4-14)$$

ЛЕММА 4.1

Если  $\text{char} \mathbb{k} \nmid d$ , никакая гиперплоскость в  $\mathbb{P}_d$  не пересекает кривую Веронезе  $C_d \subset \mathbb{P}_d$  более, чем по  $d$  точкам. В частности, любые  $k$  различных точек кривой Веронезе порождают  $(k-1)$ -мерное проективное подпространство при  $1 \leq k \leq d+1$ .

Доказательство. Гиперплоскость, задаваемая уравнением  $A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0$ , пересекает кривую  $C_d$  по образам тех точек  $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ , которые являются корнями однородного многочлена  $\sum A_\nu t_0^{d-i} t_1^i$  степени  $d$ .  $\square$

ПРИМЕР 4.11 (КОНИКА ВЕРОНЕЗЕ)

Коника Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U)$ , где  $\dim U = 2$ , состоит из всех таких квадратичных форм

$$a_0 e_0^2 + 2a_1 e_0 e_1 + a_2 e_1^2$$

от базисных векторов  $e_0, e_1$  пространства  $U$ , которые являются квадратами линейных форм. Система (4-14) в этом случае состоит из одного, хорошо известного с седьмого класса уравнения

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0, \quad (4-15)$$

решения которого имеют вид  $(a_0 : a_1 : a_2) = (t_0^2 : t_0 t_1 : t_1^2)$ , где  $t = (t_0 : t_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , что мы уже видели в форм. (4-7) на стр. 46. Таким образом, приведение уравнения непустой невырожденной коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  к виду (4-15) на геометрическом языке означает такое отождествление объемлющей конику плоскости  $\mathbb{P}_2$  с пространством  $\mathbb{P}(S^2 U)$  неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , при котором коника  $C$  становится множеством двойных точек  $a^2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.13. Убедитесь, что множество пар  $ab$ , в которых точка  $a$  фиксирована, а  $b$  пробегает  $\mathbb{P}(U)$ , является прямой на плоскости  $\mathbb{P}(S^2 U)$ .

<sup>1</sup>Обратите внимание, что  $(t_0 e_0 + t_1 e_1)^d = t_0^d x_0^d + t_1^d e_1^d$ , когда  $d \mid \text{char} \mathbb{k}$ .

Мы видим, что пара касательных, которые можно опустить на конику Веронезе из точки  $ab$ , это прямые, образованные парами  $at$  и  $bt$ , где  $t$  пробегает  $\mathbb{P}(U)$ . Они касаются коники  $C_2$  в точках  $a^2$  и  $b^2$  соответственно. Отметим, что если основное поле  $\mathbb{k}$  не является алгебраически замкнутым, то на плоскости  $\mathbb{P}(S^2U)$  могут быть точки, не представимые в виде  $ab$ , поскольку могут существовать не раскладывающиеся на линейные множители однородные многочлены второй степени.

## §5. Проективные преобразования

**5.1. Линейные проективные изоморфизмы.** Всякий линейный изоморфизм векторных пространств  $F : U \simeq W$  задаёт биекцию  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$  между одномерными подпространствами в  $U$  и  $W$ , которая называется *линейным проективным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

**ПРИМЕР 5.1** (перспектива между гиперплоскостями)

Для любой пары проективных гиперплоскостей  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и произвольной точки  $p \notin L_1 \cup L_2$  центральная проекция гиперплоскости  $L_1$  из точки  $p$  на гиперплоскость  $L_2$  задаёт проективный изоморфизм между  $L_1$  и  $L_2$ , который мы будем обозначать  $p : L_1 \simeq L_2$  и называть *перспективой* с центром в  $p$ .

В самом деле, пусть  $L_1 = \mathbb{P}(U)$ ,  $L_2 = \mathbb{P}(W)$  и  $p = \mathbb{P}(k \cdot e)$ . Тогда  $V = W \oplus k \cdot e$ , ибо  $p \notin L_2$ , и центральная проекция из  $p$  задаётся ограничением линейной проекции  $V \rightarrow W$  вдоль одномерного подпространства  $k \cdot e$  на подпространство  $U \subset V$ . Так как  $p \notin L_1$ , подпространство  $U$  имеет нулевое пересечение с ядром проекции и, стало быть, проектируется на  $W$  изоморфно.

**ТЕОРЕМА 5.1**

Для любых двух векторных пространств  $U, W$  одинаковой размерности  $\dim U = \dim W = n + 1$  и упорядоченных наборов из  $n + 2$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$ ,  $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ , в каждом из которых никакие  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм  $F : U \simeq W$ , такой что  $\bar{F}(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

*Доказательство.* Рассмотрим какие-нибудь ненулевые векторы  $u_i$  и  $w_i$ , представляющие точки  $p_i$  и  $q_i$ , и зафиксируем наборы векторов  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  в качестве базисов векторных пространств  $U$  и  $W$ . Отображение  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  тогда и только тогда переводит точку  $p_i$  в точку  $q_i$ , когда  $F(u_i) = \lambda_i w_i$  для некоторых ненулевых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . Поэтому точки  $p_0, p_1, \dots, p_n$  переходят в точки  $q_0, q_1, \dots, q_n$  если и только если матрица  $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$  оператора  $F$  в выбранных нами базисах диагональна с ненулевыми элементами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  на диагонали. В силу наложенных на точки условий все координаты  $x_i$  в разложении  $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$  вектора  $u_{n+1}$  по базису  $\mathbf{u}$  отличны от нуля, так как при занулении  $i$ -той координаты точка  $p_{n+1}$  и  $n$  точек  $p_\nu$  с  $\nu \neq i$  оказываются в одной гиперплоскости  $x_i = 0$ . Если  $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$  и  $F(u_{n+1}) = \lambda w_{n+1}$  для некоторого ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ , то  $\lambda_i x_i = \lambda y_i$  при всех  $0 \leq i \leq n$ , откуда  $\lambda_i = \lambda y_i / x_i$ , т. е. матрица оператора  $F$  определяется однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу  $\lambda$ . □

**Следствие 5.1**

Два линейных изоморфизма тогда и только тогда задают равные проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

**ПРИМЕР 5.2** (четырёхвершинник и эпиморфизм  $S_4 \rightarrow S_3$ )

Любые четыре точки  $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$ , никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих пары точек для каждого из трёх различных способов разбить эти точки на две пары, см. [рис. 5◊1](#). Эта конфигурация называется *четырёхвершинником  $abcd$* , а каждая из трёх пар прямых — парой его *противоположных сторон*. Точки пересечений пар противоположных сторон

$$z = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad x = (ad) \cap (bc) \tag{5-1}$$

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником*  $xuz$  четырёхвершинника  $abcd$ . Согласно [теор. 5.1](#), каждая перестановка точек  $a, b, c, d$  однозначно задаёт проективное преобразование  $\mathbb{P}_2 \simeq \mathbb{P}_2$ , переводящее четырёхвершинник  $abcd$  в себя, а значит, как-то переставляющее вершины  $x, y, z$  ассоциированного с ним треугольника. Таким образом возникает гомоморфизм групп  $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ . Поскольку транспозиции  $(ab)$  и  $(bc)$  переходят при этом в транспозиции  $(xy)$  и  $(yz)$ , гомоморфизм  $\pi$  биективно отображает подгруппу  $S_3 = \text{Stab}(d) \subset S_4$ , состоящую из оставляющих вершину  $d$  на месте перестановок вершин  $a, b, c$ , на группу перестановок вершин  $x, y, z$ , переводя каждую перестановку вершин  $a, b, c$  в точно такую же перестановку вершин  $x, y, z$ . Ядро<sup>1</sup>

$$\ker \pi = \{(a, b, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)\},$$

состоит из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций. Эта подгруппа называется *четвертной группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается, соответственно, через  $V_4$  или  $D_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь, что  $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , а  $S_4 \simeq V_4 \rtimes S_3$  является полупрямым нормальной подгруппы  $V_2 \triangleleft S_4$  и дополнительной подгруппы  $S_3 = \text{Stab}(d)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 (линейные проективные группы)

Согласно [теор. 5.1](#) линейные проективные автоморфизмы пространства  $\mathbb{P}(V)$  образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы  $GL(V)$  по подгруппе скалярных гомотетий  $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$ . Эта фактор группа обозначается  $PGL(V) = GL(V)/H$  и называется *линейной проективной группой* пространства  $V$ . Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу  $GL(V)$  с группой невырожденных матриц  $GL_{n+1}$ , проективная группа  $PGL(V)$  отождествится с группой  $PGL_{n+1}$  невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

ПРИМЕР 5.3 (дробно линейные преобразования прямой)

Группа  $PGL_2(\mathbb{k})$  состоит из классов пропорциональности матриц  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с  $ad - bc \neq 0$ .

Она действует на  $\mathbb{P}_1$  по правилу

$$A : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте  $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$  с аффинной координатой  $t = x_0/x_1$ , это действие имеет вид дробно линейного преобразования  $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ . Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки  $a, b, c$  в  $\infty, 0, 1$  таково:

$$t \mapsto \frac{t - b}{t - a} \cdot \frac{c - a}{c - b}. \quad (5-2)$$

Образ точки  $d \in \mathbb{P}_1$  при таком преобразовании называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек  $a, b, c, d$  и обозначается

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}.$$

<sup>1</sup>Напомним, что ядром гомоморфизма групп  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  называется подгруппа  $\ker \varphi \subset G_1$ , состоящая из всех элементов группы  $G_1$ , отображающихся в единицу группы  $G_2$ .

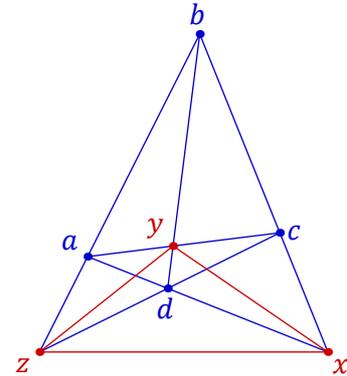


Рис. 5.1. Четырёхвершинник.

## ТЕОРЕМА 5.2

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль всякое биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое может быть задано в некоторой аффинной карте с координатой  $t$  формулой

$$\varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (5-3)$$

продолжается на всю прямую и является линейным проективным изоморфизмом.

Доказательство. Переходя к однородным координатам  $(x_0 : x_1)$ , для которых  $t = x_0/x_1$ , и меняя при необходимости конечное множество точек неопределённости отображения  $\varphi$ , перепишем формулу (5-3) в виде  $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (f(x_0, x_1) : g(x_0, x_1))$ , где  $f$  и  $g$  — взаимно простые однородные многочлены от  $(x_0, x_1)$  одинаковой степени  $\deg f = \deg g = d$ . Точка  $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$  имеет при отображении  $\varphi$  ровно один прообраз если и только если однородный многочлен  $\vartheta_1 \cdot f(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot g(x_0, x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно один корень  $\zeta = \varphi^{-1}(\vartheta)$ . Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень  $d$ -кратный, т. е.

$$\vartheta_1 \cdot f(x) - \vartheta_0 \cdot g(x) = \det^d(x, \zeta).$$

Поскольку алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, а отображение  $\varphi$  биективно вне конечного множества точек, прямая  $(fg)$  в пространстве  $\mathbb{P}_d$  однородных многочленов степени  $d$  от  $(x_0, x_1)$  имеет бесконечно много точек пересечения с кривой Веронезе<sup>1</sup>  $C_d \subset \mathbb{P}_d$ , состоящей из  $d$ -тых степеней линейных двучленов. Поскольку при  $d \geq 2$  никакие три точки кривой  $C_d$  не лежат на одной прямой<sup>2</sup>, мы заключаем, что  $d = 1$  и  $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$ .  $\square$

**5.2. Гомографии.** Линейные проективные изоморфизмы между проективными прямыми называются *гомографиями*. Простейший пример гомографии — перспектива  $o : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$  между двумя прямыми на плоскости, задаваемая центральной проекцией из какой-нибудь точки  $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ , как в прим. 5.1 выше, см. рис. 5◊2.

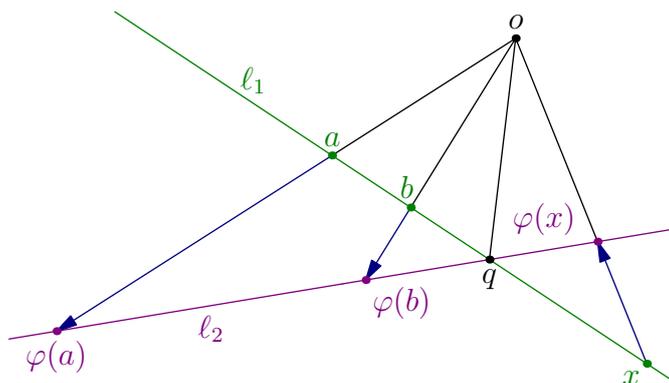


Рис. 5◊2. Перспектива.

Согласно теор. 5.1, каждая гомография однозначно определяется своим действием на три различные точки.

<sup>1</sup>См. н° 4.4.6 на стр. 52.

<sup>2</sup>См. лем. 4.1 на стр. 53.

## ЛЕММА 5.1

Гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  является перспективой если и только если она переводит точку пересечения прямых  $\ell_1 \cap \ell_2$  в себя.

Доказательство. Обозначая через  $o$  точку пересечения прямых  $(a, \varphi(a))$  и  $(b, \varphi(b))$ , соединяющих произвольные точки  $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$  с их образами  $\varphi(a), \varphi(b)$ , как на рис. 5♦2, видим, что перспектива  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  действует на три точки  $a, b$  и  $\ell_1 \cap \ell_2$  так же, как и  $\varphi$ .  $\square$

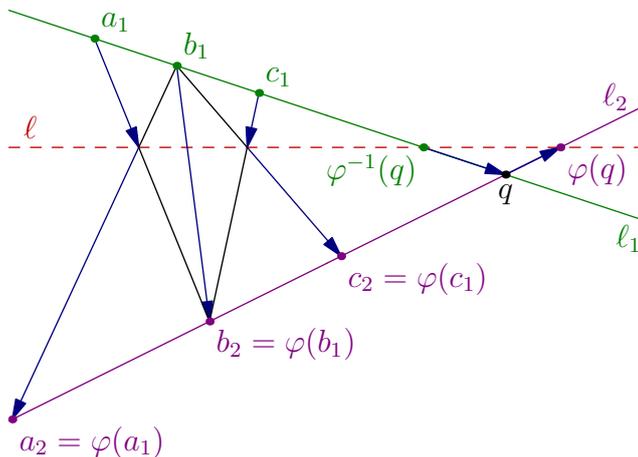


Рис. 5♦3. Перекрёстная ось.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (ПЕРЕКРЁСТНАЯ ОСЬ ГОМОГРАФИИ)

Каждая гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  раскладывается в композицию  $\varphi = b_1 \circ b_2$  двух перспектив  $b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow \ell_2$  с центрами в точках  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$ . При этом точку  $b_1$  можно выбрать на прямой  $\ell_1$  произвольно, точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  не зависит от выбора точки  $b_1$ , проходит через точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  и представляет собою ГМТ пересечения «перекрёстных прямых»  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Более того, любое разложение гомографии  $\varphi$  в композицию  $b_1 \circ b_2$  перспектив с центрами в точках  $b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2$  имеет именно такой вид.

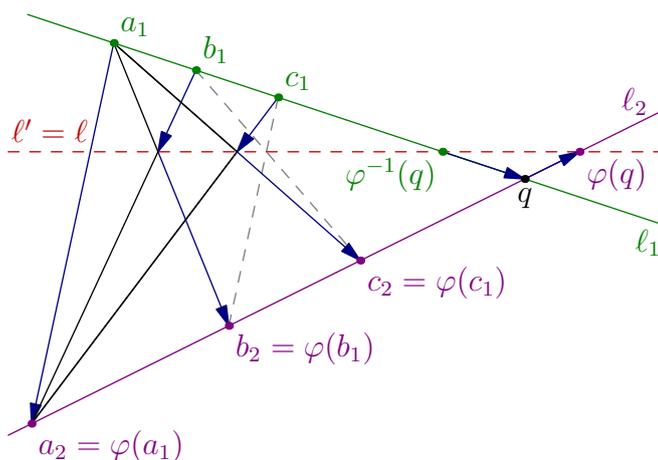


Рис. 5♦4. Равенство  $\ell' = \ell$ .

Доказательство **предл. 5.1**. Рассмотрим какие-нибудь три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ , отличные от точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ , и обозначим через  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$  их образы, а через  $\ell$  — прямую, проходящую через точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ . Так как композиция перспектив  $b_1 \circ b_2$  переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в  $a_2, b_2, c_2$ , она совпадает с  $\varphi$ , см. **рис. 5◊3** на стр. 58. Мы заключаем, что прямая  $\ell$  проходит через точки<sup>1</sup>  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$  и представляет собою ГМТ пересечения прямых  $(b_1 \varphi(x)) \cap (x \varphi(b_1))$ , где  $x \in \ell_1 \setminus b_1$ . Повторяя это же рассуждение для тройки  $c_1, a_1, b_1$  вместо тройки  $a_1, b_1, c_1$ , как на **рис. 5◊4** на стр. 58, получим разложение  $\varphi = a_1 \circ a_2$  в композицию перспектив  $a_2 : \ell' \rightarrow \ell$  и  $a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2$ , в котором прямая  $\ell'$  тоже проходит через точки  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$ , но является ГМТ пересечения прямых  $(a_1 \varphi(y)) \cap (y \varphi(a_1))$ , где  $y \in \ell_1 \setminus a_1$ . Поскольку обе прямые  $\ell$  и  $\ell'$  проходят через (возможно совпадающие) точки  $\varphi(q), \varphi^{-1}(q)$ , а также отличную от них точку  $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$ , они совпадают друг с другом. Поскольку точки  $a_1$  и  $b_1$  выбирались произвольно, мы заключаем, что все разложения

$$\varphi = (x : \ell \rightarrow \ell_2) \circ (\varphi(x) : \ell_1 \rightarrow \ell)$$

имеют одну и ту же прямую  $\ell$  — ГМТ пересечения прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $\ell_1$ . Последнее утверждение предложения очевидно, поскольку в любом разложении  $\varphi = b_1 \circ b_2$  точка  $b_2 = \varphi(b_1)$ .  $\square$

**Упражнение 5.2.** Для заданной пары прямых  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  и гомографии  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ , переводящей заданные три точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  в заданные три точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ , постройте при помощи одной линейки образ  $\varphi(x)$  произвольно заданной точки  $x \in \ell_1$ .

**5.2.1. Гомографии между пучками прямых.** Если рассмотренные выше прямые  $\ell_1, \ell_2$  лежат на двойственной плоскости  $\mathbb{P}_2^\times$ , то они представляют собою два пучка прямых  $\ell_i = p_i^\times$  с центрами в двух различных точках  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$ , а гомография  $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$  является гомографией между этими пучками. Проективно двойственным к существованию перекрёстной оси для гомографии между двумя прямыми является следующее утверждение.

**Следствие 5.2**

Для любой гомографии  $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$  между пучками прямых с центрами в двух различных точках  $p_1 \neq p_2$  все прямые, соединяющие пары точек вида  $\ell_1 \cap \varphi(\ell_2)$  и  $\ell_2 \cap \varphi(\ell_1)$ , где прямые  $\ell_1 \neq \ell_2$  независимо пробегает пучок  $p_1^\times$ , пересекаются в одной точке<sup>2</sup>.  $\square$

**Предложение 5.2**

Пусть гомография  $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$  пучка прямых с центром в точке  $p_1$  в пучок прямых с центром в точке  $p_2 \neq p_1$  переводит три различные прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$ , отличные от прямой  $(p_1 p_2)$ , в прямые  $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_2$ , и пусть  $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \varphi(\ell)$  это единственная коника, проходящая через пять точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ . Эта коника распадается тогда и только тогда, когда гомография  $\varphi$  является перспективой<sup>3</sup>. Для неперспективной гомографии эта коника гладкая.

**Доказательство.** Из условия вытекает, что никакие четыре из точек  $p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$  не коллинеарны. По **предл. 4.2** на стр. 50 через них проходит единственная коника  $C$ .

**Упражнение 5.3.** Убедитесь, что отображение  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$ , переводящее прямую  $(p_1 p)$  в прямую  $(p_2 p)$  для всех  $p \in C$ , является гомографией.

<sup>1</sup>Которые могут совпадать, если гомография  $\varphi$  перспектива.

<sup>2</sup>Эта точка называется *перекрёстным центром* гомографии  $\varphi$ .

<sup>3</sup>Т. е. переводит прямую  $(p_1 p_2) \in p_1^\times$  в прямую  $(p_1 p_2) \in p_2^\times$ .

Гомография  $C$  из упр. 5.3 действует на три прямые  $\ell'_i$  точно также, как  $\varphi$ , см. рис. 5◊6. Если коника  $C$  гладкая, то она переводит касательную прямую  $T_{p_1}C_\varphi$  в прямую  $(p_1p_2)$ , а прямую  $(p_1p_2)$  — в касательную  $T_{p_2}C$ . Если коника  $C$  распадающаяся, то  $C = (p_1p_2) \cup (q_1q_2)$ , точки  $q_1, q_2, q_3$  коллинеарны, и гомография  $\varphi$  переводит прямую  $(p_1p_2)$  в себя, т. е. является перспективой, см. рис. 5◊5.  $\square$

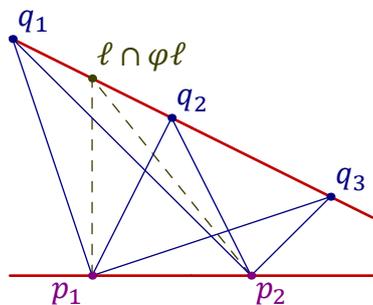


Рис. 5◊5. Перспектива  $\varphi : p_1^x \rightarrow p_2^x$ .

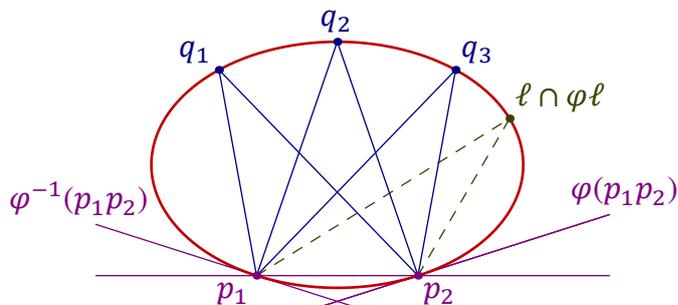


Рис. 5◊6. Неперспективная гомография  $\varphi : p_1^x \rightarrow p_2^x$ .

Пример 5.4 (трассировка коники линейкой)

Из сл. 5.2 вытекает следующий способ построения одной линейкой образа прямой  $\ell \ni p_1$  при гомографии  $\varphi : p_1^x \rightarrow p_2^x$ , если известны образы  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_2$  каких-либо трёх различных прямых  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$ : строим перекрёстный центр  $o$  — точку пересечения прямой, проходящей через точки  $\ell'_1 \cap \ell'_2, \ell'_2 \cap \ell'_1$ , и прямой, проходящей через точки  $\ell'_2 \cap \ell'_3, \ell'_3 \cap \ell'_2$ , после чего прямая  $\varphi(\ell) \ni p_2$  будет пересекать прямую  $\ell'_1$  в той же точке, что и прямая, проходящая через  $o$  и точку  $\ell \cap \ell'_1$ . Так как точки пересечения  $\ell \cap \varphi(\ell)$  заматают конику  $C$ , проходящую через  $p_1, p_2$  и три точки пересечений  $q_i = \ell'_i \cap \ell'_i$ , мы получаем возможность одной линейкой строить точки коники, проходящей через пять заданных точек. Это построение можно сделать куда более эффективным при помощи следующего наблюдения, см. рис. 5◊7.

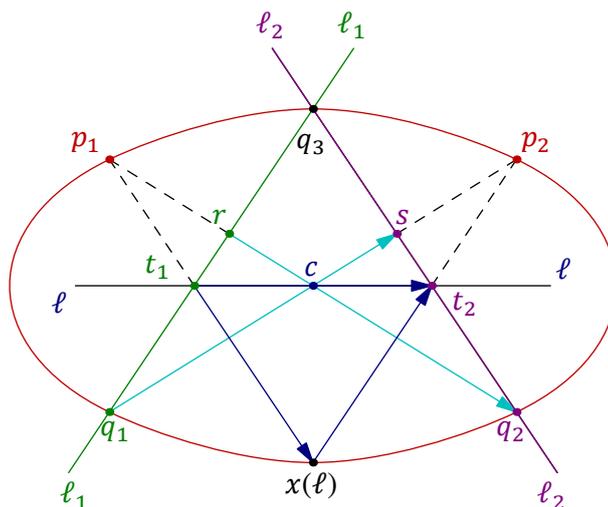


Рис. 5◊7. Трассировка коники линейкой.

Отождествим пучок  $p_1^\times$  с прямой  $\ell_1 = (q_1q_3)$ , а пучок  $p_2^\times$  — с прямой  $\ell_2 = (q_2q_3)$ , сопоставляя каждой прямой из пучка  $p_i^\times$  её пересечение с соответствующей прямой  $\ell_i$ . Задаваемая коникой  $C$  гомография  $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  превращается при этом в гомографию  $\varphi : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , которая является композицией проекции  $p_1 : \ell_1 \simeq C$  прямой  $\ell_1$  на конику  $C$  из точки  $p_1$  и проекции  $p_2 : C \simeq \ell_2$  коники  $C$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $p_2$ . Но такая композиция совпадает с перспективой из точки  $c = (p_1q_2) \cap (p_2q_1)$ , поскольку последняя действует на точки  $q_3, q_1$  и  $r = \varphi^{-1}(q_2)$  прямой  $\ell_1$  так же, как композиция проекций, см. рис. 5◊7. Таким образом, каждая проходящая через точку  $c$  прямая  $\ell$  пересекает прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $t_1$  и  $t_2 = \varphi(t_1)$  соответственно, а значит, точка  $x(\ell) = (p_1t_1) \cap (p_2t_2)$  лежит на конике  $C$ , см. рис. 5◊7. Когда  $\ell$  пробегает пучок прямых с центром в  $c$ , точка  $x(\ell)$  рисует конику  $C$ .

ТЕОРЕМА 5.3 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Шесть точек  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , никакие три из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , см. рис. 5◊8.

Доказательство. Отождествляя рис. 5◊8 с рис. 5◊7, для заданных точек пяти точек  $p_1, \dots, p_5$  положим  $\ell_1 = (p_3p_4)$  и  $\ell_2 = (p_3p_2)$ . Если  $z = (xy) \cap (p_3p_2)$ , то  $x$  переходит в  $z$  при перспективе

$$y : (p_3p_4) \rightarrow (p_3p_2), \quad (5-4)$$

которая, как мы видели в прим. 5.4, раскладывается в композицию проекций

$$(p_5 : C \simeq (p_3p_2)) \circ (p_1 : (p_3p_4) \simeq C), \quad (5-5)$$

где  $C$  — гладкая коника, проходящая через  $p_1, p_2, \dots, p_5$ . Поэтому  $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$ . Наоборот, если  $p_6 \in C$  и  $z = (p_3p_2) \cap (p_5p_6)$ , то  $z$  является образом точки  $x \in (p_3p_4)$  при композиции проекций (5-5), а значит, и при перспективе (5-4), откуда  $z \in (xy)$ .  $\square$

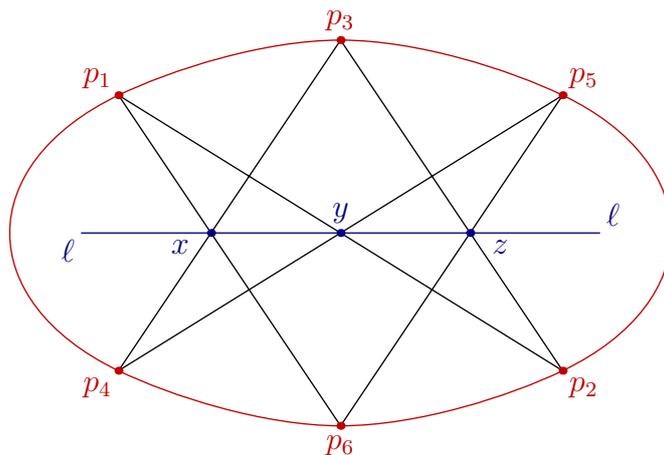


Рис. 5◊8. Гексограмма Паскаля.

**5.3. Двойное отношение.** Рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  со стандартными однородными координатами  $(x_0 : x_1)$  и стандартную аффинную карту  $U_1$  на ней с координатой  $x = x_0 / x_1$ . Разность аффинных координат  $a = a_0 / a_1$  и  $b = b_0 / b_1$  любых двух точек, лежащих в карте  $U_1$ , с точностью до ненулевого множителя совпадает с определителем однородных координат  $(a_0 : a_1)$  и  $(b_0 : b_1)$  этих же точек, поскольку

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}.$$

Для упорядоченной четвёрки различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$  число

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (5-6)$$

называется *двойным отношением*<sup>1</sup> этих четырёх точек. Как мы видели в [прим. 5.3](#) на стр. 56, оно равно аффинной координате образа точки  $p_4$  при единственной гомографии, переводящей точки  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$  с сохранением порядка. Тем самым, двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме  $\infty, 0$  и  $1$ .

**Предложение 5.3**

Две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую гомографией, когда их двойные отношения одинаковы.

**Доказательство.** Пусть гомографии  $\varphi_p$  и  $\varphi_q$  переводят упорядоченные тройки точек  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$  в тройку  $\infty, 0, 1$ . Если  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ , то  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и гомография  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если существует гомография  $\psi$ , переводящая  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , то гомография  $\varphi_p \circ \psi^{-1}$  переводит четвёрку  $q_1, q_2, q_3, q_4$  в четвёрку  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ .  $\square$

**Следствие 5.3**

Правая часть равенства (5-6) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения  $p_1, p_2, p_3, p_4$  конечны.

**Доказательство.** Поскольку замена однородных координат является гомографией, первое утверждение следует из [предл. 5.3](#). Второе утверждение является следствием первого.  $\square$

**Упражнение 5.4.** Докажите [сл. 5.3](#) прямым вычислением и убедитесь, что для точек  $c, d \in \mathbb{P}_1$ , лежащих в аффинной карте с нулём в точке  $b$  и бесконечностью в точке  $a$ , так что  $c = b + \gamma a$ ,  $d = b + \delta a$  для некоторых  $\gamma, \delta \in \mathbb{k}$ , двойное отношение  $[a, b, c, d] = \delta / \gamma$ .

**Предложение 5.4**

Биекция  $\varphi : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$  является гомографией если и только если она сохраняет двойные отношения.

<sup>1</sup>По-английски *cross-ratio*.

Доказательство. Пусть  $\varphi$  переводит точки  $a, b$  и  $c$  в  $\infty, 0$  и  $1$ . Если  $\varphi$  сохраняет двойные отношения, то каждая точка  $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$  переходит в точку

$$\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}.$$

Таким образом, преобразование  $\varphi$  дробно линейно.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Убедитесь, что подгруппа Клейна<sup>1</sup>  $V_4 \subset S_4$  сохраняет двойное отношение:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

**5.3.1. Специальные четвёрки точек.** Из упр. 5.5 и прим. 5.2 на стр. 55 вытекает, что при перестановках точек  $p_i$  двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  может принимать самое большое 6 различных значений, и все их можно получить при помощи шести перестановок первых трёх точек. Пусть

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t. \quad (5-7)$$

Это аффинная координата образа точки  $p_4$  при гомографии  $\varphi : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$ . Значение  $[p_2, p_1, p_3, p_4]$  равно координате образа точки  $p_4$  под действием композиции

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1),$$

вторая стрелка которой действует по правилу  $t \mapsto 1/t$ . Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (5-8)$$

Аналогично,  $[p_3, p_2, p_1, p_4]$  и  $[p_1, p_3, p_2, p_4]$  суть образы  $p_4$  под действием композиций

$$(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty) \quad \text{и} \quad (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0),$$

вторые стрелки в которых суть  $t \mapsto t/(t-1)$  и  $t \mapsto 1-t$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (5-9)$$

Значения  $[p_2, p_3, p_1, p_4]$  и  $[p_3, p_1, p_2, p_4]$  получаются из  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  применением гомографий  $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$  и  $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$ , задаваемых правилами  $t \mapsto (t-1)/t$  и  $t \mapsto 1/(1-t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (5-10)$$

Формулы (5-7)-(5-10) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Если  $t \in \mathbb{k}$  таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (5-11)$$

<sup>1</sup>См. прим. 5.2 на стр. 55.

различны, то никакую перестановку точек  $p_i$  кроме четырёх перестановок из группы Клейна невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях  $t = -1, 2, 1/2$ , которые, соответственно, удовлетворяют равенствам  $t = 1/t$ ,  $t = t/(t-1)$ ,  $t = 1-t$ , двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$  не меняется, соответственно, при транспозициях<sup>1</sup> (1, 2), (1, 3), (1, 4) и пробегает при всевозможных перестановках точек всего три различных значения. Если  $t$  является корнем уравнения<sup>2</sup>  $t^2 - t + 1 = 0$ , то  $t = (t-1)/t$  и  $t = 1/(1-t)$ , а двойное отношение не меняется при всех циклических перестановках точек  $p_1, p_2, p_3$ , принимая всего два различных значения при произвольных перестановках точек.

Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из пяти только что перечисленных специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

**5.3.2. Гармонические пары точек.** Четвёрка точек  $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{P}_1$  называется *гармонической*, если двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка  $a$  является бесконечностью, точка  $b$  является центром тяжести точек  $c$  и  $d$ . При его выполнении говорят также, что пары точек  $\{a, b\}$  и  $\{c, d\}$  *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар<sup>3</sup>. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, гармоничность является симметричным бинарным отношением на множестве неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1$ .

ПРИМЕР 5.5 (Гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение ПРИМ. 5.2)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах  $x, y, z$  треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$ , пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника  $xuz$ , см. рис. 5◊9. Для этого параметризуем пучок всех проходящих через точку  $x$  прямых точками прямой  $(ad)$  и одновременно — точками прямой  $(bc)$ . Мы должны проверить, что прямая  $(xy)$  пересекает прямые  $(ad)$  и  $(bc)$  по таким точкам  $x', x''$ , что  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$ . Поскольку центральные проекции из  $x$  и из  $y$  являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми  $(ad)$  и  $(bc)$ , возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек:  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$ . Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно  $-1$ .

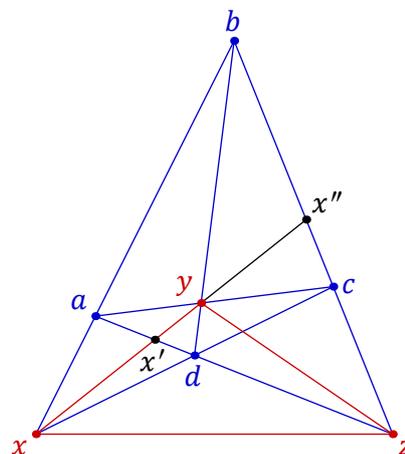


Рис. 5◊9.

<sup>1</sup>А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

<sup>2</sup>Т. е. является отличным от  $-1$  кубическим корнем из единицы в поле  $\mathbb{K}$ .

<sup>3</sup>См. формулу (5-8) на стр. 63.

**5.3.3. Двойное отношение на невырожденной конике.** Имеется несколько способов определить двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  четырёх точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$ . Можно выбрать пятую точку  $p_5 \in C$ , отличную от четырёх данных, и положить  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C$  равным двойному отношению четырёх прямых  $(p_5 p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех прямых, проходящих через точку  $p_5$ , или двойному отношению проекций точек  $p_1, p_2, p_3, p_4$  из точки  $p_5$  на какую-нибудь прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2$ . А можно, как в [прим. 4.11](#) на стр. 53, изоморфно отобразить содержащую конику плоскость  $\mathbb{P}_2$  на плоскость  $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  так, чтобы коника  $C$  биективно отобразилась на состоящую из двойных точек конику Веронезе  $C_2 = \{a^2 \in S^2 \mathbb{k}^2 \mid a \in U\}$ . Если точки  $p_i \in C$  переходят при этом в квадраты  $a_i^2 \in C_2$  точек  $a_i \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ , мы полагаем  $[p_1, p_2, p_3, p_4]_C = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ . Покажем, что эти способы корректны<sup>1</sup> и дают одинаковый результат, предполагая для простоты, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль<sup>2</sup>, чтобы можно было применять [теор. 5.2](#) на стр. 57.

Прямые, проходящие через фиксированную точку  $p_5 \in \mathbb{P}_2$ , образуют прямую  $p_5^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и для любой прямой  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  отображение  $p_5^\times \rightarrow \ell$ , переводящее прямую из пучка  $p_5^\times$  в точку её пересечения с прямой  $\ell$ , является гомографией, т. е. линейно и биективно.

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Убедитесь в этом.

Поскольку гомографии сохраняют двойное отношение, двойное отношение прямых  $(p_5 p_i)$  в пучке  $p_5^\times$  равно двойному отношению проекций точек  $p_i$  из точки  $p_5$  на любую прямую  $\ell$ . В частности, последнее одинаково для всех прямых  $\ell$ , не проходящих через точку  $p_5$ .

Для любых двух точек  $a, b \in C$  и не проходящей через них прямой  $\ell$  композиция проекции прямой  $\ell$  на конику  $C$  из точки  $a$  и проекции коники  $C$  обратно на прямую  $\ell$  из точки  $b$  биективна и в однородных координатах на прямой  $\ell$  задаётся рациональными функциями согласно форм. (4-10) на стр. 47. По [теор. 5.2](#) эта композиция является гомографией и сохраняет двойные отношения. Таким образом, двойное отношение проекций точек  $p_i$  на прямую из точки  $p_5 \in C$  не зависит от выбора точки  $p_5$ .

Поскольку композиция вложения Веронезе  $v_2 : \mathbb{P}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ ,  $a \mapsto a^2$ , с проекцией коники Веронезе  $C_2 = \text{im } v_2$  из любой точки  $a^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  биективна и задаётся в координатах рациональным функциями, она тоже является гомографией и сохраняет двойные отношения. Поэтому для коники Веронезе двойное отношение проекций любых четырёх двойных точек  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2 \in C_2$  на любую прямую  $\ell \subset \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  из любой точки на  $C_2$  совпадает с двойным отношением  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$  самих точек  $a_i$  на прямой  $\mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

Наконец, пусть заданы два линейных проективных изоморфизма  $\varphi, \psi : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$ , биективно отображающих данную невырожденную конику  $C \subset \mathbb{P}_2$  на конику Веронезе и переводящих точки  $p_i \in C$  в точки  $a_i^2 = \varphi(p_i)$  и  $b_i^2 = \psi(p_i)$ . Композиция  $\eta = \varphi \circ \psi^{-1}$  является линейным проективным автоморфизмом пространства  $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{k}^2)$  и переводит конику Веронезе в себя. Ограничение автоморфизма  $\eta$  на любую прямую  $\ell$  является гомографией между прямыми  $\ell$  и  $\eta(\ell)$  и сохраняет двойные отношения. Если точки  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \ell$  являются образами точек  $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2 \in C_2$  при проекции из точки  $c^2 \in C_2$ , то их образы  $\eta(q_i)$  будут образами точек  $a_i^2 = \eta(a_i^2)$  при проекции из точки  $\eta(c^2)$  на прямую  $\eta(\ell)$ . Поскольку двойное отношение

<sup>1</sup>Т. е. не зависят ни от выбора точки  $p_5 \in C \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ , ни от выбора прямой  $\ell$ , на которую проектируются точки  $p_i$ , ни от выбора линейного проективного изоморфизма данной коники  $C$  с коникой Веронезе  $C_2$ .

<sup>2</sup>В действительности, это верно для непустой неособой коники над любым полем характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

точек  $q_i$  такое же, как и у точек  $\eta(q_i)$ , вычисленные любым из трёх описанных выше способов двойные отношения точек  $a_i^2$  и точек  $b_i^2$  на конике Веронезе тоже будут одинаковы.

**Предложение 5.5**

Гладкая коника  $C$ , проходящая через пять точек  $p_1, p_2, \dots, p_5$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ  $p$ , таких что в пучке прямых с центром в  $p$  двойное отношение четырёх прямых  $(p, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , равно двойному отношению четырёх прямых  $(p_5, p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в пучке прямых с центром в точке  $p_5$ .

**Доказательство.** Мы уже видели выше, что все точки  $p \in C$  обладают требуем свойством. Для любой другой точки  $p$ , обладающей этим свойством, обозначим через  $Q$  конику, проходящую через точки  $p, p_1, p_2, p_3$  и  $p_5$ . Отображение  $\gamma_Q : p^\times \rightarrow p_5^\times$  из пучка прямых с центром в точке  $p$  в пучок прямых с центром в  $p_5$ , переводящее прямую  $(pq)$  в прямую  $(p_5q)$  для всех  $q \in Q$ , биективно и рационально, а значит является гомографией. Гомография  $\gamma_Q$  переводит три прямые  $(pp_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , в три прямые  $(p_5p_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Поскольку  $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$ , прямая  $(pp_4)$  переходит в прямую  $(p_5p_4)$ , откуда  $p_4 \in Q$ . Но единственная коника, проходящая через пять точек  $p_1, p_2, \dots, p_5$ , это коника  $C$ . Поэтому  $Q = C$  и  $p \in C$ .  $\square$

**5.4. Гомографии на непустой гладкой конике.** Биективное преобразование  $\varphi : C \simeq C$  невырожденной коники  $C$  называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Согласно [предл. 5.4](#) на стр. 62 это требование равносильно тому, что для некоторой сохраняющей двойные отношения биекции  $\psi : C \simeq \mathbb{P}_1$  преобразование  $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$  является гомографией на  $\mathbb{P}_1$ . Если это условие выполняется для какой-нибудь сохраняющей двойные отношения биекции между  $C$  и  $\mathbb{P}_1$ , то по тому же [предл. 5.4](#) оно выполняется для любых таких биекций.

Как и гомография на прямой, гомография на конике однозначно определяется своим действием на какие-нибудь три различные точки.

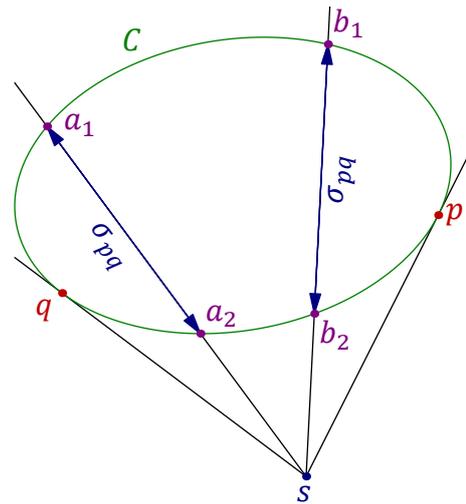
**Пример 5.6 (инволюции)**

Гомография  $\sigma : C \rightarrow C$  называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е.  $\sigma^2 = \text{Id}_C$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_C$  называется *тривиальной*. Пусть точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  на конике  $C$  различны и инволюция  $\sigma : C \rightarrow C$  переставляет одноимённые точки  $a_1 \leftrightarrow a_2$  и  $b_1 \leftrightarrow b_2$  как на [рис. 5.10](#). Обозначим точку пересечения прямых  $(a_1a_2)$  и  $(b_1b_2)$  через  $s$ . Пучок прямых с центром в  $s$  задаёт биективное преобразование  $\sigma_s : C \simeq C$ , переставляющее точки пересечения коники  $C$  с каждой проходящей через  $s$  прямой.

**Упражнение 5.7.** Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно,  $\sigma_s$  является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией  $\sigma$ , поскольку действует на четыре точки  $a_1, a_2, b_1, b_2$  также, как и  $\sigma$ . В частности, неподвижными точками инволюции  $\sigma$  являются две точки, образующие видимый из точки  $s$  контур коники  $C$ .

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  каждая нетривиальная инволюция



**Рис. 5.10.** Инволюция на конике.

на проективной прямой или на невырожденной конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек  $c, d \in \mathbb{P}_1$  существует единственная инволюция  $\sigma_{cd} : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ , для которой точки  $c$  и  $d$  являются неподвижными. Эта инволюция тогда и только тогда переставляет друг с другом точки  $a, b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе  $C_2 \subset \mathbb{P}_2$  лежат на одной прямой с точкой  $cd \in \mathbb{P}_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. Убедитесь, что  $\sigma_{cd}(a) = b$  для четырёх различных точек  $a, b, c, d$  если и только если точки  $a, b$  гармоничны точкам  $c, d$ , и что в аффинной карте, где  $d = \infty$ , инволюция  $\sigma_{cd}$  выглядит как центральная симметрия относительно  $c$ .

СЛЕДСТВИЕ 5.4

Над алгебраически замкнутым полем для любых двух различных нетривиальных инволюций  $\sigma, \tau : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  имеется ровно одна такая пара (возможно, совпадающих друг с другом) точек  $\{a, b\}$ , что  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ .

Доказательство. Пусть точки  $u, w$  на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  неподвижны относительно инволюции  $\sigma$ , а точки  $r, s$  — относительно инволюции  $\tau$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда удовлетворяют условиям  $\sigma(a) = b$  и  $\tau(a) = b$ , когда точки  $a^2$  и  $b^2$  коники Веронезе на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U)$  лежат на одной прямой с точками  $uw$  и  $rs$ . Но прямая  $(uw, rs)$  пересекает конику Веронезе ровно по двум, возможно совпадающим, точкам.  $\square$

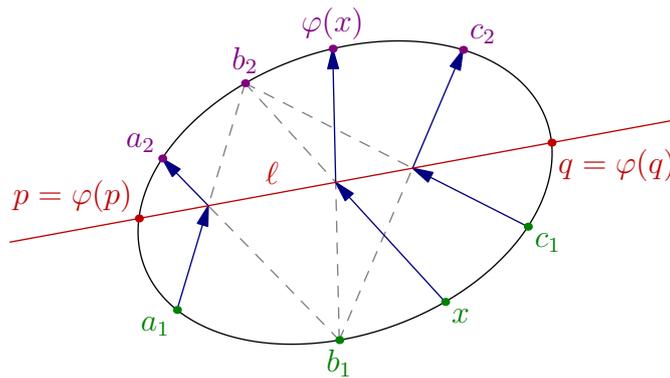


Рис. 5◊11. Перекрёстная ось гомографии на конике.

ПРИМЕР 5.7 (ПЕРЕКРЁСТНАЯ ОСЬ ГОМОГРАФИИ НА КОНИКЕ)

Гомография  $\varphi : C \rightarrow C$ , переводящая три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in C$  в точки  $a_2, b_2, c_2 \in C$  является композицией проекций  $b_2 : C \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow C$ , где прямая  $\ell$  соединяет точки пересечения  $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$  пар перекрёстных прямых на рис. 5◊11. Поскольку неподвижные точки гомографии  $\varphi$  суть точки пересечения  $\ell \cap C$ , прямая  $\ell$  не зависит от выбора точек  $a_1, b_1, c_1 \in C$ , а  $\varphi$  имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, и последнее означает, что прямая  $\ell$  касается коники  $C$  в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая  $\ell$  представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает конику  $C$ . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы Паскаля<sup>1</sup>: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в  $C$  шестиугольника  $a_1 c_2 b_1 a_2 c_1 b_2$ , будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки  $a_1, b_1, c_1$  в точки  $a_2, b_2, c_2$ , лежат на перекрёстной оси  $\ell$  этой гомографии.

<sup>1</sup>См. теор. 5.3 на стр. 61.

Перекрёстная ось гомографии  $\varphi : C \rightarrow C$  легко строится одной линейкой, если известно действие  $\varphi$  на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ  $\varphi(z)$  любой точки  $z \in C$ , а также указать неподвижные точки гомографии  $\varphi$ . В частности, две касательные к невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}_2$ , опущенные из заданной точки  $s \in \mathbb{P}_2$ , тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции  $\sigma_s : C \rightarrow C$ , задаваемой пучком прямых с центром в  $s$ , см. рис. 5◊12. Более простое построение можно извлечь из упр. 5.9.

УПРАЖНЕНИЕ 5.9 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 5◊13 построение<sup>1</sup> одной линейкой поляр<sup>2</sup>  $\ell(p)$  данной точки  $p$  относительно данной коники  $C$ .

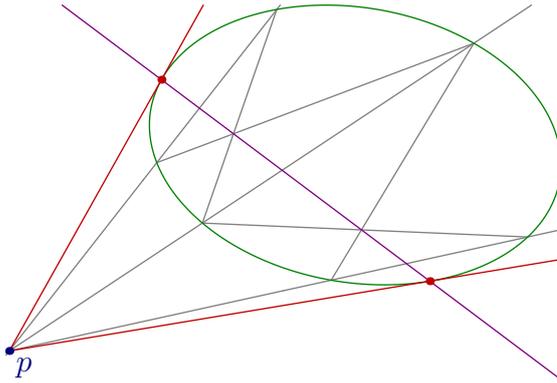


Рис. 5◊12. Построение касательных.

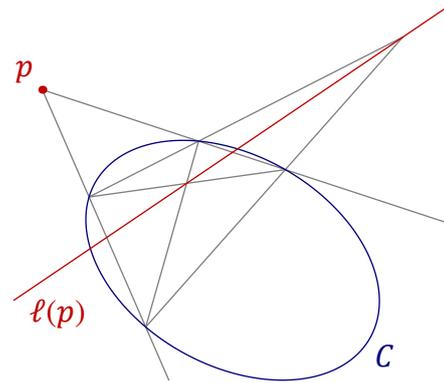


Рис. 5◊13. Построение поляр<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796–1863), см. Я. Штейнер. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910 (или любое другое издание).

<sup>2</sup>См. формулу (4-4) на стр. 45.

## §6. Геометрия гладких проективных квадрик

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**6.1. Полярное преобразование относительно гладкой квадрики.** Поскольку корреляция невырожденной квадратичной формы  $q \in S^2V^*$  является линейным изоморфизмом

$$\hat{q}: V \xrightarrow{\sim} V^*, \quad u \mapsto \hat{q}(u): w \mapsto \tilde{q}(w, u),$$

она задаёт биективное проективное преобразование  $\bar{q}: \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$  из пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  в пространство  $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$  гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$ . Это преобразование сопоставляет каждой точке  $p \in \mathbb{P}_n$  её полярную гиперплоскость<sup>1</sup>  $\bar{q}(p) = \mathbb{P}(p^\perp)$  и называется полярным преобразованием или поляритетом относительно гладкой квадрики  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь, что при умножении квадратичной формы  $q$  на ненулевую константу поляритет не меняется.

Точка  $p$  и гиперплоскость  $\mathbb{P}(p^\perp)$  называются, соответственно, полюсом и полярной друг друга относительно квадрики  $Q$ . Геометрически, полярная точка  $p \notin Q$  представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из этой точки контур<sup>2</sup> квадрики  $Q$ , а полярной точки  $p \in Q$  является касательная гиперплоскостью  $T_p Q$  к квадрике  $Q$  в точке  $p$ . Таким образом, квадрика однозначно восстанавливается по своему поляритету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

**6.1.1. Поляритеты над незамкнутыми полями.** Мы уже видели, что над алгебраически незамкнутыми полями могут быть анизотропные квадратичные формы, задающие пустые квадрики. Все эти квадрики автоматически невырождены, и их поляритеты вполне наблюдаемы геометрически как линейные проективные преобразования точек в гиперплоскости. Пустота квадрики, задающей такое преобразование, означает всего лишь то, что никакая точка не лежит на своей поляре.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно «мнимой окружности»  $x^2 + y^2 = -1$ .

Из теор. 5.1 на стр. 55 вытекает, что два поляритета  $\bar{q}_1, \bar{q}_2: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$  совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы  $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$  пропорциональны.

ТЕОРЕМА 6.1

Две непустые гладкие квадрики над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  совпадают если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. При  $n = 1$  равенство  $V(q_1) = V(q_2) = \{a, b\}$  означает, что обе бинарные квадратичные формы  $q_1(x), q_2(x)$  от  $x = (x_0, x_1)$  пропорциональны  $\det(x, a) \det(x, b)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Покажите, что над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  при  $n \geq 2$  на любой непустой гладкой квадрике  $Q \subset \mathbb{P}_n$  найдутся  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Так как поляритеты  $\bar{q}_1, \bar{q}_2: \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$  одинаково действуют на эти  $(n + 2)$  точки, корреляции  $\hat{q}_1, \hat{q}_2: V \xrightarrow{\sim} V^*$  пропорциональны по упр. 6.3, а значит, формы  $q_1$  и  $q_2$  имеют пропорциональные матрицы Грама.  $\square$

<sup>1</sup>Ср. с форм. (4-4) на стр. 45.

<sup>2</sup>См. формулу (н° 4.3.1) на стр. 44.

**6.1.2. Сопряжение.** Поскольку условие  $\tilde{q}(a, b) = 0$  симметрично по  $a$  и  $b$ , точка  $a$  лежит на поляре точки  $b$  если и только если точка  $b$  лежит на поляре точки  $a$ . Такие точки  $a$  и  $b$  называются *сопряжёнными* относительно квадрики  $Q$ . Сопряжённость является симметричным бинарным отношением. Полярные сопряжённым точкам  $a$  и  $b$  гиперплоскости  $\mathbb{P}(a^\perp)$  и  $\mathbb{P}(b^\perp)$  тоже называются *сопряжёнными* относительно  $Q$ .

Упражнение 6.4. Одной линейкой постройте полярную точку и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно данной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

Предложение 6.1

Пусть прямая  $(ab)$  пересекает гладкую квадрику  $Q$  в двух различных точках  $c$  и  $d$ , отличных от  $a$  и  $b$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики  $Q$ , когда они гармоничны<sup>1</sup> точкам  $c, d$ .

Доказательство. Обозначим проходящую через точки  $a, b, c, d$  прямую через  $\ell$ . Сопряжение относительно квадрики  $Q$  задаёт на прямой  $\ell$  инволюцию  $\sigma_Q : \ell \rightarrow \ell, x \mapsto \ell \cap \mathbb{P}(x^\perp)$ , которая переводит точку  $x \in \ell$  в точку пересечения её поляры с прямой  $\ell$ . Так точки  $c$  и  $d$  неподвижны относительно этой инволюции,  $\sigma_Q$  меняет местами точки  $a$  и  $b$  если и только если  $[a, b, c, d] = -1$ , как мы видели в [упр. 5.8](#) на стр. 67.  $\square$

Упражнение 6.5. Дайте чисто алгебраическое доказательство [предл. 6.1](#).

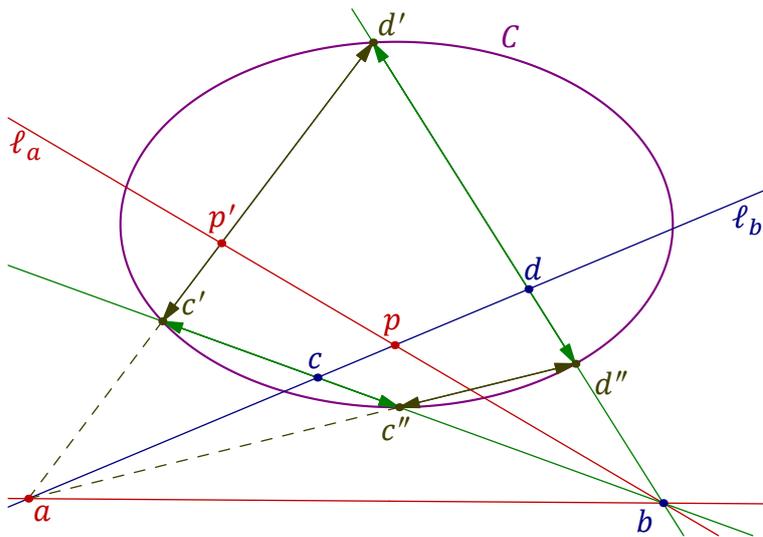


Рис. 6.1. Инволюции с центрами в сопряжённых точках перестановочны.

Пример 6.1 (пары коммутирующих инволюций)

Покажем, что инволюции<sup>2</sup>  $\sigma_a, \sigma_b : C \rightarrow C$  гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$ , задаваемые двумя сопряжёнными относительно этой коники точками  $a, b \in \mathbb{P}_2 \setminus C$ , коммутируют друг с другом. Обозначим

<sup>1</sup>См. п. 5.3.2 на стр. 64.

<sup>2</sup>См. прим. 5.6 на стр. 66.

через  $\ell_a$  и  $\ell_b$  поляры точек  $a$  и  $b$ , см. рис. 6◊1. Точки  $c'$  и  $d'$ , высекаемые из коники  $C$  произвольной прямой  $\ell' \ni a$ , гармоничны точкам  $a$  и  $p' = \ell' \cap \ell_a$ . Поскольку перспектива  $b : \ell_b \simeq \ell'$  сохраняет двойные отношения, равенство  $\sigma_a(c') = d'$  на прямой  $\ell'$  равносильно тому, что точки  $c = \ell_b \cap (bc')$  и  $d = \ell_b \cap (bd')$  переводятся друг в друга инволюцией  $\sigma_{ap} : \ell_b \simeq \ell_b$  с неподвижными точками  $a$  и  $p = \ell_b \cap \ell_a$ . Пусть  $c'' = C \cap (bc')$  и  $\ell'' = (ac'')$ . Тогда прямая  $\ell''$  пересекает конику  $C$  и прямую  $(bd')$  в одной и той же точке  $d''$ , однозначно характеризующей тем, что  $[a, p'', c'', d''] = -1$ , где  $p'' = \ell'' \cap \ell_a$ . Тем самым, одновременное выполнение равенств  $\sigma_a(c') = d'$  и  $\sigma_a(c'') = d''$  равносильно одновременному выполнению равенств  $\sigma_b(c') = c''$  и  $\sigma_b(d') = d''$ .

Упражнение 6.6. Убедитесь, что и наоборот, центры  $a, b \in \mathbb{P}_2$  любых двух перестановочных друг с другом инволюций  $\sigma_a, \sigma_b : C \simeq C$  непустой гладкой коники  $C \subset \mathbb{P}_2$  сопряжены друг другу относительно  $C$ .

**6.1.3. Двойственная квадрика.** Поляритет  $\bar{g} : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n^\times$  неособой квадрики  $G = V(g) \subset \mathbb{P}_n$  с матрицей Грама  $\Gamma$  переводит всякую квадрику  $F = V(f) \subset \mathbb{P}_n$  с матрицей Грама  $\Phi$  в квадрику  $F_G^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$  того же ранга, что и квадрика  $F$ , имеющую в двойственном базисе пространства  $\mathbb{P}_n^\times$  матрицу Грама  $\Gamma^{-1}\Phi\Gamma^{-1}$ . В самом деле, квадрика  $F_G^\times$  состоит из всех таких ковекторов  $\xi = Gx$ , что  $x^t\Phi x = 0$ . Подставляя в последнее равенство  $x = \Gamma^{-1}\xi$  и учитывая, что  $\Gamma^t = \Gamma$ , получаем

$$F_G^\times = \{ \xi \in \mathbb{P}_n^\times \mid \xi^t \Gamma^{-1} \Phi \Gamma^{-1} \xi = 0 \}.$$

Применяя это наблюдение к самой квадрике  $G$ , т. е. полагая  $\Phi = \Gamma$ , получаем

Предложение 6.2 (двойственная квадрика)

Касательные пространства к гладкой квадрике  $G \subset \mathbb{P}_n$  образуют в  $\mathbb{P}_n^\times$  гладкую квадрику  $G^\times$ . Матрицы Грама квадрик  $G$  и  $G^\times$  в двойственных базисах пространств  $\mathbb{P}_n$  и  $\mathbb{P}_n^\times$  обратны друг другу. □

Следствие 6.1

Две гиперплоскости  $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}_n$  тогда и только тогда сопряжены<sup>1</sup> относительно гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$ , когда они гармоничны в порождённом ими пучке гиперплоскостей<sup>2</sup> двум касательным гиперплоскостям к квадрике  $Q$ , проходящим через  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к предл. 6.1 на стр. 70. □

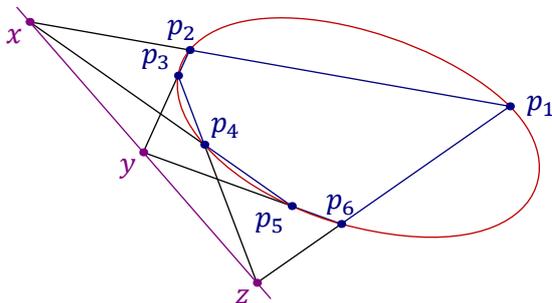


Рис. 6◊2. Вписанный шестиугольник.

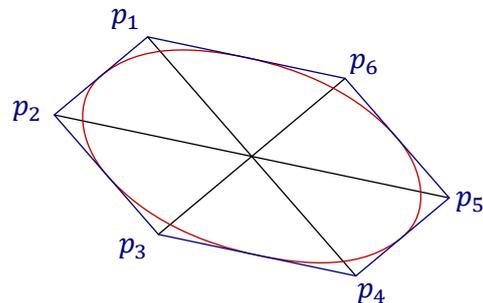


Рис. 6◊3. Описанный шестиугольник.

<sup>1</sup>Напомню, что это означает, что каждая из них содержит полюс другой, см. н° 6.1.2 на стр. 70.

<sup>2</sup>Т. е. в пучке гиперплоскостей, проходящих через  $(n - 2)$ -мерную плоскость  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

Следствие 6.2 (теорема Брианшона)

Шестиугольник  $p_1, p_2, \dots, p_6$  тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали  $(p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6)$  пересекаются в одной точке, см. рис. 6◊3.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно к теореме Паскаля<sup>1</sup>.  $\square$

Пример 6.2 (коника, касающаяся пяти прямых)

Из предл. 4.2 на стр. 50 вытекает, что каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники. Эта коника двойственна к гладкой конике, проходящей через пять точек двойственной плоскости, двойственных к заданным пяти прямым.

Пример 6.3 (задание гомографии касательными к конике)

Пусть гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  между двумя различными прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  переводит три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ , отличные от точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ , соответственно, в точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ . При этом возникают две возможности, показанные на рис. 6◊4 и рис. 6◊5: либо соединяющие соответственные точки три прямые  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  пересекаются в одной точке  $p$ , либо нет. Первое означает, что гомография  $\varphi$  является перспективой<sup>2</sup> с центром в  $p$ , и это равносильно равенству  $\varphi(q) = q$ . Во втором случае никакие три из пяти прямых  $\ell_1, \ell_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  не пересекаются в одной точке и, как мы видели в прим. 6.2, существует единственная гладкая коника  $C$ , касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование  $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ , переводящее точку  $x \in \ell_1$  в точку пересечения прямой  $\ell_2$  с отличной от  $\ell_1$  касательной, опущенной из  $x$  на  $C$ , является гомографией, ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из  $x$  на  $C$ , суть координаты точек пересечения двойственной коники  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  с прямой  $x^\times = \text{Ann}(x)$ . Одна из этих точек, задающая прямую  $\ell_1$ , известна. Поэтому вторая рационально через неё выражается. Поскольку  $C$  и  $\varphi$  одинаково действуют на  $a_1, b_1, c_1$ , гомография  $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  совпадает  $\varphi$ . Образом и прообразом точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$  в этом случае являются точки пересечения  $\ell_2 \cap C$  и  $\ell_1 \cap C$  соответственно.

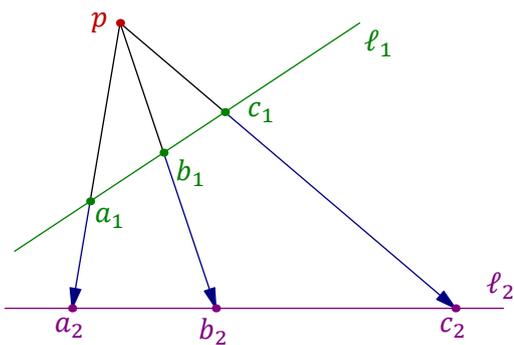


Рис. 6◊4. Перспектива  $p : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

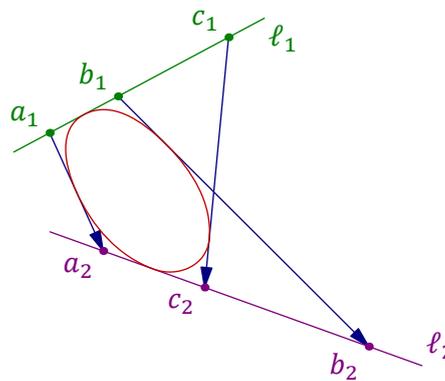


Рис. 6◊5. Гомография  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

Итак, каждая гомография  $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. Это описание двойственно к данному в предл. 5.2 на

<sup>1</sup>См. теор. 5.3 на стр. 61 и прим. 5.7 на стр. 67.

<sup>2</sup>См. прим. 5.1 на стр. 55.

стр. 59 описанию гомографии между двумя пучками прямых. Обратите внимание, что центр перспективы  $p$  и коника  $C$  определяются по гомографии  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  однозначно, и перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , отвечающий особой конике  $C$ , распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы. Однако в отличие от предл. 5.2 такие две прямые можно выбирать многими способами: подойдёт любая пара прямых, соединяющих соответственные точки гомографии.

Предложение 6.3 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)

Два треугольника  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$  вписаны в одну и ту же гладкую конику  $C'$  если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники  $C''$ .

Доказательство. Пусть точки  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  лежат на конике  $C'$ , как на рис. 6◊6. Рассмотрим прямые  $\ell_1 = (a_1 b_1), \ell_2 = (a_2 b_2)$  и обозначим через  $c_2 : \ell_1 \simeq C'$  и  $c_1 : C' \simeq \ell_2$  проекцию прямой  $\ell_1$  из точки  $c_2$  на конику  $C'$  и проекцию коники  $C'$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $c_1$ . Их композиция  $c_1 \circ c_2 : \ell_1 \simeq \ell_2$  переводит  $a_1 \mapsto a'_2, b'_1 \mapsto b_2, a'_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b'_2$  и является неперспективной гомографией, а значит, задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике  $C''$ , вписанной в оба треугольника  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$ . Обратная импликация проективно двойственна доказанной.  $\square$

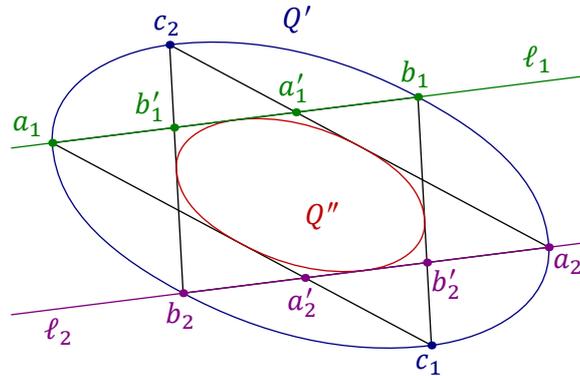


Рис. 6◊6. Вписанно-описанные треугольники.

Следствие 6.3 (поризм Понселе для треугольников)

Если пара коник  $C'$  и  $C''$  такова, что существует треугольник  $a_1 b_1 c_1$ , одновременно вписанный в  $C'$  и описанный около  $C''$ , то аналогичный треугольник  $a_2 b_2 c_2$ , одновременно вписанный в  $C'$  и описанный около  $C''$ , можно нарисовать стартовав с любой точки  $a_2 \in C' \setminus C''$ .

Доказательство. В самом деле, проведём из  $a_2$  две касательные  $(a_2 b_2)$  и  $(a_2 c_2)$  к конике  $C''$  до их пересечения с  $C'$  в точках  $b_2, c_2 \in C'$ , как на рис. 6◊6. По предл. 6.3, треугольники  $a_1 b_1 c_1$  и  $a_2 b_2 c_2$  описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых  $(ab), (bc), (ca), (a_2 b_2), (a_2 c_2)$ , эта коника и есть  $C''$ .  $\square$

**6.1.4. Гармонически описанная квадрика.** Скажем, что набор из  $(n + 1)$  точек

$$p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$$

является автополярным симплексом гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$ , если полярной каждой из точек  $p_i$  является гиперплоскость, порождённая остальными  $n$  точками  $p_\nu$  с  $\nu \neq i$ . На алгебраическом

языке это означает, что векторы  $p_i$  образуют ортогональный базис квадратичной формы  $q$ , задающей квадрику  $Q$ . Квадрика  $Q'$  называется *гармонически описанной* около гладкой квадрики  $Q$ , если она проходит через вершины какого-нибудь автополярного симплекса квадрики  $Q$ .

#### ТЕОРЕМА 6.2

Пусть основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто. Квадрика  $Q' = V(f)$  с матрицей Грама  $F$  гармонически описана около гладкой квадрики  $Q = V(g)$ , имеющей в том же базисе матрицу Грама  $G$ , если и только если  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ , и в этом случае каждая точка  $p \in Q' \setminus Q$  является вершиной автополярного относительно  $Q$  симплекса, вписанного в квадрику  $Q'$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Матрица  $G^{-1}F$  является матрицей такого единственного линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ , что  $\tilde{f}(u, w) = \tilde{q}(u, \varphi w)$  для всех  $u, w \in V$ , см.  $\text{n}^\circ 1.3.4$  на стр. 11. Поэтому  $\text{tr}(G^{-1}F)$  зависит только от квадратичных форм  $f$  и  $g$ , а не от базиса, в котором пишутся матрицы Грама. В базисе из векторов  $p_i$ , образующих вершины автополярного относительно  $Q$  симплекса, вписанного в  $Q'$ , матрица Грама  $G$  формы  $g$  диагональна с ненулевыми диагональными элементами, а все диагональные элементы матрицы Грама  $F$  формы  $f$  нулевые. Поэтому все диагональные элементы матрицы  $G^{-1}F$  тоже нулевые, и  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$ .

Покажем индукцией по  $n$ , что при выполнении условия  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  выполняется последнее утверждение теоремы. При  $n = 1$  выберем в  $V$  базис  $e_0, e_1$  с  $f(e_0) = 0$  и  $\tilde{g}(e_0, e_1) = 0$ . Тогда

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

и условие  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  влечёт равенство  $c = 0$ , откуда  $f(x_0, x_1) = 2bx_0x_1$  и  $Q' = \{e_0, e_1\}$ , как и требуется. При  $n \geq 2$  рассмотрим точку  $e_0 \in Q' \setminus Q$  и обозначим через  $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  поляру этой точки относительно квадрики  $Q$ . Для любого базиса  $e_1, \dots, e_n$  в  $H$  матрицы Грама форм  $f$  и  $g$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & F_H & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где  $F_H$  и  $G_H$  суть матрицы Грама квадрик  $Q' \cap H$  и  $Q \cap H$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ . Следовательно, число  $c$  и матрица  $G_H$  обратимы, квадрика  $Q \cap H$  гладкая, а

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G_H^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Поэтому равенство  $\text{tr}(G^{-1}F) = 0$  влечёт равенство  $\text{tr}(G_H^{-1}F_H) = 0$ , и по индукции любая точка  $p_1 \in (Q' \cap H) \setminus (Q \cap H)$  является вершиной автополярного относительно  $Q \cap H$  симплекса  $p_1 p_2 \dots p_n$ , вписанного в  $Q' \cap H$ . Симплекс  $e_0 p_1 p_2 \dots p_n$  автополярен относительно  $Q$  и вписан в  $Q'$ .  $\square$

#### ПРИМЕР 6.4 (ОБЩИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРИК)

Всякая гиперплоскость в пространстве  $\mathbb{P}(S^2 V^*)$  квадрик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  задаётся однородным линейным уравнением вида

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij} = \text{tr} AB, \quad (6-1)$$

где  $A = (a_{ij})$  — постоянная симметрическая матрица коэффициентов уравнения гиперплоскости, а  $B = (b_{ij})$  переменная симметрическая матрица координат в пространстве  $S^2V^*$ . Матрицу  $A$  можно воспринимать как матрицу Грама некоей фиксированной квадрики  $Q_A \subset \mathbb{P}^n$ . Если эта квадрика гладкая<sup>1</sup>, то уравнение (6-1) задаёт гиперплоскость, состоящую из всех квадрик, гармонически описанных около квадрики  $Q_A^\times$  с матрицей Грама  $A^{-1}$ .

**6.2. Подпространства, лежащие на гладкой квадрике.** Ортогональная группа невырожденной квадратичной формы  $q \in S^2V^*$  действует на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$ , переводя гладкую квадрику  $Q = V(q)$  в себя. Согласно сл. 2.2 на стр. 20, это действие позволяет перевести любое проективное подпространство  $L \subset Q$  в любое другое подпространство  $L' \subset Q$  той же размерности. В частности, ортогональная группа транзитивно действует на точках квадрики и для любых точек  $p_1, p_2 \in Q$  биективно отображает множество  $k$ -мерных подпространств  $L \subset Q$ , проходящих через  $p_1$ , в аналогичное множество  $k$ -мерных подпространств  $L' \subset Q$ , проходящих через  $p_2$ .

**6.2.1. Планарность.** Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на гладкой квадрике  $Q$ , называется *планарностью* квадрики  $Q$ . Планарность пустой квадрики, задаваемой анизотропной квадратичной формой, по определению полагается равной  $-1$ . Квадрики планарности  $0$  суть непустые квадрики, не содержащие прямых. Через каждую точку  $m$ -планарной квадрики можно провести  $m$ -мерное проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике, и никакое  $(m + 1)$ -мерное проективное подпространство на такой квадрике не лежит.

Согласно сл. 2.3 на стр. 21, уравнение гладкой квадрики  $Q = V(q)$  в  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n), \quad (6-2)$$

где  $-1 \leq m \leq (n + 1)/2$ ,

где  $\alpha$  — анизотропная квадратичная форма от  $n - 2m - 1$  переменных, а число  $2m + 2$  равно размерности гиперболического слагаемого в разложении пространства  $V$  в прямую ортогональную относительно формы  $\tilde{q}$  сумму гиперболического и анизотропного подпространств. Таким образом, максимум размерностей изотропных относительно формы  $\tilde{q}$  векторных подпространств в  $V$  равен  $m + 1$  и, стало быть, планарность квадрики (6-2) равна  $m$ . В частности, квадрики вида (6-2) с разными  $m$  не могут быть переведены одна в другую проективным преобразованием.

Пример 6.5 (квадрики максимальной планарности)

Максимально возможная планарность квадрики  $Q \subset \mathbb{P}^n$  равна  $(n - 1)/2$  при нечётном  $n$  и  $(n - 2)/2$  при чётном  $n$ . Над алгебраически замкнутым полем все невырожденные квадрики имеют максимальную планарность. Над любым полем уравнение квадрики максимальной планарности в  $\mathbb{P}^n$  в подходящих однородных координатах записывается в виде

$$0 = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} \text{ при } n = 2m + 1, \quad (6-3)$$

$$x_0^2 = x_1x_{m+1} + x_2x_{m+2} + \dots + x_mx_{2m} \text{ при } n = 2m. \quad (6-4)$$

Поэтому все квадрики максимальной планарности переводятся друг в друга проективными преобразованиями. Например, все непустые гладкие коники на  $\mathbb{P}^2$  проективно конгруэнтны.

<sup>1</sup>Что так в общем случае.

## Предложение 6.4

Сечение гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  произвольной гиперплоскостью  $\Pi$  либо является гладкой квадрикой в этой гиперплоскости, либо имеет единственную особую точку  $p \in \Pi \cap Q$ . Последнее равносильно тому, что  $\Pi = T_p Q$  касается квадрики в точке  $p$ , и в этом случае  $Q \cap T_p$  является конусом с вершиной в  $p$  над гладкой квадрикой на единицу меньшей планарности и на два меньшей размерности, чем у  $Q$ , расположенной в  $(n - 2)$ -мерной плоскости, дополнительной к  $p$  внутри  $T_p Q$ .

Доказательство. Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $\Pi = \mathbb{P}(W)$  и  $Q = V(q)$ . Ядро ограничения оператора корреляции  $\hat{q}: V \rightarrow V^*$  на подпространство  $W \subset V$  является пересечением  $W$  с одномерным подпространством  $W^\perp \subset V$ . Это пересечение либо нулевое, либо является точкой  $p \in \Pi$ . В первом случае квадрика  $Q \cap \Pi$  невырождена, а во втором случае — имеет единственную особую точку  $p$ , причём  $\Pi = \mathbb{P}(p^\perp)$  является касательным пространством<sup>1</sup> к  $Q$  в точке  $p$ . Согласно теор. 4.1 на стр. 45, особая квадрика  $Q \cap \Pi$  в пространстве  $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики, лежащей в любой не проходящей через  $p$  гиперплоскости  $\mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}_{n-2} \subset \Pi$ . Так как ограничение квадратичной формы  $q$  на подпространство  $U \subset V$  невырождено, имеется ортогональное разложение  $V = U \oplus U^\perp$ . Ограничение формы  $q$  на двумерное пространство  $U^\perp$  невырождено, и в  $U^\perp$  есть изотропная прямая  $p \subset U^\perp$ . Следовательно,  $U^\perp \simeq H_2$  является гиперболической плоскостью, и размерность гиперболической составляющей ограничения  $q|_U$  на два меньше, чем у самой формы  $q$  на  $V$ , т. е. планарность гладкой квадрики  $Q \cap \mathbb{P}(U)$  на единицу меньше, чем у  $Q$ .  $\square$

**6.3. Классификация проективных квадрик.** Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Поскольку над алгебраически замкнутым полем уравнение квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  всегда приводится линейной заменой координат к виду

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0, \quad \text{где } r = \text{rk } Q = n - \dim \text{Sing } Q,$$

мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем две квадрики проективно конгруэнтны тогда и только тогда, когда у них одинаковый ранг.

В теор. 4.1 на стр. 45 мы видели, что над любым полем каждая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  является линейным соединением своего пространства особых точек  $\text{Sing } Q$  и неособой квадрики  $Q \cap L$  в любом дополнительном к  $\text{Sing } Q$  проективном подпространстве  $L \subset \mathbb{P}_n$ ,  $L \cap \text{Sing } Q = \emptyset$ ,  $\dim L = \text{rk } Q - 1$ . Так как любая пара дополнительных подпространств переводится в любую другую такую пару проективным автоморфизмом, классификация квадрик над произвольным полем сводится к классификации гладких квадрик.

Гладкие квадрики разной планарности, очевидно, не могут быть проективно конгруэнтны. В прим. 6.5 мы видели, что над произвольным полем все квадрики максимально возможной в  $\mathbb{P}_n$  планарности  $[(n - 1)/2]$  проективно конгруэнтны. Уравнение непустой квадрики не максимальной планарности  $m$  в подходящих координатах приводится к виду (6-2):

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = \alpha(x_{2m+2}, \dots, x_n),$$

где  $\alpha$  — ненулевая анизотропная форма, и классификация таких квадрик над произвольным полем  $\mathbb{k}$  требует описания имеющихся над  $\mathbb{k}$  анизотропных квадратичных форм. Для многих

<sup>1</sup>См. формулу (4-5) на стр. 45.

полей, например, для поля  $\mathbb{Q}$ , множество классов анизотропных форм с точностью до изоморфизма представляется на сегодняшний день совершенно необозримым. Но над теми полями, где есть эффективное описание анизотропных форм, можно дать и полную классификацию проективных квадратик.

**6.3.1. Вещественные квадрики.** Над полем  $\mathbb{R}$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$  есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма от  $k$  переменных:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2.$$

Поэтому каждая гладкая вещественная квадратика размерности  $n$ , лежащая в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ , в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{2m}x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \dots + x_{n+1}^2, \quad (6-5)$$

где  $-1 \leq m \leq n/2$ .

При разных  $m$  эти уравнения задают проективно неконгруэнтные квадрики разной планарности. Поэтому формула (6-5) доставляет полный список парно неконгруэнтных гладких вещественных квадратик. Мы будем обозначать квадратик (6-5) через  $Q_{n,m}$  и называть вещественной  $m$ -планарной квадратикой размерности  $n$ . Планарность  $m$ , размерность  $n$  и абсолютная величина индекса<sup>1</sup>  $\iota$  квадратичной формы, задающей вещественную квадратик, связаны равенством

$$n = 2m + \iota.$$

В ортогональном базисе уравнение квадратик  $Q_{n,m}$  принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \dots + t_{n+1}^2.$$

Гиперболические координаты  $x_\nu$  связаны с ортогональными координатами  $t_\nu$  формулами

$$x_{2i} = t_{m+i} + t_i, \quad x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \quad \text{при } 0 \leq i \leq m$$

и  $x_j = t_j$  при  $2m + 2 \leq j \leq n + 1$ .

Квадрик планарности 0 задаётся в ортогональных координатах уравнением

$$t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$$

и называется *эллиптической*. Она непуста и не содержит прямых. Квадрики положительной планарности традиционно называют *гиперболическими*, не смотря на то, что гиперболической формой задаётся всего одна из них — чётномерная квадратик максимальной планарности  $Q_{2k,k}$ . Все  $(-1)$ -планарные квадрики пусты. Из предл. 6.4 на стр. 76 вытекает

**Следствие 6.4**

Пересечение гладкой вещественной  $n$ -мерной  $m$ -планарной квадратик  $Q_{n,m}$  с касательной гиперплоскостью в точке  $p$  является конусом с вершиной в  $p$  над гладкой квадратикой  $Q_{n-2,m-1}$  размерности  $n - 2$  и планарности  $m - 1$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 2.3.1 на стр. 22.

**6.4. Квадратичные поверхности.** Особая квадратичная поверхность минимального ранга 1 в подходящих координатах задаётся уравнением  $x_0^2 = 0$  и называется *двойной плоскостью*.

Особая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_3$  ранга 2 является линейным соединением вершинной прямой  $\text{Sing } Q$  и гладкой квадрики на любой дополнительной прямой. Если эта гладкая квадрика пуста, то  $Q = \text{Sing } Q$  — это прямая, целиком состоящая из особых точек. Такая квадрика называется *двойной прямой*. Над  $\mathbb{R}$  двойная прямая задаётся уравнением  $x_0^2 + x_1^2 = 0$ , а над алгебраически замкнутыми полями таких квадрик не бывает. Если квадрика  $Q$  пересекает дополнительную к  $\text{Sing } Q$  прямую по двум точкам, то она является объединением двух различных плоскостей, пересекающихся по прямой  $\text{Sing } Q$ . Такая квадрика называется *распавшейся*. Уравнение распавшейся квадрики является произведением двух различных линейных форм и в подходящих координатах имеет вид  $x_0 x_1 = 0$ .

Особая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_3$  ранга 3 имеет единственную особую точку  $s = \text{Sing } Q$  и является линейным соединением этой точки с гладкой коникой в произвольной не проходящей через  $s$  плоскости  $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ . Если эта коника пуста, квадрика  $Q$  состоит из единственной точки  $s$  и называется *двойной точкой*. Над  $\mathbb{R}$  двойная точка задаётся уравнением  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ , над алгебраически замкнутым полем таких квадрик нет. Если гладкая коника  $Q \cap \Pi$  непуста, квадрика  $Q$  называется *простым конусом* с вершиной в  $p$ . Над любым полем уравнение такой квадрики приводится к виду  $x_1^2 = x_0 x_2$ , и её вершина в этих координатах находится в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

**Упражнение 6.7.** Покажите, что каждая лежащая на простом конусе прямая проходит через его вершину.

Гладкая квадратичная поверхность  $Q \subset \mathbb{P}_3$  либо пуста, либо 0-планарна, либо 1-планарна. Не содержащая прямых непустая квадрика планарности нуль задаётся уравнением

$$x_0 x_1 = \alpha(x_2, x_3),$$

где  $\alpha$  — анизотропная квадратичная форма от двух переменных. Классификация таких квадрик требует описания бинарных анизотропных квадратичных форм над полем  $\mathbb{k}$ . Над  $\mathbb{R}$  такая квадрика ровно одна — это эллиптическая квадрика  $Q_{2,0}$ , уравнение которой можно записать в виде  $x_0 x_1 = x_2^2 + x_3^2$  или, если угодно, в виде  $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ .

**6.4.1. Гладкая квадратичная поверхность планарности один.** Над любым полем все гладкие квадратичные поверхности планарности 1 проективно конгруэнтны. Удобной геометрической моделью такой поверхности является *квадрика Сегре* в проективном пространстве

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})),$$

задаваемая квадратным уравнением  $\det(A) = 0$  и состоящая из матриц ранга 1:

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left( \begin{array}{cc} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{array} \right) \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00} \alpha_{11} - \alpha_{01} \alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (6-6)$$

Каждый оператор  $F : U \rightarrow U$  ранга 1 на двумерном векторном пространстве  $U$  имеет одномерный образ, который является точкой на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ , и одномерное ядро, аннулятор которого является точкой на  $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ . Наоборот, любые ненулевые вектор  $v \in U$  и ковектор  $\xi \in U^*$  задают на  $U$  линейный оператор ранга 1

$$v \otimes \xi : U \rightarrow U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u), \quad (6-7)$$

образ которого порождается вектором  $v$ , а аннулятор ядра — ковектором  $\xi$ . Оператор (6-7) называется *тензорным произведением* вектора  $v$  и ковектора  $\xi$ . При умножении  $v$  и  $\xi$  на ненулевые константы, оператор  $v \otimes \xi$  умножается на произведение этих констант. Мы получаем биекцию между точками квадрики Сегре и точками  $(v, \xi) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$ . Вложение

$$s : \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{End}(U)), \quad (v, \xi) \mapsto v \otimes \xi, \quad (6-8)$$

образом которого является квадрика Сегре, называется *вложением Сегре*.

**Упражнение 6.8.** Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре в точке  $v \otimes \xi$  состоит из таких линейных операторов  $f : U \rightarrow U$ , что  $f(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$ .

Для координатного пространства  $U = \mathbb{k}^2$ , вектора  $x \in \mathbb{k}^2$  с координатами  $(x_0 : x_1)$  и ковектора  $\xi \in \mathbb{k}^{2*}$  с координатам  $(\xi_0 : \xi_1)$  в двойственном базисе оператор  $x \otimes \xi$  имеет в стандартном базисе пространства  $\mathbb{k}^2$  матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1). \quad (6-9)$$

Точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$  и  $(\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}_1^\times$  восстанавливаются по заданной матрице ранга 1 как отношение между её строками и отношение между её столбцами соответственно, и для любых двух заданных таких отношений матрица (6-9) является единственной с точностью до пропорциональности матрицей, в которой эти отношения реализуются.

**Упражнение 6.9.** Обязательно убедитесь во всём этом этом!

Матрицы с предписанным отношением строк  $x = (x_0 : x_1)$  составляют двумерное векторное подпространство в  $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k})$ . Его проективизация является образом «вертикальной» координатной прямой  $x \times \mathbb{P}_1^\times \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  при вложении (6-8) и представляет собою лежащую на квадрике Сегре прямую в  $\mathbb{P}_3$ . Аналогично, каждая «горизонтальная» координатная прямая  $\mathbb{P}_1 \times \xi \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  переводится вложением (6-8) в лежащую на квадрике Сегре прямую, образованную классами пропорциональных матриц ранга 1 с фиксированным отношением столбцов  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ . Поскольку отображение (6-8) является биекцией между  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  и квадратикой Сегре, мы приходим к следующему заключению.

**Предложение 6.5**

Квадратичная поверхность планарности 1 в  $\mathbb{P}_3$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  замечается двумя семействами прямых так, что любые две прямые из одного семейства не пересекаются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, каждая точка квадрики является точкой пересечения двух прямых из разных семейств, и каждая лежащая на квадрике прямая принадлежит ровно одному из семейств.

**Доказательство.** Проверки требует лишь последнее утверждение, означающее, что на квадрике Сегре не лежит никаких других прямых кроме образов координатных прямых произведения  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times$  при отображении (6-8). Лежащая на квадрике  $Q_S$  прямая  $\ell$  содержится в пересечении этой квадрики с касательной плоскостью  $T_p Q_S$ , построенной в любой точке  $p \in \ell$ . Пересечение  $Q_S \cap T_p Q_S$  является коникой в плоскости  $T_p Q_S$  и содержит пару проходящих через  $p$  прямых из разных семейств. Тем самым, это распадающаяся коника, состоящая ровно из этих двух прямых, и прямая  $\ell$  — одна из них.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Покажите, что гомография  $\varphi : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ , задаваемая не лежащей на квадрике  $Q_S$  точкой  $\varphi \in \mathbb{P}(\text{End}(U))$ , переводит точку  $p \in \mathbb{P}(U)$  в такую точку  $q \in \mathbb{P}(U)$ , что плоскость, порождённая точкой  $\varphi$  и прямолинейной образующей  $\mathbb{P}_1 \times p^\times \subset Q_S$ , пересекает квадрику  $Q_S$  по этой образующей и образующей  $q \times \mathbb{P}_1^\times$ .

Предложение 6.6

Любые три прямые  $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике. Если прямые попарно не пересекаются, то проходящая через них квадрика единственна, невырождена, 1-планарна и является объединением всех прямых, пересекающих каждую из прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ .

Доказательство. Квадрики в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  образуют проективное пространство  $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ . Так как любые 9 гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_9$  пересекаются, через любые 9 точек в  $\mathbb{P}_3$  можно провести квадрику. Выбирая на каждой из прямых по 3 различные точки и проводя через эти точки квадрику, заключаем, что она целиком содержит все три прямые, а также любую прямую, пересекающую каждую из прямых  $\ell_i$  в трёх разных своих точках. Поскольку ни на какой особой квадрике нет трёх попарно непересекающихся прямых, построенная квадрика гладкая и 1-планарная, если  $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . В этом случае все три прямые  $\ell_i$  лежат в одном семействе прямолинейных образующих, и каждая прямая из второго семейства образующих пересекает каждую из прямых  $\ell_i$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Сколько прямых в  $\mathbb{P}_3$  пересекает каждую из четырёх заданных прямых? Перечислите все возможные над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  ответы. Какие из них устойчивы к малым шевелениям заданных прямых?

**6.5. Квадрика Плюккера и прямые в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество всех  $k$ -мерных векторных подпространств в фиксированном  $n$ -мерном векторном пространстве называется *грассманианом*  $\text{Gr}(k, n)$ . Например, проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n+1)$ , а двойственное пространство  $\mathbb{P}_n^\times$  гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$  это  $\text{Gr}(n, n+1)$ . Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан  $\text{Gr}(2, 4)$  двумерных векторных подпространств в векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{k}^4$  или, что то же самое, множество всех прямых в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ . Он вкладывается в проективное пространство  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  отображением Плюккера

$$\mathbb{P} : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V), \quad U \mapsto \Lambda^2U, \quad (6-10)$$

которое переводит прямую  $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ , являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства  $U \subset V$  с базисом  $a, b$ , в одномерное подпространство  $\Lambda^2U \subset \Lambda^2V$ , порождённое грассмановым произведением  $a \wedge b$ .

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Убедитесь, что отображение (6-10) инъективно.

Согласно предл. 3.2 на стр. 35, разложимость грассмановой квадратичной формы  $\omega \in \Lambda^2V$  на два линейных множителя равносильна тому, что  $\omega \wedge \omega = 0$ . Это соотношение задаёт в пространстве  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  квадрику Плюккера

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}, \quad (6-11)$$

которая является множеством изотропных векторов билинейной формы  $\tilde{q} : \Lambda^2V \times \Lambda^2V \rightarrow \mathbb{k}$ , однозначно с точностью до пропорциональности определяемой тем, что для всех  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2V$  в одномерном векторном пространстве  $\Lambda^4V$  выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (6-12)$$

где  $e_1, e_2, e_3, e_4$  — произвольный базис в  $V$ . Поскольку однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом, эта билинейная форма симметрична.

Упражнение 6.13. Убедитесь, что задаваемая равенством (6-12) форма  $\tilde{q}$  билинейна и невырождена, а при выборе другого базиса в  $V$  она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из шести мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ .

В координатах  $x_{ij}$  относительно стандартного базиса из мономов  $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , равенство  $\omega \wedge \omega = 0$  для бивектора  $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$  принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0, \quad (6-13)$$

а отображение (6-10) переводит прямую  $(ab)$ , порождённую векторами  $a, b$ , строки координат которых в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  составляют  $2 \times 4$  матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

в грассманову квадратичную форму  $a \wedge b$  с координатами  $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ , равными  $2 \times 2$  минорам этой матрицы.

Упражнение 6.14. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная  $2 \times 4$ -матрица, шесть  $2 \times 2$ -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  б)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Поскольку квадратичная форма (6-13) гиперболическая, квадрика (6-11) 2-планарна. Таким образом, любая 2-планарная квадрика в  $\mathbb{P}_5$  над любым полем отличной от 2 характеристики может восприниматься как множество прямых в подходящем пространстве  $\mathbb{P}_3$ .

Лемма 6.1

Две прямые  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$  пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (6-12).

Доказательство. Если  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ , то в  $V$  существует такой базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , что  $\ell_1 = (e_1 e_2)$ , а  $\ell_2 = (e_3 e_4)$ . Тогда  $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ . Если  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекаются в точке  $a$ , то  $\ell_1 = (ab)$ , а  $\ell_2 = (ac)$  для некоторых  $b, c \in V$ , и  $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$ .  $\square$

Следствие 6.5

Для любой точки  $p = \mathbb{p}(\ell) \in P$  пересечение  $P \cap T_p P = \{\mathbb{p}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$ .

**6.5.1. Связки и пучки прямых в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество прямых в  $\mathbb{P}_3$  называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость  $\pi \subset P$  линейно порождается тройкой неколлинеарных точек  $p_i = \mathbb{p}(\ell_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом

$$\pi = T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P \subset P.$$

По лем. 6.1 и сл. 6.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  в  $\mathbb{P}_3$ . Три прямые в  $\mathbb{P}_3$  попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на  $\mathbb{P}_3$ :

$\alpha$ -плоскость  $\pi_\alpha(O) \subset P$ , состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку  $O \in \mathbb{P}_3$

$\beta$ -плоскость  $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ , состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости  $\Pi \in \mathbb{P}_3$ .

Мы заключаем, что пюккерова квадрика заматается двумя семействами плоскостей разного типа так, что любые две плоскости одного типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned}\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= \mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= \mathbb{P}((O_1 O_2)),\end{aligned}$$

а две плоскости  $\pi_\beta(\Pi)$ ,  $\pi_\alpha(O)$  разных типов не пересекаются при  $O \notin \Pi$ , а при  $O \in \Pi$  пересекаются по прямой, которая является пюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости  $\Pi$  и проходящих через точку  $O \in \Pi$ . Покажем, что все прямые, лежащие на квадрике Пюккера, имеют такой вид. Для этого рассмотрим конус  $C = P \cap T_p P$  с вершиной  $p$ , образованный всеми лежащими на квадрике  $P$  прямыми, проходящими через точку  $p$ , и зафиксируем какое-нибудь не содержащее  $p$  трёхмерное проективное подпространство  $H \subset T_p P$ , см. рис. 6◊7. Пересечение  $G = C \cap H$  является гладкой 1-планарной квадрикой в  $H$ , и любая проходящая через  $p$  прямая на  $P$  имеет вид  $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$  для некоторой точки  $p' \in G$  и плоскостей  $\pi_\alpha, \pi_\beta$  натянутых на точку  $p$  и пару проходящих через  $p'$  прямолинейных образующих квадрики  $G$ .

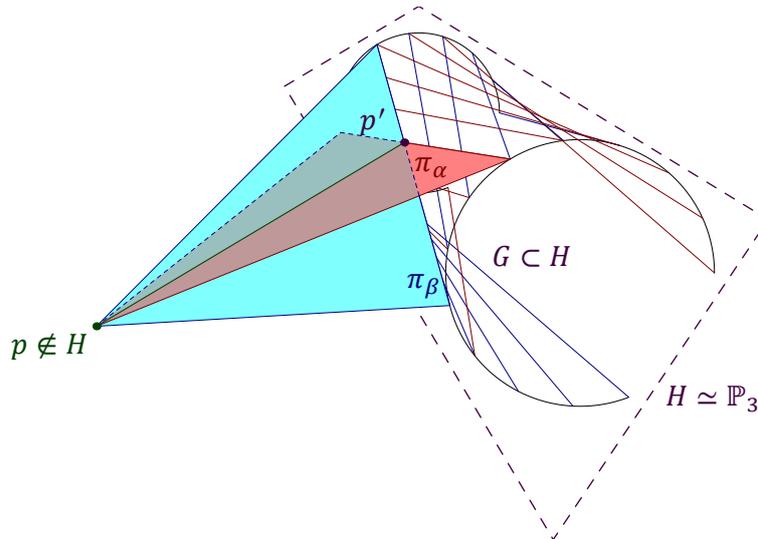


Рис. 6◊7. Конус  $C = P \cap T_p P$ .

## §7. Пучки квадратик

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто и  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**7.1. Базисное множество и спектр.** Напомню<sup>1</sup>, что прямые в пространстве квадратик  $\mathbb{P}(S^2V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *пучками квадратик*. Такой пучок  $(Q_0, Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$  однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик  $Q_0 = V(q_0)$ ,  $Q_1 = V(q_1)$  и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}, \quad (7-1)$$

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ .

Пересечение базисных квадратик  $B = Q_0 \cap Q_1$  называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (7-1) проходит через  $B$ , базисное множество является пересечением всех квадратик пучка и не зависит от выбора базисных квадратик  $Q_0, Q_1$  на прямой  $(Q_0, Q_1)$ . Многочлен

$$\chi_{(q_0, q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0 q_0 + t_1 q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (7-2)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (7-1). Это однородный многочлен степени  $n + 1$  от  $t = (t_0 : t_1)$ . В отличие от базисного множества, характеристический многочлен (7-2) *зависит* от выбора базисных квадратик  $Q_0, Q_1$ , и даже их уравнений  $q_0, q_1$ . При переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке или умножении их уравнений на константы переменные  $(t_0 : t_1)$  подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (7-2), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных.

Пучок квадратик называется *невырожденным*, если в нём есть хоть одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (7-2) отличен от нуля хотя бы в одной точке на  $\mathbb{P}_1$  и, в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на  $\mathbb{P}_n$  может быть не более  $n + 1$  особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, так вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций  $\hat{q}_0, \hat{q}_1$ , лежит в ядре и любой их линейной комбинации  $\lambda_0 \hat{q}_0 + \lambda_1 \hat{q}_1$ , что означает вырожденность сразу всех квадратик пучка.

Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (7-1) называется *спектром* этого пучка. Квадратичные формы  $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ , задающие квадратик из спектра, биективно соответствуют корням  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  характеристического многочлена (7-2). Будем называть *кратностью*  $\text{mult} Q_\lambda$  вырожденной квадратик  $Q_\lambda$ , отвечающей корню  $\lambda$  характеристического многочлена (7-2), кратность  $\text{mult}(\lambda)$  этого корня, т. е. максимальное  $n \in \mathbb{N}$ , такое, что многочлен (7-2) делится на  $\det^n(\lambda, t) = (t_1 \lambda_0 - t_0 \lambda_1)^n$  в кольце многочленов  $\mathbb{k}[t_0, t_1]$ . Также положим по определению кратности всех гладких квадратик пучка равными нулю.

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  спектр любого невырожденного пучка квадратик на  $\mathbb{P}_n$  состоит ровно из  $n + 1$  квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как неупорядоченный набор из  $n + 1$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$  с точностью до дробно линейного автоморфизма  $\mathbb{P}_1$ , он не зависит от выбора базиса в пучке.

**Лемма 7.1**

Кратность  $\text{mult} S$  каждой особой квадратик  $S$  из невырожденного пучка строго больше размерности  $\dim \text{Sing } S$  пространства её особых точек.

<sup>1</sup>См. н° 4.4.4 на стр. 50.

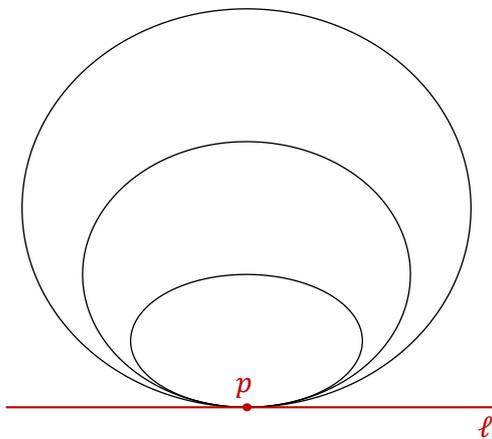
Доказательство. Пусть квадрика  $G \subset \mathbb{P}^n$  неособа, а квадрика  $S \subset \mathbb{P}^n$  имеет  $\dim \text{Sing } S = k$ . Это означает, что её матрица Грама имеет  $\text{rk } S = (n + 1) - (k + 1) = n - k$ , и все миноры порядка  $n - k + 1$  и выше в ней — нулевые. Согласно [прим. 3.2](#) на стр. 33, характеристический многочлен

$$\det(t_0 S + t_1 G) = \sum_{m=0}^{n+1} t_0^m t_1^{n+1-m} \cdot \sum_{\#I=\#J=m} s_{IJ} g_{ij} \quad (7-3)$$

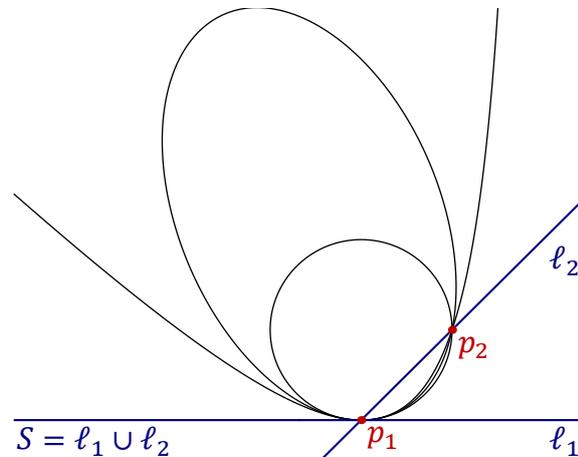
делится на  $t_1^{k+1}$ . Поэтому кратность задающей  $S$  точки  $t = (1 : 0) \in \mathbb{P}_1$  не менее  $k + 1$ .  $\square$

**7.2. Невырожденные пучки коник.** Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  невырожденный пучок коник на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  может содержать 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество конечно и может состоять из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , то все базисные точки такого пучка лежат на  $\ell_1 \cup \ell_2$ , причём на каждой из прямых  $\ell_1, \ell_2$  должна быть хотя бы одна базисная точка, так как любая гладкая коника пучка пересекает каждую из этих прямых.

**7.2.1. Пучок с одной базисной точкой.** Если базисное множество пучка состоит из единственной точки  $p$ , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке  $p$ . Наоборот, любая гладкая коника  $C$  и касающаяся её в произвольной точке  $p \in C$  двойная прямая  $\ell$  задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой  $p$ , и единственной особой коникой — двойной прямой  $\ell$ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке  $p$  и имеют в ней общую касательную см. [рис. 7◊1](#).



**Рис. 7◊1.** Пучок с одной базисной точкой ( $a = b = c = d = p$ ).



**Рис. 7◊2.** Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b = c, p_2 = d$  и одной вырожденной коникой  $S$ .

**7.2.2. Пучки с двумя базисными точками.** Если базисное множество пучка состоит из двух точек  $p_1, p_2$ , то вырожденными кониками в нём могут или двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  или такая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$ , что  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ . Второй случай разделяется на два подслучая: либо обе точки  $p_1, p_2$  отличны от особой точки  $\ell_1 \cap \ell_2$ , как на [рис. 7◊3](#), либо точка  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ , а точка  $p_2 \neq \ell_1 \cap \ell_2$ , как на [рис. 7◊2](#).

Если имеет место последнее, то распавшаяся коника  $\ell_1 \cap \ell_2$  является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$  и проходит через точку  $p_2$ , см. рис. 7◊2. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам  $p_1, p_2$  и имеют в точке  $p_1$  общую касательную.

Двойная прямая  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  с  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$  возникают в пучке с двумя базисными точками  $p_1, p_2$  только одновременно в силу следующей леммы.

ЛЕММА 7.2

Коника, касающиеся двух заданных прямых  $\ell_1, \ell_2$  в двух заданных точках  $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ , отличных от  $\ell_1 \cap \ell_2$ , составляют пучок. Этот пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую  $\ell = (p_1 p_2)$  и распавшуюся конику  $\ell_1 \cup \ell_2$ , причём прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  однозначно восстанавливаются по двойной прямой  $(p_1 p_2)$  и любой гладкой конике  $C$  из пучка как касательные к  $C$  в точках пересечения  $C$  с  $(p_1 p_2)$ .

Доказательство. Каждый ненулевой вектор  $p \in V$  задаёт сюръективное линейное отображение

$$S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \quad (7-4)$$

переводящее квадратичную форму  $q$  в ковектор

$$\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad v \mapsto \tilde{q}(v, p).$$

Так как  $\dim V = 3$ , ядро отображения (7-4) имеет размерность  $\dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$ . Поэтому полный прообраз любого одномерного подпространства  $\xi \subset V^*$  при отображении (7-4) имеет размерность 4, а его проективизация имеет коразмерность 2 в пространстве коник. Беря вектор  $p$  на прямой  $\ell = \text{Ann } \xi$ , мы заключаем, что коники, касающиеся этой прямой в точке  $p$ , образуют в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие  $p_1 \in \ell_1$  и  $p_2 \in \ell_2$ , пересекаются как минимум по прямой. Если бы их пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $p_1$  и  $p_2$ , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от  $p_1$  и  $p_2$  точку прямой  $\ell$  и ещё какую-нибудь точку вне прямых  $\ell, \ell_1, \ell_2$ , распадается в объединение прямой  $\ell$  и ещё одной прямой  $\ell'$ , отличной от  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Поэтому она не может пересекать прямые  $\ell_1, \ell_2$  с кратностью 2 одновременно и в  $p_1$ , и в  $p_2$ . Это доказывает первое утверждение леммы. Остальные утверждения очевидны из рис. 7◊3.  $\square$

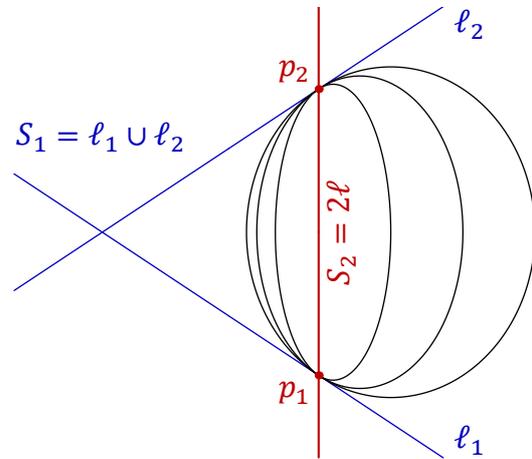


Рис. 7◊3. Пучок с двумя базисными точками  $p_1 = a = b, p_2 = c = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

**7.2.3. Пучок с тремя базисными точками.** Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек  $p_1, p_2, p_3$ , то они не коллинеарны<sup>1</sup>. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек  $p_i$  не может быть особой одновременно для двух

<sup>1</sup>Иначе содержащая базисные точки прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

распавшихся коник из пучка<sup>1</sup>. Каждая распавшаяся коника  $\ell_1 \cup \ell_2$  из такого пучка проходит через базисные точки либо так, что  $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ ,  $p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ , либо так, что  $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$ , а  $p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ . На рис. 7◊4 ниже первое отвечает прямым  $\ell'_1, \ell'_2$ , второе — прямым  $\ell''_1, \ell''_2$ . Во втором случае любая гладкая коника  $C$  из пучка касается прямой  $\ell_1$  в точке  $p_1$ .

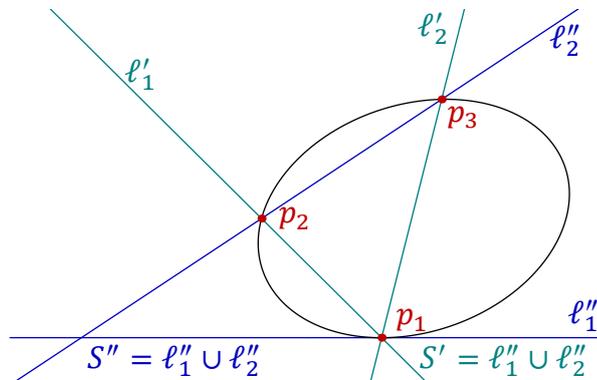


Рис. 7◊4. Пучок с тремя базисными точками  $p_1 = a = b$ ,  $p_2 = c$ ,  $p_3 = d$  и двумя вырожденными кониками  $S_1, S_2$ .

В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке  $p_1$  общую касательную, поскольку проходящая через  $p_1$  прямая  $\ell$ , касающаяся фиксированной гладкой коники  $C$  из пучка в точке  $p_1 \in C$ , соприкасается в точке  $p_1$  с каждой коникой пучка, порождённой коникой  $C$  и распавшейся коникой  $\ell'_1 \cup \ell'_2$ , которая тоже касается прямой  $\ell$  в точке  $p_1 = \ell'_1 \cap \ell'_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник  $C \subset \mathbb{P}_2$ , касающихся заданной прямой  $\ell$  в заданной точке  $p \in \ell$  и проходящих через две другие различные заданные точки  $c, d \notin \ell$ , составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники:  $(cd) \cup \ell$  и  $(pc) \cup (pd)$ .

**7.2.4. Простой пучок коник.** Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 7.1 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек  $a, b, c, d$ , никакие 3 из которых не коллинеарны.

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Покажите, что множество всех коник, проходящих через четыре различные точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника  $abcd$ , как на рис. 7◊5.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется своими базисными точками  $a, b, c, d$ . В однородных координатах  $x = (x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

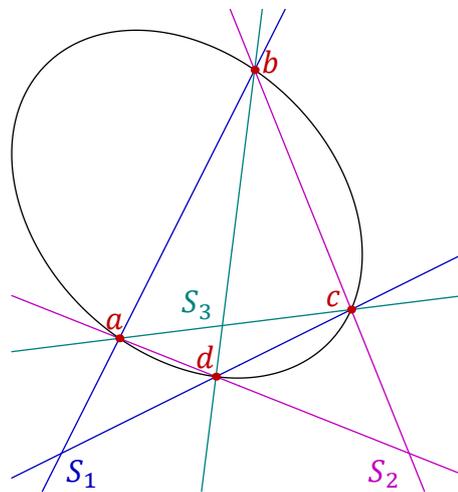


Рис. 7◊5. Три особые коники простого пучка с базисными точками  $a, b, c, d$ .

<sup>1</sup>Иначе все коники пучка были бы особы в этой точке, см. н° 7.1.

где  $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 7◊4 возникает при  $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$ , пучок на рис. 7◊3 — когда  $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$ , пучок на рис. 7◊2 — если  $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$ , а на рис. 7◊1 все четыре базисные точки схлопываются в одну.

Предложение 7.1

Ассоциированный с четырёхвершинником  $abcd$  треугольник  $xuz$  автополярен относительно всех гладких коник, описанных около этого четырёхвершинника.

Доказательство (по В. С. Жгуну). Каждая описанная около четырёхвершинника  $abcd$  коника  $C = V(q)$  лежит в простом пучке, порождённом любыми двумя из трёх распавшихся коник  $S_x = V(f_x) = (ab) \cup (cd)$ ,  $S_y = V(f_y) = (ad) \cup (bc)$ ,  $S_z = V(f_z) = (ac) \cup (bd)$ . Поскольку  $x = \text{Sing } S_x = \ker \hat{f}_x$ , мы имеем равенства  $\tilde{f}_x(y, x) = \tilde{f}_x(z, x) = 0$ . Аналогично,  $\tilde{f}_y(x, y) = \tilde{f}_y(z, y) = 0$  и  $\tilde{f}_z(x, z) = \tilde{f}_z(y, z) = 0$ . Так как билинейная форма  $\tilde{q}$  является линейной комбинацией билинейных форм  $\tilde{f}_x$  и  $\tilde{f}_y$ , из равенств  $\tilde{f}_x(x, y) = \tilde{f}_y(x, y) = 0$  вытекает равенство  $\tilde{q}(x, y) = 0$ . Аналогично получаем равенства  $\tilde{q}(x, z) = 0$  и  $\tilde{q}(y, z) = 0$ , см. рис. 7◊6.

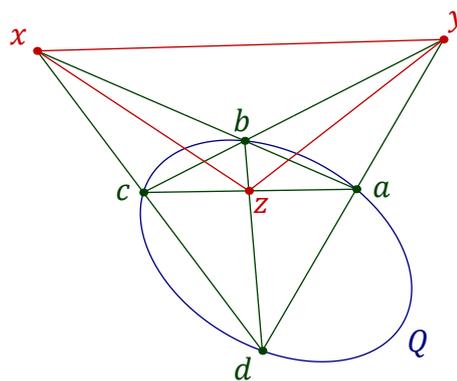


Рис. 7◊6. Автополярный  $\Delta xuz$ .

□

Упражнение 7.3. Получите из предл. 7.1 обоснование построения Штейнера<sup>1</sup>.

Пример 7.1 (инволюция Дезарга)

Будем называть прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  *общей* по отношению к невырожденному пучку коник  $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ , если она не проходит через базисные точки пучка и не содержится ни в одной из особых коник пучка. Каждый невырожденный пучок коник  $L$  задаёт на любой общей по отношению к нему прямой  $\ell$  инволюцию Дезарга  $\sigma_L: \ell \simeq \ell$ , переставляющую точки  $s, t \in \ell$  если и только если в пучке  $L$  имеется такая коника  $C$ , что  $C \cap \ell = \{s, t\}$ . В самом деле, для любой точки  $t \in \ell$  в пучке  $L$  имеется ровно одна коника  $C$ , проходящая через  $t$ , причём коэффициенты её уравнения рационально зависят от координат точки  $t$ , и она пересекает прямую  $\ell$  по одной или двум точкам. Таким образом, точка  $s$  определяется точкой  $t$  однозначно, а её координаты рационально зависят от координат точки  $t$ , и наоборот. Точка  $p \in \ell$  неподвижна относительно инволюции Дезарга если и только если в пучке  $L$  имеется коника, касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $p$ . Следовательно, над алгебраически замкнутым полем в любом пучке коник имеется ровно две коники, касающиеся заданной общей по отношению к этому пучку прямой.

Если  $L$  — простой пучок с базисными точками  $a, b, c, d$ , как на рис. 7◊6, то беря в качестве прямой  $\ell$  сторону  $uz$  ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$  треугольника  $xuz$ , мы получаем на прямой  $\ell$  инволюцию с неподвижными точками  $y$  и  $z$ , которые являются точками касания  $\ell$  с особыми кониками  $(ad) \cup (cb)$  и  $(ac) \cup (bd)$  соответственно. Эта инволюция переставляет между собою точки пересечения прямой  $\ell$  со сторонами  $(ad)$  и  $(bc)$  четырёхвер-

<sup>1</sup>См. упр. 5.9 на стр. 68.

шинника  $abcd$ . Мы получили альтернативное доказательство того, что в пучке прямых, проходящих через  $x$  стороны треугольника гармоничны сторонам четырёхвершинника<sup>1</sup>.

Пример 7.2 (коника полюсов и коника одиннадцати точек)

Каждая точка  $a \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ , которая не является особой ни для какой коники из невырожденного пучка  $L \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ , задаёт линейное вложение  $a : L \hookrightarrow \mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$ , переводящее конику  $Q = V(q) \in L$  в поляр  $\bar{q}(a)$  точки  $a$  относительно этой коники. На языке линейной алгебры это вложение является проективизацией инъективного линейного отображения<sup>2</sup>, переводящего квадратичную форму  $q$  из двумерного пространства, проективизацией которого является пучок  $L$ , в линейную форму  $\hat{q}(a) : V \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto \hat{q}(v, a)$ , где  $a \in V$  — произвольно зафиксированный ненулевой вектор, представляющий точку  $a \in \mathbb{P}(V)$ . Аннулятором двумерного образа такого отображения является одномерное подпространство  $a_L \subset V$  — центр пучка прямых, полярных точке  $a$  относительно всевозможных коник из  $L$ . На геометрическом языке точка  $a_L \in \mathbb{P}(V)$  — это единственная точка плоскости, сопряжённая точке  $a$  сразу относительно всех коник из  $L$ . Отображение  $a : L \rightarrow a_L^\times$  задаёт гомографию между пучком коник  $L$  и пучком прямых  $a_L^\times$  на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ .

Если прямая  $\ell = (st)$  не проходит через особые точки коник из пучка  $L$ , то полюса этой прямой относительно коник из  $L$  суть точки пересечения пар соответственных прямых из пучков  $s_L^\times$  и  $t_L^\times$  при гомографии  $ts^{-1} : s_L^\times \rightarrow t_L^\times$ , которая является композицией гомографии  $t : L \rightarrow t_L^\times$  и гомографии, обратной к  $s : L \rightarrow s_L^\times$ . Согласно предл. 5.2 на стр. 59 ГМТ пересечения таких соответственных прямых является коникой, проходящей через точки  $s_L$  и  $t_L$ . Мы будем называть её *коникой полюсов* прямой  $\ell$  относительно пучка коник  $L$  и обозначать  $C(\ell, L)$ .

Упражнение 7.4. Убедитесь, что если прямая  $\ell$  не проходит через особые точки коник пучка  $L$ , то коника полюсов  $C(\ell, L)$  является гладкой.

Для простого пучка  $L$  с базисными точками  $a, b, c, d$  и прямой  $\ell$ , которая не проходит через базисные точки и вершины ассоциированного с ними треугольника  $xuz$ , коника полюсов  $C(\ell, L)$  — это единственная гладкая коника, описанная вокруг  $\Delta xuz$  и проходящая через две неподвижные точки инволюции Дезарга<sup>3</sup>  $\sigma_L : \ell \rightarrow \ell$ , задаваемой пучком  $L$  на прямой  $\ell$ . Кроме этих пяти точек, коника полюсов проходит через такую точку  $p_{ab} \in (ab)$ , что  $[p_{ab}, \ell \cap (ab), a, b] = -1$  на прямой  $(ab)$ , так как эта точка по предл. 6.1 на стр. 70 сопряжена на прямой  $(ab)$  точке  $\ell \cap (ab)$  относительно любой гладкой коники, проходящей через  $a$  и  $b$ , и потому именно она является второй, отличной от  $x$  точкой пересечения прямой  $(ab)$  с коникой полюсов прямой  $\ell$ . По той же причине  $C(\ell, L)$  проходит ещё через пять аналогичных  $p_{ab}$  точек  $p_{uw} \in (uw)$ , отвечающих всевозможным двухэлементным подмножествам  $\{u, w\} \subset \{a, b, c, d\}$ . Поэтому такую конику полюсов называют ещё и *коникой одиннадцати точек* прямой  $\ell$  и четырёхвершинника  $abcd$ .

**7.3. Касательное пространство к проективной гиперповерхности.** Рассмотрим проективную гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{P}_n$ , заданную однородным многочленом  $f$  степени  $d$ , и не лежащую на ней прямую  $(ab) \subset \mathbb{P}_n$ , проходящую через точку  $a \in V(f)$ . Ограничение многочлена  $f$  на прямую  $(ab)$  является ненулевым однородным многочленом степени  $d$

$$f_{ab}(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda a + \mu b)$$

<sup>1</sup>Ср. с н° 5.3.2 на стр. 64.

<sup>2</sup>Ср. с доказательством лем. 7.2 на стр. 85.

<sup>3</sup>См. прим. 7.1 на стр. 87.

от однородной координаты  $(\lambda : \mu)$  на прямой  $(ab)$ , и точка  $a = (1 : 0)$  является его корнем. Кратность этого корня называется *кратностью пересечения* прямой  $(ab)$  с гиперповерхностью  $V(f)$  в точке  $a$ . Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждая не лежащая на гиперповерхности  $V(f)$  прямая пересекает эту гиперповерхность ровно по  $d$  точкам, учитываемым с кратностями, равными кратностям пересечения прямой и гиперповерхности в этих точках.

Прямая  $(ab)$  называется *касательной* к гиперповерхности  $V(f)$  в точке  $a \in V(f)$ , если она лежит на этой гиперповерхности или пересекает её в точке  $a$  с кратностью  $\geq 2$ . Объединение всех прямых, касающихся гиперповерхности  $V(f)$  в точке  $a \in V(f)$ , называется *касательным пространством* к гиперповерхности  $f$  в точке  $a$  и обозначается  $T_a V(f)$ .

Минимальная из кратностей пересечений гиперповерхности  $V(f)$  со всевозможными проходящими через точку  $a \in V(f)$  прямыми называется *кратностью точки  $a$*  на гиперповерхности  $V(f)$ . Если она равна единице, точка  $a$  называется *гладкой*, если больше единицы — *особой*. Таким образом, особость точки  $a \in V(f)$  равносильна тому, что  $T_a V(f) = \mathbb{P}_n$ .

ЛЕММА 7.3

Точка  $a \in V(f)$  особа если и только если все частные производные от многочлена  $f$  зануляются в точке  $a$ . Если точка  $a$  не особа, то касательное пространство  $T_a V(f)$  является проективным подпространством коразмерности 1 и задаётся однородным линейным уравнением

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot x_i = 0.$$

Доказательство. По формуле Тейлора ограничение многочлена  $f$  на прямую  $(ab)$  имеет в аффинной окрестности точки  $a$  вид

$$f(a + tb) = f(a) + t \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i + \text{члены, делящиеся на } t^2.$$

Точке  $a$  отвечает корень  $t = 0$ . Он кратный тогда и только тогда, когда  $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i = 0$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Убедитесь, что для квадрик критерий гладкости и описание касательного пространства из лем. 7.3 согласуются с определением гладкости из н° 4.3 на стр. 44 и описанием касательного пространства из н° 4.3.1.

**7.4. Гиперповерхность особых квадрик.** Множество всех особых квадрик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  образует в пространстве квадрик  $\mathbb{P}(S^2 V^*)$  алгебраическую гиперповерхности степени  $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2 V^* \mid \det(q) = 0\}. \quad (7-5)$$

Предложение 7.2

Особая квадрика  $S \in \Sigma$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$  если и только если сама квадрика  $S \subset \mathbb{P}(V)$  имеет единственную особую точку  $s \in S$ , и в этом случае касательное пространство  $T_s \Sigma \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  состоит из всех квадрик  $Q \subset \mathbb{P}(V)$ , проходящих через точку  $s$ .

Доказательство. Пусть  $S = V(f)$ . Для любой квадрики  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  ограничение многочлена  $\det$  на прямую  $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  имеет в аффинной окрестности точки  $S$  вид<sup>1</sup>

$$0 = \det(f + tq) = \det(f) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

<sup>1</sup>См. прим. 3.2 на стр. 33.

где  $f_{ij}^\vee$  означает алгебраическое дополнение к  $(ij)$ -тому элементу матрицы Грама квадратичной формы  $f$ . Квадрика  $S$  отвечает корню  $t = 0$ . Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{ij} q_{ij} f_{ij}^\vee = 0. \quad (7-6)$$

Это линейное уравнение на  $q$  нетривиально если и только если в матрице Грама  $F = (f_{ij})$  имеется хоть один ненулевой минор порядка  $n$ , т. е. когда  $\dim \ker F = 1$ . Каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы  $F^\vee = (f_{ij}^\vee)$  лежит в ядре матрицы  $F$ , поскольку  $F F^\vee = F^\vee F = \det(F) E = 0$ . Таким образом,  $\text{rk } F^\vee = 1$ , и все строки и все столбцы симметричной матрицы  $F^\vee$  пропорциональны однородным координатам особой точки

$$s = (s_0 : s_1 : \dots : s_n) = (f_{i_0}^\vee : f_{i_1}^\vee : \dots : f_{i_n}^\vee) = (f_{0j}^\vee : f_{1j}^\vee : \dots : f_{nj}^\vee)$$

квадрики  $S$ . Это означает, что с точностью до умножения на независимую от  $i, j$  константу  $f_{ij}^\vee = s_i s_j$ , и условие касания (7-6) превращается в равенство  $\sum_{ij} q_{ij} s_i s_j = q(s) = 0$ , т. е. в условие прохождения квадрики  $Q$  через точку  $s$ .  $\square$

Следствие 7.1

Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$  касается гиперповерхности особых квадрик  $\Sigma$  в точке  $Q \in \Sigma$  если и только если  $P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ . Если же  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то прямая  $(PQ)$  лежит на  $\Sigma$ .

Доказательство. Если  $Q$  является гладкой точкой гиперповерхности  $\Sigma$ , то первое утверждение является переформулировкой предл. 7.2. Если точка  $Q \in \Sigma$  особа, то  $\dim \text{Sing } Q \geq 1$ , и любая лежащая в  $\text{Sing } Q$  прямая пересекает любую квадрику  $P$ , а любая прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $Q$ , т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$ , то все квадрики пучка  $(PQ)$  особые в точках пересечения  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q$ , поскольку ненулевой вектор, лежащий в ядре корреляций, отвечающих квадрикам  $P$  и  $Q$ , лежит в ядре и любой линейной комбинации этих корреляций.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Приведите пример пучка  $L$  особых коник, в котором  $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q = \emptyset$  для всех  $P, Q \in L$ .

ПРИМЕР 7.3 (КЛАССИФИКАЦИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПУЧКОВ КОНИК)

При  $n = 2$  особые коники на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  образуют кубическую гиперповерхность в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$

$$\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}.$$

Гладкими точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются распавшиеся коники, а особыми точками гиперповерхности  $\Sigma$  являются двойные прямые. Прямая общего положения  $L \subset \mathbb{P}_5$  трансверсально пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  в трёх её гладких точках и представляет собою простой пучок коник, как на рис. 7◊5 на стр. 86. Если прямая  $L$  касается  $\Sigma$  в гладкой точке  $S = \ell_1 \cup \ell_2$ , то она либо больше нигде не пересекает  $\Sigma$ , и в этом случае кратность пересечения  $\Sigma$  с  $L$  в точке  $S$  равна 3, либо пересекает  $\Sigma$  с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками коник, представленными на рис. 7◊2 на стр. 84 и рис. 7◊4 на стр. 86, причём точке касания  $L$  с  $\Sigma$  всегда отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Если прямая  $L$  проходит через особую точку  $S = 2\ell$  гиперповерхности  $\Sigma$ , возникает та же альтернатива: если кратность пересечения  $\Sigma$  и  $L$  в точке  $S$  равна 3, то  $L$  больше нигде не пересекает  $\Sigma$  и выгладит как на рис. 7◊1 на стр. 84, если же эта кратность 2, то  $L$  пересекает  $\Sigma$  ещё ровно в одной гладкой точке с кратностью 1, как на рис. 7◊3 на стр. 85.

**7.5. Регулярные пучки квадрик.** Невырожденный пучок квадрик  $(Q_0 Q_1)$  на  $\mathbb{P}_n$  называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадрики, т. е. когда

$$\dim \text{Sing}(Q_\lambda) = \text{mult}(\lambda) - 1 \quad \text{для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1.$$

Это означает, что ранг матрицы Грама  $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$  в каждой точке  $\lambda \in \mathbb{P}_1$  падает в точности на кратность корня  $t = \lambda$  характеристического многочлена  $\chi_{q_0, q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$ . Из всех рассмотренных в н° 7.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 7◊5 и рис. 7◊3.

**ТЕОРЕМА 7.1**

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  для любого регулярного пучка квадрик в  $\mathbb{P}(V)$  найдётся такой базис пространства  $V$ , в котором матрицы Грама всех квадрик из пучка одновременно диагональны.

*Доказательство.* Пусть пучок порождается квадриками  $V(g)$  и  $V(f)$ , где форма  $g$  неособа. Следуя рецепту из н° 1.3.4 на стр. 11, сопоставим форме  $f$  автодуальный<sup>1</sup> относительно скалярного произведения  $\tilde{g}$  на  $V$  линейный оператор  $\varphi = \hat{g}^{-1}\hat{f}: V \rightarrow V$ , однозначно задающийся тем, что  $\tilde{g}(u, \varphi w) = \tilde{f}(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ . Поскольку матрица  $\Phi$  оператора  $\varphi$  выражается через матрицы Грама  $G, F$  квадратичных форм  $g, f$  по формуле  $\Phi = G^{-1}F$ , характеристический многочлен  $\chi_\varphi(t) = \det(tE - \Phi) = \det(tE - G^{-1}F) = \det G^{-1} \det(tG - F)$  оператора  $\varphi$  связан с характеристическим многочленом  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1) = \det(t_0 G + t_1 F)$  пучка квадрик по формуле

$$\chi_\varphi(t) = \det G^{-1} \cdot \chi_{(fg)}(-t_0/t_1, 1).$$

Поэтому квадратичная форма  $F - \lambda G$  вырождена если и только если число  $\lambda \in \mathbb{k}$  является собственным значением оператора  $\varphi$ . Так как ранг матрицы  $\lambda G - F$  равен рангу матрицы  $\lambda E - \Phi = G^{-1}(\lambda G - F)$ , размерность собственного подпространства  $V_\lambda = \ker(\lambda E - \Phi)$  оператора  $\varphi$  совпадает с размерностью ядра квадратичной формы  $F - \lambda G$ , которая по условию теоремы в точности равна кратности корня  $(t_0 : t_1) = (-\lambda : 1)$  многочлена  $\chi_{(gf)}(t_0, t_1)$ . Таким образом, сумма размерностей собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$  равна  $\dim V$ . Поскольку по лем. 2.3 на стр. 25 все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно скалярного произведения  $\tilde{g}$ , пространство  $V$  является  $\tilde{g}$ -ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $V_\lambda$  оператора  $\varphi$ . Выбирая в каждом подпространстве  $V_\lambda$  ортогональный базис квадратичной формы  $g$ , мы получаем в  $V$  базис, где обе формы  $g$  и  $f$  имеют диагональные матрицы Грама, причём на диагонали матрицы  $F$  будут стоять собственные значения оператора  $f$  или, что то же самое, взятые с обратным знаком характеристические числа  $t_0/t_1$  пучка  $(GF)$ . Все формы  $\lambda g + \mu f$  также будут диагональны в этом базисе.  $\square$

**Следствие 7.2 (из доказательства теор. 7.1)**

Если квадратичная форма  $f$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$  имеет диагональную матрицу Грама в ортонормальном базисе невырожденной квадратичной формы  $g$ , то диагональные элементы этой матрицы суть собственные числа линейного оператора  $\varphi = \hat{g}^{-1}\hat{f}: V \rightarrow V$ , который однозначно задаётся тем, что  $\tilde{f}(u, w) =$

<sup>1</sup>См. н° 2.4 на стр. 25.

$\tilde{g}(u, \varphi w)$  для всех  $u, w \in V$ . При этом сам базис состоит из собственных векторов оператора  $\varphi$ , и количество появлений каждого собственного числа на диагонали матрицы Грама равно размерности соответствующего собственного подпространства. В частности, диагональная матрица Грама формы  $f$  с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора базиса, одновременно ортонормального для  $g$  и ортогонального для  $f$ .

#### ТЕОРЕМА 7.2

Два регулярных пучка квадрик в  $\mathbb{P}_n$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом<sup>1</sup>  $\mathbb{P}_n$  если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из  $n$  не обязательно различных точек на  $\mathbb{P}_1$ , переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$ .

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадрику  $V(g')$  и рассмотрим в  $V$  базис  $e'$ , в котором все квадрики первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы  $g'$  стала единичной. Рассмотрим любую отличную от  $g'$  форму  $f'$  из первого пучка и обозначим через  $F'$  её матрицу Грама в базисе  $e'$ . В доказательстве теор. 7.1 мы видели, что диагональные элементы матрицы  $F'$  являются корнями многочлена  $\det(tE - F')$ , т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм  $g''$ ,  $f''$ , что корни многочлена  $\chi_{g''f''}(t, 1)$  совпадают с корнями многочлена  $\det(tE - F')$ . Из этого вытекает, что форма  $g''$  невырождена, и в пространстве  $V$  существует базис  $e''$ , в котором матрица Грама формы  $g''$  единичная, а форма  $f''$  имеет диагональную матрицу  $F''$  с диагональными элементами, равными корням многочлена  $\det(tE - F')$ . Таким образом, матрица  $F''$  в базисе  $e''$  совпадает с матрицей  $F'$  в базисе  $e'$ . Проективный изоморфизм  $\mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$ , переводящий базис  $e'$  в базис  $e''$ , преобразует базисные квадратичные формы  $g'$ ,  $f'$  первого пучка в базисные квадратичные формы  $g''$ ,  $f''$  второго. Следовательно, он преобразует каждую форму  $\lambda g' + \mu f'$  первого пучка в форму  $\lambda g'' + \mu f''$  второго.  $\square$

#### ПРИМЕР 7.4 (ПРОСТЫЕ ПУЧКИ)

Пучок квадрик на  $\mathbb{P}_n$  называется *простым*, если его спектр состоит из  $(n + 1)$  различных точек на  $\mathbb{P}_1$ . Таким образом, каждая особая квадрика простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадрики в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда  $n + 1$  точек на  $\mathbb{P}_1$ , отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом  $\mathbb{P}_1$  в  $n + 1$  точек, отвечающих особым квадрикам второго.

#### ТЕОРЕМА 7.3

Пучок квадрик  $(PQ)$  над алгебраически замкнутым полем прост если и только если его базисные квадрики пересекаются трансверсально, т. е.  $\text{codim } T_a P \cap T_a Q = 2$  в каждой точке  $a \in P \cap Q$ .

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  гиперповерхность особых квадрик<sup>2</sup>  $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$ . Прямая  $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$  пересекает гиперповерхность  $\Sigma$  меньше, чем по  $n + 1$  точкам, если и только если она касается  $\Sigma$  в одной из точек  $S \in (PQ) \cap \Sigma$ .

<sup>1</sup>Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм  $\mathbb{P}_n$ , который биективно отображает квадрики одного пучка на квадрики второго.

<sup>2</sup>См. формулу (7-5) на стр. 89.

Нетрансверсальность пересечения квадрик  $P = V(f)$  и  $Q = V(q)$  в точке  $a \in P \cap Q$  означает, что ковекторы  $\hat{f}(a)$  и  $\hat{q}(a)$  пропорциональны<sup>1</sup>. В этом случае все ковекторы  $\hat{h}(a)$  с  $\hat{h} = \lambda\hat{p} + \mu\hat{q}$  пропорциональны друг другу, т. е. любые две квадрики из пучка  $(PQ)$  пересекаются в точке  $a$  не трансверсально, и пучок содержит квадрику  $S = V(h)$  с  $\hat{h}(a) = \lambda\hat{f}(a) + \mu\hat{q}(a) = 0$ , т. е. с  $a \in \text{Sing } S$ . Тогда  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$  по сл. 7.1. Значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая  $(PQ)$  касается гиперповерхности  $\Sigma$  в точке  $S$ , то  $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$  и пересечение  $P \cap S$  не трансверсально во всех точках из  $P \cap \text{Sing } S$ . Но тогда и пересечение  $P \cap Q$  тоже не трансверсально в этих же точках в силу сделанного выше замечания.  $\square$

---

<sup>1</sup>При этом один из них (но не оба) может обратиться в нуль — это означает, что одна из квадрик особа в точке  $a$ .

## §8. Конформная геометрия вещественных коник

**8.1. Комплексная проективизация вещественной плоскости.** Рассмотрим вещественную координатную плоскость  $V = \mathbb{R}^2$  со стандартными координатами  $(x_1, x_2)$  как множество вещественных точек комплексной координатной плоскости  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ , вложенной в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$  в комплексную проективную плоскость  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  этой карты обозначим через  $\ell_{\infty}$  и будем называть *бесконечностью*. Она естественно отождествляется с проективизацией  $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ , и её точки являются *направлениями*<sup>1</sup> лежащих в карте  $U_0$  аффинных прямых в том смысле, что проходящая через точку  $p \in U_0$  вдоль вектора  $v \in V_{\mathbb{C}}$  аффинная прямая  $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$  является видимой в карте  $U_0$  аффинной частью проективной прямой  $(pv) \subset \mathbb{P}_2$ , где  $v \in V$  рассматривается как точка бесконечно удалённой прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ .

На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  имеется  $\mathbb{C}$ -антилинейная<sup>2</sup> инволюция *комплексного сопряжения*  $\sigma : (x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$ . Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники и сохраняет стандартную аффинную карту  $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ , действуя на ней комплексно полуаффинным<sup>3</sup> вещественно аффинным преобразованием. Точки, прямые и коники, которые переводятся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая  $x_0 = 0$  и коника  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  вещественны. Обратите внимание, что вещественная фигура запросто может не иметь ни одной вещественной точки.

Поскольку линейное уравнение, задающее прямую, и квадратичное уравнение, задающее гладкую конику, однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число определяются этими геометрическими фигурами, вещественность прямой или коники означает, что каждый коэффициент  $a$  её уравнения удовлетворяют соотношению  $a = \lambda \bar{a}$  с одним и тем же для всех коэффициентов  $a$  ненулевым множителем  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Так как  $|\bar{a}_i| = |a_i|$ , мы заключаем, что  $|\lambda| = 1$ . Полагая  $\lambda = \vartheta^2$ , видим, что  $\vartheta a_i \in \mathbb{R}$ . Таким образом, вещественность прямой или коники на  $\mathbb{P}_2$  равносильна тому, что в стандартных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  эти фигуры можно задать уравнениями с вещественными коэффициентами.

**8.1.1. Конформная структура.** Евклидово скалярное произведение на  $V = \mathbb{R}^2$ , рассматриваемое с точностью до умножения на ненулевую константу, называется *конформной структурой* на вещественной плоскости  $V$ . Конформная структура не позволяет определить длину вектора, но позволяет определить угол  $\vartheta = \angle(u, w) \in [0, \pi/2]$  между прямыми с направляющими векторами  $u, w \in V$  по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|(u, w)|}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}, \quad (8-1)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее слово *направление* используется как синоним словосочетания «ненулевой вектор из пространства  $V_{\mathbb{C}}$ , рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы» и означает точку на прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ .

<sup>2</sup>Т. е.  $\sigma(u + w) = \sigma(u) + \sigma(w)$  для всех  $u, w \in \mathbb{C}^3$ , но  $\sigma(zv) = \bar{z}\sigma(v)$  для всех  $z \in \mathbb{C}$  и  $v \in \mathbb{C}^3$ .

<sup>3</sup>Напомню, что отображение  $A(V) \rightarrow A(V)$  называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. При  $\dim V \geq 2$  любое полуаффинное отображение  $f : A(V) \rightarrow A(V)$  действует по правилу  $x \mapsto f(a) + df(\bar{a}x)$ , где  $a \in A(V)$  — произвольно выбранная «начальная» точка, а  $df : V \rightarrow V$  — *полулинейный* оператор, удовлетворяющий для всех  $u, w \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$  равенству  $df(\lambda u + \mu w) = \varphi(\lambda) df(u) + \varphi(\mu) df(w)$ , где  $\varphi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$  — некоторый автоморфизм основного поля. Подробнее об этом см. в лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_02.pdf), раздел 2.5 на стр. 29.

правая часть которой не меняется ни при замене скалярного произведения на пропорциональное, ни при умножении векторов на ненулевые константы. Геометрически, это наименьший из двух смежных углов между прямыми, параллельными векторам  $u$  и  $w$ .

С токи зрения комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  конформная структура представляет собою гладкую вещественную квадрику  $I = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid (v, v) = 0\}$  на бесконечно удалённой прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ , где  $(*, *) : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  означает продолжение евклидова скалярного произведения на  $V$  до комплексной билинейной формы на  $V_{\mathbb{C}}$ .

Упражнение 8.1. Убедитесь, что такое продолжение существует и единственно.

Поскольку евклидово скалярное произведение анизотропно над  $\mathbb{R}$ , квадрика  $I$  не имеет вещественных точек и состоит из двух различных комплексно сопряжённых точек. Мы будем называть квадрику  $I$  *абсолют* конформной структуры. Всюду далее мы предполагаем, что стандартный базис в  $\mathbb{R}^2$  является ортонормальным для евклидова скалярного произведения. В этом случае абсолют  $I$  задаётся в стандартных однородных координатах  $(x_1 : x_2)$  на  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$  уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  и состоит из двух точек

$$\iota_+ = (i : 1) = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (-i : 1) = (1 : i), \quad (8-2)$$

которые мы будем называть *абсолютными направлениями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1 (ЕВКЛИДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ)

Сопоставление направлению  $v$  евклидово перпендикулярного направления  $v^{\perp}$  задаёт на прямой  $\ell_{\infty}$  комплексно линейную инволюцию с неподвижными точками  $\iota_{\pm}$ , которая называется *перпендикулярностью*. Таким образом, равенство  $(u, w) = 0$  в  $V_{\mathbb{C}}$  равносильно гармоничности направлений  $u, w \in \ell_{\infty}$  абсолютным направлениям (8-2).

ПРИМЕР 8.1 (УГОЛ КАК ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ)

Любые два вещественных направления  $u, w \in \ell_{\infty}$  однозначно записываются в виде

$$u = \iota_+ + \lambda \iota_-, \quad w = \iota_+ + \mu \iota_-$$

с ненулевыми  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Так как  $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$ , а  $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$ , угол  $\vartheta = \angle(u, w)$  согласно формуле (8-1) удовлетворяет соотношению

$$\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Поскольку  $\mu/\lambda = [u, w, \iota_+, \iota_-]$  по упр. 5.4 на стр. 62, и для вещественных  $u, w$

$$\overline{[u, w, \iota_+, \iota_-]} = [\bar{u}, \bar{w}, \bar{\iota}_+, \bar{\iota}_-] = [u, w, \iota_-, \iota_+] = [u, w, \iota_+, \iota_-]^{-1},$$

мы заключаем, что двойное отношение  $[u, w, \iota_+, \iota_-] \in \mathbb{C}$  лежит на единичной окружности и равно  $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu/\lambda = e^{2i\vartheta}$ . Таким образом, евклидов угол  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  между вещественными направлениями  $u, w \in \ell_{\infty}$  равен половине абсолютной величины аргумента их двойного отношения с абсолютными направлениями:  $\vartheta = \frac{1}{2} |\text{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]| = \frac{1}{2} |i \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]|$ .

**8.2. Гладкие непустые вещественные коники.** Гладкая непустая вещественная коника  $C \subset \mathbb{P}_2$  называется *параболой*, если она касается прямой  $\ell_\infty$ , и называется *гиперболой* или *эллипсом*, если она пересекает прямую  $\ell_\infty$  по двум различным, соответственно, вещественным или комплексно сопряжённым друг другу точкам. Точки пересечения  $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$  называются *асимптотическими направлениями* коники  $C$ . Таким образом, парабола имеет ровно одно, автоматически вещественное асимптотическое направление, которое также называют *направлением оси параболы*. Это же направление является полюсом прямой  $\ell_\infty$  относительно параболы, см. рис. 8◊1. Гипербола имеет два различных вещественных асимптотических направления, а эллипс — два различных комплексно сопряжённых друг другу асимптотических направления, см. рис. 8◊2.

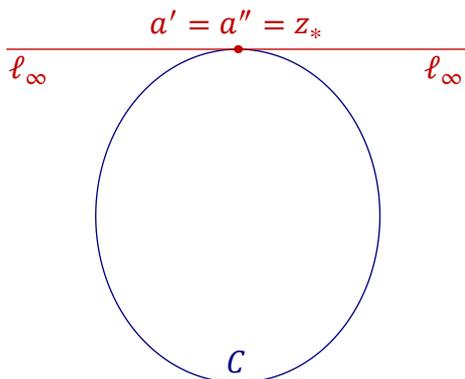


Рис. 8◊1. Парабола.

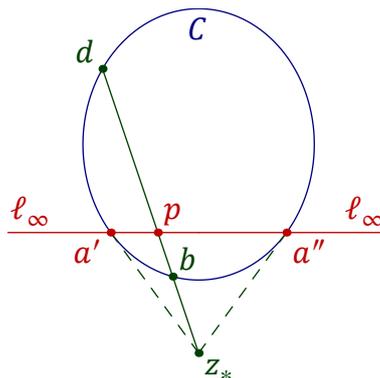


Рис. 8◊2. Центральная коника.

Полюс  $z_*$  прямой  $\ell_\infty$  относительно не являющейся параболой коники  $C$  называется *центром* коники  $C$ . Он лежит в евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  и является центром симметрии аффинной части коники, так как по предл. 6.1 на стр. 70 на любой проходящей через  $z_*$  прямой, пересекающей конику  $C$  в точках  $b, d$ , а прямую  $\ell_\infty$  — в точке  $p$ , двойное отношение  $[p, z_*, b, d] = -1$ , т. е.  $z_*$  является серединой отрезка  $[b, d]$  в аффинной карте, где  $p = \infty$ . По этой причине эллипсы и гиперболы в совокупности называются *центрными кониками*. Проходящие через центр прямые называются *диаметрами* центральной коники  $C$ . Касательные диаметры ( $z_*a'$ ) и ( $z_*a''$ ), идущие из центра в асимптотических направлениях, называются *асимптотами*. Гипербола имеет вещественные асимптоты, эллипс — невещественные комплексно сопряжённые.

**Упражнение 8.2.** Покажите, что любой диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные<sup>1</sup> сопряжённому диаметру.

Если коника  $C$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе в  $\mathbb{R}^2$  неоднородным уравнением

$$f(x_1, x_2) = \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\beta_{01}x_1 + 2\beta_{02}x_2 + \beta_{00} = 0, \quad (8-3)$$

то её проективное замыкание<sup>2</sup> имеет в однородных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  матрицу Грама

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (8-4)$$

<sup>1</sup>По определению, прямые *параллельные* данной  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  суть все прямые из пучка с центром в точке  $\ell \cap \ell_\infty$ , за исключением самих прямых  $\ell$  и  $\ell_\infty$ .

<sup>2</sup>См. п.° 4.4.2 на стр. 49.

Невырожденность коники  $C$  означает, что  $\det B \neq 0$ , а непустота — что сигнатура отлична от  $(3, 0)$  и  $(0, 3)$ , т. е. что последовательность знаков главных нижних угловых миноров

$$\Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{22}, \quad \Delta_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2, \quad \Delta_{012} \stackrel{\text{def}}{=} \det B$$

отлична от  $+++$  и  $-+-$ . Асимптотические направления  $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$  коники  $C$  суть корни однородной квадратной формы от  $(x_1, x_2)$  с матрицей Грама

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (8-5)$$

Гладкая непустая вещественная коника  $C$  является эллипсом, параболой или гиперболой если и только если определитель<sup>1</sup>  $\Delta_{12} = \det B_\infty$ , соответственно, положителен, равен нулю или отрицателен. Однородные координаты полюса  $z_* = (z_0 : z_1 : z_2)$  бесконечно удалённой прямой  $x_0 = 0$  удовлетворяет уравнению  $(z_0 : z_1 : z_2)B = (1 : 0 : 0)$ , т. е. пропорциональны первой строке присоединённой матрицы  $B^\vee$  к матрице Грама  $B$  коники  $C$ :

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\Delta_{12} : \beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (8-6)$$

Для центральной коники эта формула позволяет найти аффинные координаты центра в карте  $U_0$ :

$$(z_1, z_2) = \left( \frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}} \right). \quad (8-7)$$

Для параболы  $\Delta_{12} = 0$ , и формула (8-7) даёт координаты направления оси параболы:

$$(x_1 : x_2) = (\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (8-8)$$

**8.2.1. Окружности.** Сопряжение<sup>2</sup> относительно центральной коники  $C$  задаёт на прямой  $\ell_\infty$  инволюцию, неподвижными точками которой являются асимптотические направления коники  $C$ . Если эта инволюция совпадает с перпендикулярностью<sup>3</sup>, что равносильно совпадению асимптотических направлений коники  $C$  с абсолютными направлениями<sup>4</sup>  $\iota_\pm$ , то коника  $C$  называется *окружностью*. Это определение согласуется со школьным: проективное замыкание «школьной» окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  задаётся на  $\mathbb{P}_2$  однородным уравнением  $(x_1 - c_1x_0)^2 + (x_2 - c_2x_0)^2 = r^2x_0^2$  и пересекает бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  в точности по абсолютности  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ; наоборот, выбирая на непустой гладкой вещественной конике  $C$  три неколлинеарных вещественных точки  $p_1, p_2, p_3$ , видим, что если такая коника проходит через точки  $\iota_\pm$ , то она совпадает со «школьной» окружностью, проходящей через точки  $p_1, p_2, p_3$ , поскольку через пять точек проходит ровно одна гладкая коника.

**8.2.2. Главные оси центральной коники.** Если центральная коника  $C$  не является окружностью, то согласно сл. 5.4 на стр. 67 существует ровно два направления  $x_*, y_* \in \ell_\infty$ , одновременно перпендикулярные друг другу и сопряжённые относительно коники  $C$ . Эти направления автоматически различны, поскольку равенство  $x_* = y_*$  означает, что эта точка совпадает с

<sup>1</sup>Противоположный по знаку дискриминанту бинарной квадратичной формы с матрицей Грама  $B_\infty$ , см. прим. 2.1 на стр. 22 и прим. 4.6 на стр. 44.

<sup>2</sup>См. п° 6.1.2 на стр. 70.

<sup>3</sup>См. опр. 8.1 на стр. 95.

<sup>4</sup>См. формулу (8-2) на стр. 95.

одной из точек  $\iota_{\pm}$ , а вещественная коника, проходящая через одну из точек  $\iota_{\pm}$  автоматически проходит и через комплексно сопряжённую ей другую точку, а значит, является окружностью.

Перпендикулярные сопряжённые друг другу относительно  $C$  направления называются *главными осями* коники  $C$ . Их легко найти явно: если  $x_* = (x_1 : x_2)$ , то  $y_* = (-x_2 : x_1)$  в силу перпендикулярности, а сопряжённость относительно  $C$  означает, что

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = b_{12}x_1^2 - (b_{11} - b_{22})x_1x_2 - b_{12}x_2^2, \quad (8-9)$$

откуда

$$x_* = (\beta_{11} - \beta_{22} + \sqrt{D} : 2b_{12}), \quad y_* = (\beta_{11} - \beta_{22} - \sqrt{D} : 2b_{12}), \quad (8-10)$$

где  $D = (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.3. Убедитесь, что  $x_*$  и  $y_*$  являются собственными векторами матрицы  $B_{\infty}$  из формулы (8-5) с собственными числами, соответственно, равными<sup>1</sup>

$$\alpha = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{D}}{2}.$$

Поскольку центр  $z_*$  является полюсом прямой  $\ell_{\infty} = (x_*y_*)$ , треугольник  $\Delta x_*y_*z_*$  автополярен относительно коники  $C$ . Таким образом, матрица Грама коники  $C$  в базисе  $x_*, y_*, z_*$  диагональна, и в аффинном координатном репере карты  $U_0$  с началом в точке  $z_*$  и евклидово перпендикулярными базисными векторами  $x_*$  и  $y_*$  коника  $C$  задаётся неоднородным уравнением вида

$$ax^2 + by^2 = 1$$

где  $a = -f(x_*)/f(z_*)$ ,  $b = -f(y_*)/f(z_*)$ , а  $f(x_1, x_2)$  — исходный неоднородный многочлен (8-3), задающий конику  $C$ .

**8.3. Геометрия центральных коник.** Точка  $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \ell_{\infty}$  называется *фокусом* центральной коники  $C \subset \mathbb{P}_2$ , если обе прямые  $(f\iota_+)$  и  $(f\iota_-)$  касаются коники  $C$ . Поляры фокусов относительно коники  $C$  называются *директрисами* этой коники. Таким образом, центральная коника имеет четыре различных фокуса, см. рис. 8◊3 на стр. 99. Комплексное сопряжение переставляет между собою абсолютные направления  $\iota_{\pm}$  и переводит касательные  $\ell_1, \ell_2$ , опущенные на  $C$  из  $\iota_+$ , в касательные  $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$ , опущенные из  $\iota_- = \bar{\iota}_+$ . Поэтому фокусы  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_1$  и  $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_2$  вещественны, а фокусы  $f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_2$  и  $f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_1$  невещественны и комплексно сопряжены друг другу. Обозначим через  $\Delta x_*y_*z_*$  треугольник, ассоциированный с вписанным в конику  $C$  четырёхвершинником, который образован точками касания с коникой четырёх фокальных касательных, опущенных из точек  $\iota_{\pm}$ . Согласно предл. 7.1 на стр. 87 этот треугольник автополярен относительно коники  $C$ . Поскольку точка  $x_*$  лежит на полярах фокусов  $f_3$  и  $f_4$ , прямая  $(f_3f_4)$  является полярной точки  $x_*$  и, значит, совпадает с прямой  $(y_*z_*)$ . По той же причине прямая  $(f_1f_2)$  совпадает с прямой  $(x_*z_*)$ , а прямая  $(\iota_+\iota_-) = \ell_{\infty}$  — с прямой  $(x_*y_*)$ , см. рис. 8◊3. Таким образом, прямые  $(f_1f_2)$  и  $(f_3f_4)$  пересекаются в центре  $z_*$  коники  $C$  и пересекают бесконечность в точках  $x_* = \ell_{\infty} \cap (f_1f_2)$  и  $y_* = \ell_{\infty} \cap (f_2f_3)$ , которые являются главными осями коники  $C$ , ибо

<sup>1</sup>Эти числа суть корни характеристического многочлена  $\lambda^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\lambda + \Delta_{12}$  матрицы  $B_{\infty}$ . Обратите внимание, что он имеет тот же дискриминант  $D = (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2$ , что и многочлен (8-9).

$[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$ , так как в пучке прямых с центром в фокусе  $f_1$  касательные прямые  $(f_1 l_+)$  и  $(f_1 l_-)$  гармоничны сопряжённым относительно  $C$  прямым  $(f_1 x_*)$  и  $(f_1 y_*)$ .

Упражнение 8.4. Покажите, что две прямые на  $\mathbb{P}_2$  тогда и только тогда сопряжены<sup>1</sup> относительно гладкой коники, когда они гармоничны в порождённом ими пучке прямых<sup>2</sup> двум прямым, касающимся этой коники.

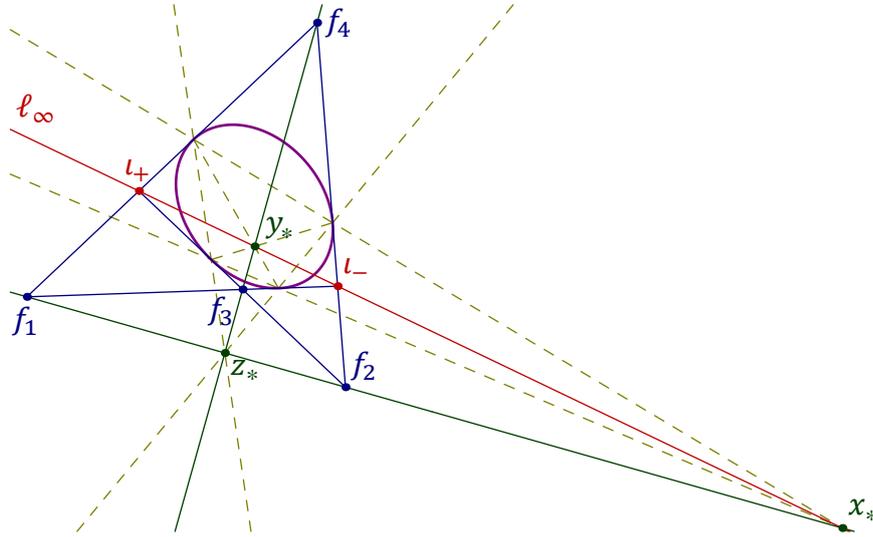


Рис. 8◊3. Фокусы, директрисы и главные оси центральной коники.

Упражнение 8.5. Покажите, что пересекающиеся в точке  $y_*$  пунктирные прямые на рис. 8◊3 проходят через фокусы  $f_1$  и  $f_2$ .

Пример 8.2

Центр и главные оси центральной коники, заданной аффинным уравнением

$$ax^2 + by^2 = 1, \quad \text{где } a > 0, \quad (8-11)$$

имеют однородные координаты  $z_* = (1 : 0 : 0)$ ,  $x_* = (0 : 1 : 0)$ ,  $y_* = (0 : 0 : 1)$ . Точка  $f = z_* + tx_* \in (z_* x_*)$  является фокусом если и только если ограничение однородного уравнения коники на прямую  $(f l_+)$  вырождено. Это ограничение имеет в базисе  $f, l_+$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 - 1 & iat \\ iat & b - a \end{pmatrix}$$

с определителем  $abt^2 + b - a$ , который зануляется при  $t = \pm\sqrt{a^{-1} - b^{-1}}$ . Таким образом, два лежащих на оси  $(z_* x_*)$  фокуса коники (8-11) имеют аффинные координаты  $(\pm\sqrt{a^{-1} - b^{-1}}, 0)$ . Симметричным образом, два лежащих на перпендикулярной оси  $(z_* y_*)$  фокуса имеют аффинные координаты  $(0, \pm\sqrt{b^{-1} - a^{-1}})$ . При  $b > a$  или  $b < 0$  первые два фокуса вещественны, а вторые — чисто мнимы и комплексно сопряжены, при  $0 < b < a$  всё наоборот. При  $b < 0$

<sup>1</sup>Напомним, что это означает, что каждая из них проходит через полюс другой, см. н° 6.1.2 на стр. 70.

<sup>2</sup>Т. е. в пучке прямых с центром в точке пересечения этих двух прямых.

коника (8-11) является гиперболой, при  $0 < b < a$  и  $b > a$  — эллипсом. При  $a = b$  коника превращается в окружность и все четыре фокуса сливаются с её центром. У эллипса и гиперболы, заданных на евклидовой плоскости своими стандартными аффинными уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вещественные фокусы располагаются так, как показано на рис. 8◊4 и рис. 8◊5.

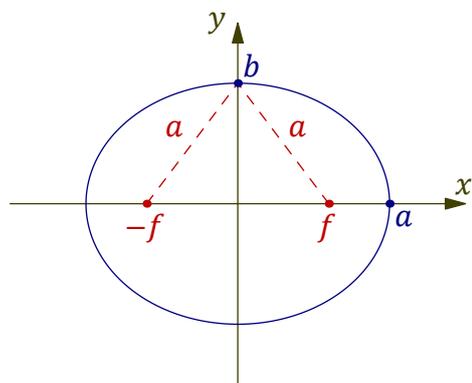


Рис. 8◊4. Вещественные фокусы эллипса.

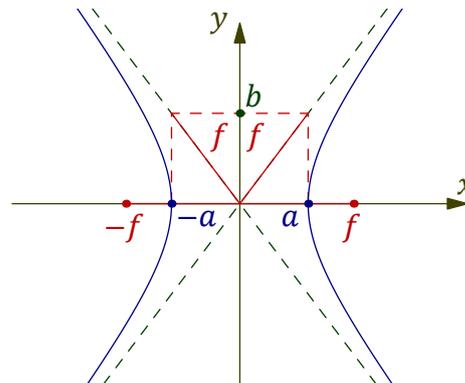


Рис. 8◊5. Вещественные фокусы гиперболы.

**8.3.1. Директор центральной коники.** Сопряжение относительно центральной коники  $C$  задаёт гомографию  $\delta_C : \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$  между пучками прямых с центрами в точках  $\iota_\pm$ . Она переводит прямую  $\ell \ni \iota_+$  в сопряжённую ей относительно  $C$  прямую  $\delta_C(\ell) \ni \iota_-$ , см. рис. 8◊6.

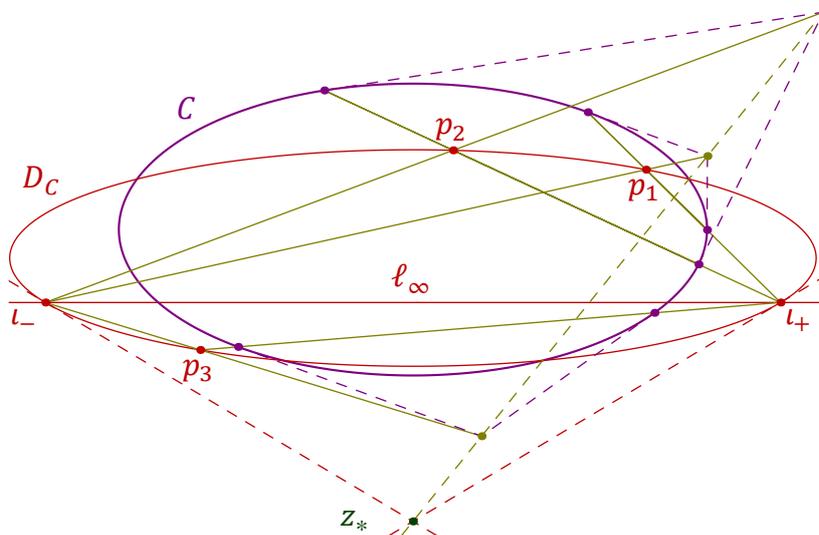


Рис. 8◊6. Директор центральной коники.

Пусть точка  $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$  является точкой пересечения соответственных прямых<sup>1</sup>. На пучке  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех проходящих через  $p$  прямых коника  $C$  также задаёт инволюцию, переставляющую

<sup>1</sup>На рис. 8◊6 показаны три такие точки:  $p_1, p_2$  и  $p_3$ .

между собою сопряжённые относительно  $C$  прямые. Неподвижными точками этой инволюции являются две опущенные из  $p$  на  $C$  касательные. Таким образом, сопряжённые относительно  $C$  прямые  $\ell, \delta_C(\ell) \in p^\times$  гармоничны<sup>1</sup> в пучке  $p^\times$  паре касательных, опущенных из точки  $p$  на конику  $C$ . Тем самым, эти касательные перпендикулярны. Наоборот, если точка  $p \in \mathbb{P}_2$  такова, что опущенные из неё на конику  $C$  касательные перпендикулярны, т. е. сопряжены прямым  $(p, \iota_+)$  и  $(p, \iota_-)$ , то последние две прямые сопряжены друг другу относительно коники  $C$ , т. е. переводятся друг в друга гомографией  $\delta_C: \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$ . Мы заключаем, что ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \delta_C(\ell)$  совпадает с ГМТ  $p \in \mathbb{P}_2$ , из которых коника  $C$  видна под прямым углом. Согласно предл. 5.2 на стр. 59, ГМТ пересечения соответственных прямых неперспективной гомографии между двумя пучками прямых является гладкой коникой, проходящей через центры пучков, как на рис. 8◊6. Поскольку в нашем случае центрами пучков служат точки  $\iota_\pm$ , эта коника — окружность. Она называется директором центральной коники  $C$  и обозначается  $D_C$ . В доказательстве предл. 5.2 мы видели, что  $\delta_C(\ell_\infty) = T_{\iota_-}D_C$  и  $\delta_C(T_{\iota_+}D_C) = \ell_\infty$ . Поэтому обе пары прямых  $\ell_\infty, T_{\iota_+}D_C$  и  $\ell_\infty, T_{\iota_-}D_C$  гармоничны касательным, опущенным на конику  $C$  из точек  $\iota_\pm$ . Тем самым, прямая  $\ell_\infty$  сопряжена относительно коники  $C$  обоим касательным к окружности  $D_C$  в точках  $\iota_\pm$ . Следовательно, эти касательные пересекаются в полюсе  $z_*$  прямой  $\ell_\infty$  относительно коники  $C$ , т. е. у директора тот же центр, что у  $C$ .

Упражнение 8.6. Напишите явное уравнение директора  $D_C$  в главных осях коники  $C$ .

**8.3.2. Софокусные семейства центральных коник.** Гладкие вещественные коники с теми же самыми фокусами<sup>2</sup>, что и заданная гладкая центральная коника  $C$ , лежат в семействе комплексных коник на  $\mathbb{P}_2$ , касающихся фиксированных четырёх прямых — опущенных из точек  $\iota_\pm$  на конику  $C$  касательных, см. рис. 8◊3 на стр. 99. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в  $\mathbb{P}_2^\times$  образуют простой пучок  $F$  коник, проходящих через четыре точки, двойственные прямым

$$(\iota_+f_1) = (\iota_+f_4), \quad (\iota_+f_2) = (\iota_+f_3), \quad (\iota_-f_2) = (\iota_-f_4), \quad (\iota_-f_1) = (\iota_-f_3). \quad (8-12)$$

Три распавшиеся коники этого пучка суть объединения пар прямых, изображающих пучки прямых на  $\mathbb{P}_2$ , с центрами в точках  $\iota_\pm, f_{1,2}$  и  $f_{3,4}$ :

$$\iota_+^\times \cup \iota_-^\times, \quad f_1^\times \cup f_2^\times, \quad f_3^\times \cup f_4^\times. \quad (8-13)$$

Для любой точки  $p \in \mathbb{P}_2$  на пучке  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  проходящих через  $p$  прямых имеется инволюция Дезарга<sup>3</sup>  $\sigma_F: p^\times \simeq p^\times$ , которая задаётся пучком коник  $F$  и переставляет между собою проходящие через  $p$  прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  если и только если эти прямые касаются некоторой софокусной с  $C$  коники  $Q$ . Прямая  $\ell \ni p$  является неподвижной точкой инволюции  $\sigma_F$  если и только если она касается некоторой софокусной с  $C$  коники в точке  $p$ . Поскольку инволютивная гомография над полем  $\mathbb{C}$  имеет ровно две различные неподвижные точки<sup>4</sup>, через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусных с  $C$  коники  $C'_p, C''_p$ . Касательные к этим коникам прямые  $\ell' = T_p C'_p$  и  $\ell'' = T_p C''_p$ , будучи неподвижными точками инволюции Дезарга, гармоничны любой паре прямых, переставляемых этой инволюцией. Пересекая прямую  $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  с тремя распавшимися

<sup>1</sup>См. упр. 8.4 на стр. 99.

<sup>2</sup>Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

<sup>3</sup>См. прим. 7.1 на стр. 87.

<sup>4</sup>См. прим. 5.6 на стр. 66.

кониками (8-13) из пучка  $F$ , мы видим, что  $\sigma_F$  переставляет между собою пары прямых

$$(p\iota_+) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (p\iota_-), \quad (pf_1) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_2), \quad (pf_3) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_4).$$

Это приводит к равенству  $[\ell', \ell'', (p\iota_+), (p\iota_-)] = -1$ , означающему, что неподвижные прямые  $\ell'$  и  $\ell''$  перпендикулярны<sup>1</sup>. Тем самым, две проходящие через  $p$  софокусные  $C$  коники пересекаются в точке  $p$  под прямым углом, как на рис. 8◊7. Так как инволюция Дезарга сохраняет двойные отношения,  $[\ell', (pf_1), (p\iota_+), (p\iota_-)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_-), (p\iota_+)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_+), (p\iota_-)]$ , т. е. острые углы, которые прямая  $\ell'$  образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  равны друг другу в силу прим. 8.1 на стр. 95. По той же причине равны друг другу и острые углы, которые образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  прямая  $\ell''$ , а также острые углы, которые каждая из прямых  $\ell'$ ,  $\ell''$  образует с касательными, опущенными из точки  $p$  на любую софокусную с  $C$  конику. Иначе говоря, перпендикулярные касательные  $\ell'$ ,  $\ell''$  к двум проходящим через  $p$  софокусным с  $C$  коникам являются биссектрисами углов между прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$ , соединяющими точку  $p$  с вещественными фокусами, а также биссектрисами углов между двумя касательными прямыми, опущенными из  $p$  на любую не проходящую через  $p$  софокусную с  $C$  конику, см. рис. 8◊7. Эти факты известны как *фокальные свойства геометрической оптики*.

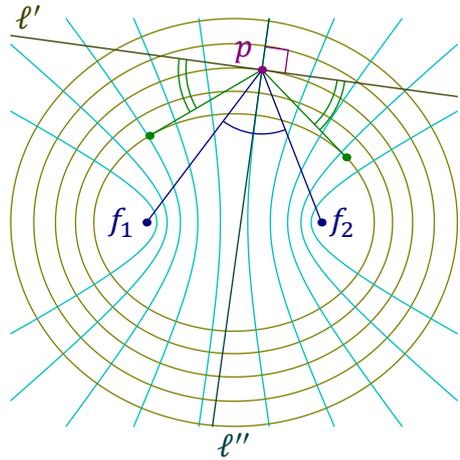


Рис. 8◊7. Софокусные центральные коники.

#### Предложение 8.1

Для любых точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с вещественными фокусами  $f_1, f_2$  угол между прямой  $(pf_1)$  и опущенной из  $p$  на  $C$  касательной равен углу между второй касательной и прямой  $(pf_2)$ .  $\square$

#### Предложение 8.2

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус.  $\square$

#### Пример 8.3

Если центральная коника  $C$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  задаётся каноническим уравнением  $ax^2 + by^2 = 1$ , то двойственная ей коника  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  имеет однородное уравнение<sup>2</sup>  $-x_0^2 + a^{-1}x_1^2 + b^{-1}x_2^2 = 0$ , а распавшаяся коника  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  — уравнение  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Натянутый на них пучок коник на  $\mathbb{P}_2^\times$  задаётся уравнением  $-x_0^2 + (a^{-1} + \lambda) \cdot x_1^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot x_2^2 = 0$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Двойственные им коники софокусной с  $C$  системы коник на  $\mathbb{P}_2$  имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = 1.$$

Упражнение 8.7. Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник софокусной системы одна является эллипсом, а другая — гиперболой.

<sup>1</sup>См. опр. 8.1 на стр. 95.

<sup>2</sup>См. предл. 6.2 на стр. 71.

**8.3.3. Гипербола Аполлония.** Для произвольных точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с центром в точке  $z_*$  обозначим через  $\varphi : z_*^\times \simeq p^\times$  гомографию пучка диаметров коники  $C$  в пучок прямых с центром в  $p$ , переводящую диаметр  $\ell \ni z_*$  в опущенный из точки  $p$  перпендикуляр  $\ell_p$  на сопряжённый к  $\ell$  относительно коники  $C$  диаметр  $\ell' \ni z_*$ , см. рис. 8◊8.

УПРАЖНЕНИЕ 8.8. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

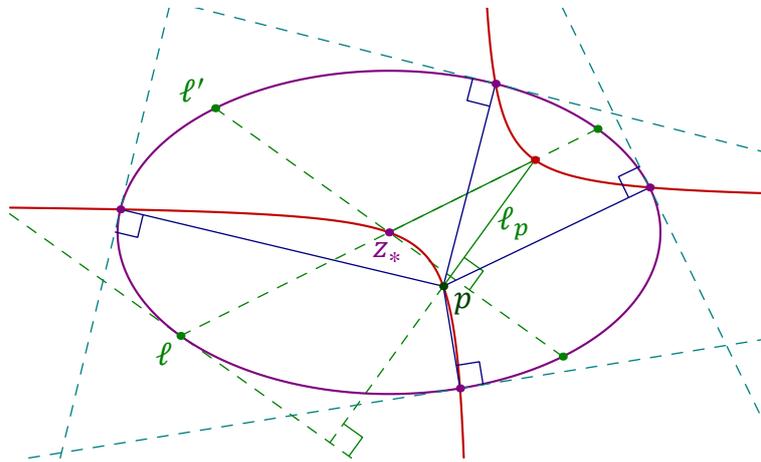


Рис. 8◊8. Гипербола Аполлония точки  $p$  относительно эллипса.

Согласно предл. 5.2 на стр. 59, ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \ell_p$  является коникой  $H$ , проходящей через центр коники  $C$  и точку  $p$ . Поскольку гомография  $\varphi$  переводит главные направления  $(z_*x_*)$  и  $(z_*y_*)$  в прямые  $(px_*)$  и  $(py_*)$  соответственно, коника  $H$  является гиперболой с асимптотами, параллельными главным осям коники  $C$ . Она называется *гиперболой Аполлония* точки  $p$  относительно коники  $C$  и замечательна тем, что пересекает конику  $C$  ровно по таким точкам  $a \in C$ , для которых прямая  $(pa)$  перпендикулярна касательной  $T_a C$  к конике  $C$  в точке  $a$ , поскольку сопряжённый к  $\ell$  диаметр  $\ell'$  параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра  $\ell$ , см. рис. 8◊8. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки  $p$  на гладкую центральную конику  $C$  можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

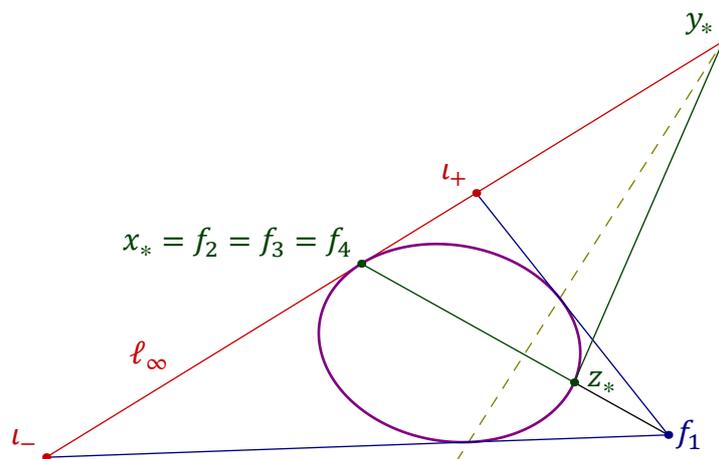


Рис. 8◊9. Фокус, директриса и ось параболы.

**8.4. Геометрия парабол.** Парабола  $P$ , касающаяся бесконечности в точке  $x_* = \ell_\infty \cap P$ , может рассматриваться как предельное положение центральной коники, которую сдвинули так, что её центр слился с тремя фокусами  $f_2, f_3, f_4$  в одну точку  $x_* \in \ell_\infty$  — направление оси<sup>1</sup> параболы  $P$ , см. рис. 8◊9. Директрисы фокусов  $f_2, f_3, f_4$  при этом тоже сливаются друг с другом и превращаются в прямую  $\ell_\infty$ . Единственный оставшийся конечный фокус  $f = f_1$  называется *фокусом*, а его поляра — *директрисой* параболы  $P$ . Конечная точка пересечения параболы с прямой  $(x_*f)$  обозначается через  $z_*$  и называется *вершиной* параболы. Все они автоматически вещественны. Точки  $x_*$  и  $y_* = T_C P \cap \ell_\infty$  называются *главными осями* параболы  $P$ . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 8◊9, второе выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в  $f_1$  сопряжённые относительно коники  $C$  направления  $x_*, y_*$  гармоничны абсолютным касательным направлениям.

Упражнение 8.9. Покажите, что середины хорд, отсекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

Так как анизотропный вектор  $y_*$  сопряжён относительно  $P$  обеим точкам  $x_*, z_*$ , и обе они изотропны, однородное уравнение параболы в базисе  $x_*, y_*, z_*$  записывается в виде  $y^2 = 2axz$ , где  $a > 0$ . В аффинном репере карты  $U_0$  с началом в  $z_*$  и евклидово перпендикулярными осями координат  $x_*, y_*$  это уравнение преобразуется в неоднородное уравнение  $y^2 = 2ax$ .

Упражнение 8.10. Убедитесь, что фокус такой параболы находится в точке  $(a/2, 0)$ , а директриса задаётся уравнением  $x = -a/2$ .

Пример 8.4 (ОТЫСКИВАНИЕ ВЕРШИНЫ ПАРАБОЛЫ)

Определим тип коники  $C$ , заданной в ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнением  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ . Матрица Грама её проективного замыкания

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

По форм. (8-6) на стр. 97 полюс бесконечно удалённой прямой  $\ell_\infty$  находится в точке

$$x_* = \left( \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = (0 : -2 : -1) \in \ell_\infty.$$

Тем самым, коника является параболой. Её ось параллельна вектору  $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ , т. е. проходит через изотропную точку  $x_* = (0 : 2 : 1) \in \ell_\infty$ , и является полярой евклидово перпендикулярной к  $x_*$  точки  $y_* = (0 : -1 : 2) \in \ell_\infty$ , т. е. задаётся уравнением  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$  с коэффициентами  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 2)B = (-8 : -5 : 10)$ . Вершина  $z_*$  параболы  $C$  является второй, отличной от  $x_*$ , изотропной точкой квадратичной формы  $B$  на оси и может быть получена отражением точки  $x_*$  в  $B$ -ортогонале к любой лежащей на оси анизотропной точке. Беря в качестве таковой  $a = (5, -8, 0)$ , находим  $(5, -8, 0)B = (-1, 2, 1)$ , откуда

$$\beta(a, x_*) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \beta(a, a) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -21,$$

$$z_* = \sigma_a(x_*) = x_* - 2 \frac{\beta(a, x_*)}{\beta(a, a)} a = (0, 2, 1) + \frac{10}{21} (5, -8, 0) = (50 : -38 : 21),$$

<sup>1</sup>См. рис. 8◊2 на стр. 96.

где через  $\beta$  обозначено скалярное произведение с матрицей Грама  $B$ . Таким образом, вершина параболы имеет аффинные координаты  $(-19/25, 21/50)$ .

Пример 8.5 (вырождение директора в директрису)

Задаваемая сопряжением прямых относительно коники гомография  $\delta_P : l_+^\times \simeq l_-^\times$  из н° 8.3.1 на стр. 100 для параболы является перспективой, поскольку прямая  $l_\infty$ , соединяющая центры пучков, самосопряжена. Согласно предл. 5.2 на стр. 59, коника, задающая перспективную гомографию пучков, распадается в прямую, соединяющую центры пучков, и прямую, проходящую через точки пересечений как-нибудь двух пар соответственных прямых из пучков. Таковыми являются точки  $\tau_+$  и  $\tau_-$  пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 8◊10. Следовательно ГМТ пересечения сопряжённых относительно параболы прямых, проходящих через точки  $l_\pm$ , которое, как мы видели в н° 8.3.1, одновременно является ГМТ, из которых параболу видно под прямым углом, есть не что иное как директриса параболы.

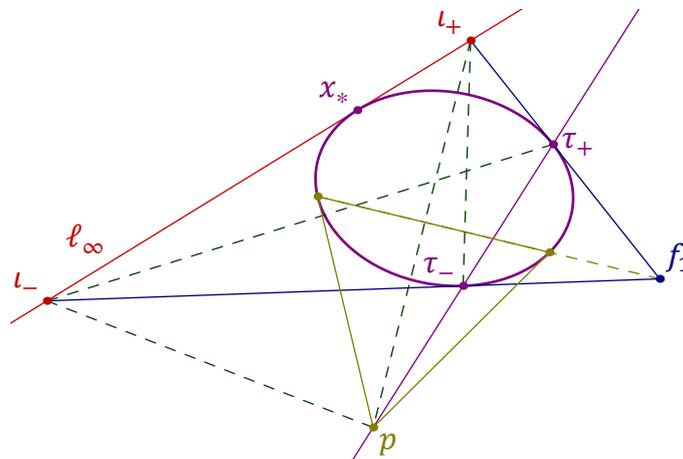


Рис. 8◊10. Директор параболы совпадает с её директрисой.

Следствие 8.1

Касательные к параболе, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс  $p$  любой фокальной хорды сопряжён фокусу параболы, он лежит на директрисе параболы, см. рис. 8◊10.  $\square$

**8.4.1. Софокусные параболы.** Параболы называются *софокусными*, если у них один и тот же фокус  $f$  и параллельные оси<sup>1</sup>. Семейство парабол, софокусных заданной параболе  $P$ , состоит из всех коник, вписанных в треугольник  $f l_- l_+$  и касающихся его стороны  $l_\infty = (l_- l_+)$  в фиксированной точке  $x_*$ . Двойственные им коники образуют в  $\mathbb{P}_2^\times$  пучок с тремя базисными точками<sup>2</sup> — сторонами треугольника  $f_1 l_- l_+$ . Он порождён двумя распавшимися кониками — объединением пучков  $x_*^\times \cup f^\times$  с особой точкой, двойственной оси параболы, и объединением пучков  $l_+^\times \cup l_-^\times$  с особой точкой  $l_\infty^\times$ , которая лежит на прямой  $x_*^\times$  и в которой все коники пучка касаются этой прямой. Всё сказанное в н° 8.3.2 для софокусных центральных коник дословно сохраняет силу

<sup>1</sup>Т. е. один и тот же «бесконечно удалённый фокус»  $x_*$ .

<sup>2</sup>См. рис. 7◊4 на стр. 86.

и для софокусных парабол: через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусные параболы, касательные к которым в точке  $p$  перпендикулярны друг другу и являются биссектрисами углов между прямой  $(pf)$  и проходящей через  $p$  прямой, параллельной оси параболы, а также углов между двумя касательными, опущенными из  $p$  на произвольную не проходящую через  $p$  софокусную с  $P$  параболу. Мы получаем следующие *фокальные свойства параболы*.

Предложение 8.3

Для любой точки  $p$  угол между касательной, опущенной из  $p$  на параболу  $P$ , и прямой  $(pf)$ , ведущей из  $p$  в фокус параболы, равен углу между второй касательной и осью параболы.  $\square$

Предложение 8.4

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы.  $\square$

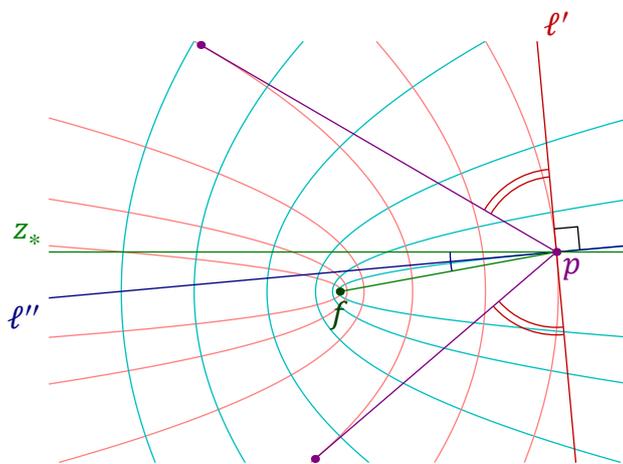


Рис. 8◊11. Софокусные параболы.

Пример 8.6

Если парабола  $P$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  каноническим уравнением  $y^2 = 2ax$ , то двойственная ей коника  $P^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  имеет однородное уравнение  $2a^{-1}x_0x_1 - x_2^2 = 0$  и порождает вместе с задаваемой уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  распадающейся коникой  $l_+^\times \cup l_-^\times$  пучок коник  $(1 + \lambda)x_2^2 + 2a^{-1}x_0x_1 + \lambda x_1^2 = 0$  на  $\mathbb{P}_2^\times$ . Двойственные им софокусные с  $P$  параболы на  $\mathbb{P}_2$  имеют однородные уравнения  $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$  и аффинные уравнения  $y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda)$ .

**8.4.2. Гипербола Аполлония** из н° 8.3.3 существует и для параболы (убедитесь в этом!). Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы  $x_* = l_\infty \cap P$  является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте  $U_0$  находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

## §9. Аффинные квадррики

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  бесконечно и характеристика  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ .

**9.1. Сравнение аффинной и проективной линейных групп.** Рассмотрим векторное пространство  $V$  размерности  $n \geq 2$  и ассоциированное с ним аффинное пространство  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ . Напомню<sup>1</sup>, что отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  называется *аффинным*, если существуют такие точка  $p \in \mathbb{A}(V)$  и линейное отображение<sup>2</sup>  $D_\varphi : V \rightarrow V$ , что  $\varphi(p + v) = \varphi(p) + D_\varphi(v)$  для всех  $v \in V$ . Если отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  аффинно, то для любых двух точек  $p, q \in \mathbb{A}(V)$  выполняется равенство  $\overline{\varphi(p)\varphi(q)} = D_\varphi(\overline{pq})$ .

УПРАЖНЕНИЕ 9.1. Убедитесь в этом и покажите, что  $D_{\varphi \circ \psi} = D_\varphi \circ D_\psi$ .

С точки зрения математического анализа аффинное отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  дифференцируемо<sup>3</sup> в каждой точке  $p \in \mathbb{A}(V)$  и его дифференциал  $D_\varphi$  постоянен, т. е. не зависит от точки  $p$ . Аффинное отображение  $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  биективно если и только если его дифференциал  $D_\varphi : V \rightarrow V$  является изоморфизмом. Биективные аффинные отображения  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  называются *аффинными преобразованиями* и образуют группу, которая обозначается  $\text{Aff}(V)$  и называется *аффинной группой* векторного пространства  $V$ . Две фигуры в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из них в другую.

УПРАЖНЕНИЕ 9.2. Убедитесь, что аффинная группа  $\text{Aff}(V) \simeq V \rtimes \text{GL}(V)$  является полупрямым произведением нормальной подгруппы сдвигов  $V \subset \text{Aff}(V)$ , которая состоит из преобразований  $\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ ,  $p \mapsto p + v$ , где  $v \in V$ , имеющих тождественный дифференциал  $D_{\tau_v} = \text{Id}_V$ , и полной линейной группы  $\text{GL}(V)$ , вложенной в  $\text{Aff}(V)$  как стабилизатор какой-нибудь точки  $p \in \mathbb{A}(V)$ .

Рассмотрим векторное пространство  $W = \mathbb{k} \oplus V$  размерности  $1 + \dim V$ , обозначим через  $e = (1, 0) \in W$  базисный вектор дополнительного к  $V$  одномерного слагаемого и вложим  $\mathbb{A}(V)$  в  $\mathbb{P}(W)$  в качестве аффинной карты  $U = e + V \subset W$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1

Аффинная группа  $\text{Aff}(U)$  канонически изоморфна подгруппе проективной группы  $\text{PGL}(W)$ , образованной всеми проективными преобразованиями  $\mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ , переводящими в себя бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W) \setminus U$  аффинной карты  $U$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть аффинное преобразование  $\varphi : U \rightarrow U$  действует на точку  $e + v \in U$ , где  $v \in V$ , по правилу  $e + v \mapsto \varphi(e) + D_\varphi v$ , где дифференциал  $D_\varphi : V \rightarrow V$  является линейным изоморфизмом. Тогда линейное отображение  $f : W \rightarrow W$ , задаваемое в терминах разложения  $W = \mathbb{k} \oplus V$  блочной матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ u & D_\varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda u + D_\varphi v \end{pmatrix}, \quad (9-1)$$

<sup>1</sup>См. материалы первого семестра или мою лекцию:

[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_02.pdf).

<sup>2</sup>Оно называется дифференциалом отображения  $\varphi$ .

<sup>3</sup>Напомню, что функция  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *дифференцируемой* в точке  $p \in \mathbb{R}^m$ , если существует такое линейное отображение  $D_{\varphi,p} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\varphi(x) = \varphi(p) + D_{\varphi,p}(\overline{px}) + o(|\overline{px}|)$  для всех точек  $x$  из некоторой окрестности точки  $p$  в  $\mathbb{R}^m$ .

где  $0, 1, \lambda \in \mathbb{k}$ ,  $D_\varphi \in GL(V)$ ,  $u = \overline{e\varphi(e)} \in V$ , переводит в себя векторное подпространство  $V \subset W$ , проективную гиперплоскость  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$  и аффинную карту  $U$ , причём  $f|_U = \varphi$ . Наоборот, если задаваемое линейным автоморфизмом  $f : W \simeq W$  проективное преобразование  $\bar{f} : \mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W)$  переводит в себя гиперплоскость  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$ , то оператор  $f$  задаётся в терминах разложения  $W = \mathbb{k} \oplus V$  блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ w & f|_V & & \end{pmatrix},$$

где  $0, \mu \in \mathbb{k}$ ,  $w \in V$ ,  $f|_V \in \text{End } V$ . Поскольку  $f$  обратим,  $\mu \neq 0$  и  $f|_V \in GL(V)$ . Деля  $f$  на ненулевую константу  $\mu$  получаем матрицу вида (9-1) с  $u = \mu^{-1}w$ ,  $D_\varphi = \mu^{-1}f|_V$ , которая задаёт то же самое проективное преобразование  $\bar{f}$ , что и  $f$ , отображает аффинную карту  $U$  в себя и действует на ней аффинным преобразованием  $\varphi : e + v \mapsto \varphi(e) + D_\varphi(v)$  с  $\varphi(e) = e + \mu^{-1}w$  и  $D_\varphi = \mu^{-1}f|_V$ .  $\square$

**9.2. Проективное замыкание аффинной квадрики.** Аффинной квадратикой в ассоциированном с векторным пространством  $V = \mathbb{k}^n$  аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n = A(V)$  называют фигуру  $Q = \{v \in \mathbb{A}^n \mid f(v) = 0\}$ , заданную неоднородным уравнением второй степени

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \text{где}$$

$$f_0 = \beta_{00} \in \mathbb{k}, \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{j=1}^n \beta_{0j} x_j \in V^*, \quad f_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j \in S^2 V^*. \quad (9-2)$$

Как и выше, вложим  $\mathbb{A}^n = A(V)$  в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = U_{x_0}$  в проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и  $W = \mathbb{k} \cdot e_0 \oplus V$ . Проективное замыкание<sup>1</sup>  $\bar{Q} = V(q) \subset \mathbb{P}_n$  аффинной квадрики  $Q \subset U_0$  является множеством нулей однородной квадратичной формы  $q(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 f_0 + x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n)$  с матрицей Грама  $B = (\beta_{ij})$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ , которую иногда называют *расширенной матрицей Грама аффинной квадрики*  $Q$ . При  $x_0 = 1$  уравнение  $q(x) = 0$  превращается в уравнение (9-2). Поэтому  $\bar{Q} \cap U_0 = Q$ . Пересечение проективной квадрики  $\bar{Q}$  с бесконечно удалённой гиперплоскостью  $L_\infty = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_n \setminus U_0$  обозначается  $Q_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bar{Q} \cap L_\infty = \bar{Q} \setminus Q \subset \mathbb{P}(V)$  и называется *асимптотической квадратикой* аффинной квадрики  $Q$ . Эта квадратика задаётся однородной компонентой второй степени  $f_2 = q|_V \in S^2 V^*$  неоднородного многочлена (9-2) и имеет матрицу Грама  $B_\infty = (\beta_{ij})$  с  $1 \leq i, j \leq n$ , которая является правой нижней угловой  $n \times n$ -подматрицей расширенной матрицы Грама  $B$ .

**Предложение 9.2**

Пусть непустые аффинные квадрики  $Q', Q'' \subset U_0$  имеют в  $\mathbb{P}_n$  проективные замыкания  $\bar{Q}'$  и  $\bar{Q}''$ . Тогда  $Q'$  и  $Q''$  аффинно конгруэнтны если и только если существует такое проективное преобразование  $g : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$ , что  $g(\bar{Q}') = \bar{Q}''$  и  $g(L_\infty) = L_\infty$ .

**Доказательство.** Согласно [предл. 9.1](#), аффинные преобразования пространства  $U_0$  суть проективные преобразования пространства  $\mathbb{P}_n$ , переводящие в себя бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty \subset \mathbb{P}_n$ . Если такое проективное преобразование  $g$  переводит  $\bar{Q}'$  в  $\bar{Q}''$ , то его ограничение на карту  $U_0 = \mathbb{P}_n \setminus L_\infty$  переводит  $Q' = \bar{Q}' \setminus L_\infty$  в  $Q'' = \bar{Q}'' \setminus L_\infty$ . Наоборот, если ограничение проективного преобразования  $g$  на карту  $U_0$  переводит  $Q' = \bar{Q}' \setminus L_\infty$  в  $Q'' = \bar{Q}'' \setminus L_\infty$ ,

<sup>1</sup>См. п.° 4.4.2 на стр. 49.

то проективные квадрики  $g(\overline{Q}')$  и  $\overline{Q}''$  совпадают друг с другом всюду вне гиперплоскости  $L_\infty$ . Идущая ниже лем. 9.1 утверждает, что тогда они совпадают всюду.  $\square$

#### ЛЕММА 9.1

Если гиперплоскость  $H \subset \mathbb{P}_n$  и непустая проективная квадрика  $P \subset \mathbb{P}_n$  над бесконечным полем  $\mathbb{k}$  таковы, что  $P \not\subset H$  и  $H \not\subset P$ , то пересечение  $P \cap H$  однозначно восстанавливается по дополнению  $P \setminus H$ .

Доказательство. При  $n = 1$  это следует из прим. 4.6 на стр. 44. Пусть  $n \geq 2$  и  $P = V(q)$ . Если квадрика  $P$  гладкая, то над бесконечным полем в дополнении  $P \setminus H$  найдутся  $n+2$  точки, никакие  $n+1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости.

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Убедитесь в этом.

Полярное преобразование<sup>1</sup>  $\overline{q}: \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$  переводит эти точки в их касательные гиперплоскости и тем самым однозначно ими определяется. По полярному преобразованию однозначно с точностью до пропорциональности восстанавливается матрица Грама формы  $q$ , а значит, и сама квадрика  $P$ . Если квадрика  $P$  особа, но в дополнении  $P \setminus H$  есть гладкая точка  $a$ , рассмотрим любое дополнительное к  $\text{Sing } P$  проективное подпространство  $L \ni a$ . По теор. 4.1 на стр. 45 квадрика  $P$  является линейным соединением подпространства  $\text{Sing } P$  и непустой гладкой квадрики  $P' = P \cap L \ni a$ . По уже доказанному, пересечение  $P' \cap H'$  этой гладкой квадрики с гиперплоскостью  $H' = H \cap L$  в пространстве  $L$  однозначно определяется дополнением  $P' \setminus H'$ . Пересечение  $\text{Sing } P \cap H$  также однозначно восстанавливается по  $P \setminus H$ , так как каждая прямая  $(ab)$  с  $b \in \text{Sing } P \cap H$  лежит на  $P$  и все точки этой прямой кроме точки  $b$  лежат в  $P \setminus H$ . Поэтому пересечение  $P \cap H$ , будучи линейным соединением  $P' \cap H$  с  $\text{Sing } P \cap H$ , тоже однозначно восстанавливается по дополнению  $P \setminus H$ . Ну а если в дополнении  $P \setminus H$  есть особая точка  $a$ , то любая прямая  $(ab)$  с  $b \in P \cap H$  целиком лежит на квадрике и пересекает  $H$  ровно по точке  $b$ . Значит, и в этом случае пересечение  $P \cap H$  восстанавливается по  $P \setminus H$ .  $\square$

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1

Аффинная квадрика  $Q \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  с проективным замыканием  $\overline{Q} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  и асимптотической квадрикой  $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$  называется *гладкой центральной*, если обе квадрики  $\overline{Q}$ ,  $Q_\infty$  гладкие, *параболоидом* — если  $\overline{Q}$  гладкая, а  $Q_\infty$  особая, (*простым*) *конусом* — если  $\overline{Q}$  особая, а  $Q_\infty$  гладкая, и *цилиндром* — если обе проективные квадрики  $\overline{Q}$ ,  $Q_\infty$  особые.

**9.3. Гладкие центральные квадрики.** Если обе проективные квадрики  $\overline{Q}$  и  $Q_\infty = \overline{Q} \cap L_\infty$  гладкие, бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty$  не является касательной к  $\overline{Q}$  трансверсально, и её полюс  $c$  относительно  $\overline{Q}$  лежит в  $U_0 \setminus Q$ . Он является *центром симметрии* аффинной квадрики  $Q$ , так как по предл. 6.1 на стр. 70 на любой проходящей через  $c$  прямой, пересекающей квадрику в точках  $a$  и  $b$ , а бесконечно удалённую гиперплоскость — в точке  $d$ , выполняется равенство  $[d, c, a, b] = -1$ , означающее, что точка  $c$  является барицентром точек  $a, b$ .

На языке уравнений, квадрика  $Q$  центральна если и только если оба определителя  $\det B$ ,  $\det B_\infty$  отличны от нуля. Центр  $c$ , будучи полюсом гиперплоскости  $x_0 = 0$ , удовлетворяет линейному уравнению  $cB = (1 : 0 : \dots : 0)$ . Его однородные координаты пропорциональны

<sup>1</sup>См. н° 6.1 на стр. 69.

верхней строке присоединённой матрицы  $B^\vee$  расширенной матрицы Грама<sup>1</sup>:

$$c = (1 : -B_{01}/B_{00} : \dots : (-1)^n B_{0n}/B_{00}).$$

Так как вектор  $c$  ортогонален подпространству  $V$ , любой набор векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$ , составляющий ортогональный базис формы  $f_2 = q|_V$ , образует вместе с  $c$  ортогональный базис для формы  $q$  в  $W$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  относительно этого базиса квадратичная форма  $q$  записывается в виде  $a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0$ , где все  $a_i \neq 0$ . В карте  $U_0$  в аффинном репере с началом в точке  $c \in U_0$  и осями, направленными вдоль векторов  $v_i$ , это уравнение приобретает вид  $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2 = 1$ , где  $b_i = -a_i/a_0$ . Умножая базисные векторы на подходящие константы, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  уравнение упрощается дальше до  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные аффинные квадрики аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  уравнение приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{p+s}^2 = \pm 1, \quad \text{где } r \geq s \geq 0, r + s = n \quad (9-3)$$

и при чётном  $n$  и  $r = s = n/2$  в правой части стоит<sup>2</sup>  $+1$ . При  $r > s$  и правой части  $+1$  проективное замыкание  $\bar{Q}$  квадрики (9-3) имеет сигнатуру  $(r, s + 1)$  и планарность  $s$ . При  $r > s$  и правой части  $-1$  квадрика  $\bar{Q}$  имеет сигнатуру  $(r + 1, s)$  и планарность  $(s - 1)$ . При чётном  $n$  и  $r = s = n/2$  квадрика  $\bar{Q}$  имеет планарность  $n/2$ .

Асимптотическая квадратика  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  аффинной квадрики (9-3) задаётся в том же базисе пространства  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$  уравнением  $x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+s}^2 = 0$  и является  $(s - 1)$ -планарной. Мы заключаем, что если центральная квадратика  $\bar{Q}$  имеет тип<sup>3</sup>  $Q_{d,m}$ , то её асимптотическая квадратика имеет тип  $Q_{d-1,m-1}$ , если правая часть уравнения (9-3) равна  $-1$  или  $d = 2m$ , и имеет тип  $Q_{d-1,m}$ , если правая часть уравнения (9-3) равна  $+1$  и  $d \neq 2m$ . Таким образом, все аффинные квадрики (9-3) попарно аффинно не конгруэнтны.

Среди них имеется ровно одна пустая — это квадратика  $\sum x_i^2 = -1$  планарности  $-1$ , задаваемая уравнением  $\sum x_i^2 = -1$ . Также имеется ровно одна непустая квадратика без точек на бесконечности — это квадратика  $\sum x_i^2 = 1$  планарности нуль. Она называется *эллипсоидом*. Все остальные квадрики имеют непустую асимптотическую квадратичку  $Q_\infty = \bar{Q} \cap L_\infty$  и называются *гиперболоидами*. Квадрики планарности нуль исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом*  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$ . Через каждую точку всех остальных непустых квадратик (9-3) можно провести лежащую на квадратике прямую.

**УПРАЖНЕНИЕ 9.4.** Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две компоненты связности, тогда как все остальные квадрики (9-3) связны.

**9.4. Параболоиды.** Аффинная квадратика  $Q$  является параболоидом если и только если её проективное замыкание  $\bar{Q}$  гладко и касается бесконечно удалённой гиперплоскости  $L_\infty$ . В этом случае асимптотическая квадратика  $Q_\infty$  имеет ровно одну особую точку  $c$ , которая одновременно является полюсом гиперплоскости  $L_\infty$  и одномерным ядром матрицы  $B_\infty$ .

<sup>1</sup>Через  $B_{ij}$  здесь и далее обозначается определитель  $n \times n$ -подматрицы расширенной матрицы Грама  $B$ , стоящий в дополнении к её  $i$ -той строке и  $j$ -тому столбцу.

<sup>2</sup>При  $r = s = n/2$  смена знака у обеих частей и перенумерация переменных превращает уравнение (9-3) с правой частью  $-1$  в аналогичное уравнение с правой частью  $+1$ .

<sup>3</sup>Напомню, что через  $Q_{d,m} \subset \mathbb{P}_n$  мы обозначаем гладкую вещественную квадратичку размерности  $d$  и планарности  $m$ , см. н° 6.3.1 на стр. 77.

На языке уравнений, у параболоида  $\det B \neq 0$ , а  $\det B_\infty = 0$ . Точка касания

$$c = (0 : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n}) \in \overline{Q} \cap L_\infty,$$

понимаемая как направление в исходном аффинном пространстве  $A^n = A(V)$ , называется *направлением оси параболоида*. В силу предл. 1.5 на стр. 15, ограничение квадратичной формы  $f_2 = q|_V$  на любую  $(n-2)$ -мерную не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $H = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V) = L_\infty$  невырождено. Поэтому ограничение формы на двумерное подпространство  $U^\perp \subset W = \mathbb{k} \oplus V$  тоже невырождено. Так как одномерное пространство  $c = V^\perp \subset U^\perp$  изотропно, подпространство  $U^\perp$  является гиперболической плоскостью. Выберем в ней гиперболический базис  $u_0, u_n$  так, чтобы  $u_0 \in U_0$ , а  $u_n \in c$ , и дополним его ортонормальным базисом  $u_1, \dots, u_{n-1}$  подпространства  $U$  до базиса  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$  в  $W$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  относительно этого базиса квадратичная форма  $q$  запишется как  $a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + 2x_0 x_n = 0$ . В аффинном репере карты  $U_0$  с началом в точке  $u_0$  и базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$  аффинное уравнение параболоида приобретает вид  $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n$ , где  $b_i = -a_i$ . Над алгебраически замкнутым полем оно упрощается дальше до  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2x_n$ , и мы заключаем, что все параболоиды над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  аффинное уравнение параболоида преобразуется к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 = 2x_n, \quad \text{где } r \geq s \geq 0, r + s = n - 1. \quad (9-4)$$

Параболоид (9-4) имеет планарность  $s$ . Поэтому при разных  $s$  параболоиды (9-4) аффинно не конгруэнтны. Нуль-планарный параболоид  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 2x_n$  называется *эллиптическим*, а все остальные — *гиперболическими*. В силу сл. 6.4 на стр. 77 асимптотическая квадратика аффинного параболоида с проективным замыканием типа  $Q_{d,m}$  является простым конусом с вершиной  $c$  над гладкой проективной квадратикой типа  $Q_{d-2,m-1}$ .

**9.5. Простые конусы.** Аффинная квадратика  $Q$  является простым конусом, если её расширенная матрица Грама имеет  $\det B = 0$ , но правый нижний угловой  $n \times n$ -минор этой матрицы  $B_{00} = \det B_\infty \neq 0$ . В этом случае  $\text{rk } B = n$  и проективная квадратика  $\overline{Q}$  имеет единственную особую точку  $(c_0 : c_1 : \dots : c_n) = (B_{00} : -B_{01} : \dots : (-1)^n B_{0n})$  — верхнюю строку присоединённой матрицы  $B^\vee$ , лежащую в  $\ker B$ , поскольку  $B^\vee B = \det B \cdot E = 0$ . Поместим начало аффинной координатной системы карты  $U_0$  в точку  $c = (1, -B_{01}/B_{00}, \dots, (-1)^n B_{0n}/B_{00}) \in U_0$  и направим оси координат вдоль векторов какого-нибудь ортогонального базиса невырожденной квадратичной формы  $f_2 = q|_V$ . В таком репере квадратика  $Q$  запишется аффинным уравнением

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0,$$

одновременно являющимся однородным уравнением асимптотической квадратички  $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$ . Над алгебраически замкнутым полем это уравнение упрощается до  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ . Тем самым, все простые конусы над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем  $\mathbb{R}$  уравнение конуса приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = x_{r+1}^2 + \dots + x_{r+s}^2, \quad \text{где } r \geq s \geq 0 \text{ и } r + s = n. \quad (9-5)$$

Это однородное уравнение задаёт в  $\mathbb{P}(V)$  проективную квадратичку планарности  $s-1$ . Поэтому аффинный конус (9-5) имеет планарность  $s$ . В частности, все конусы (9-5) попарно аффинно не конгруэнтны. Обратите внимание, что 0-планарный аффинный конус  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  является конусом над пустой проективной квадратикой  $Q_{n-1,-1}$  и состоит из единственной точки — своей расположенной в начале координат вершины.

**9.6. Цилиндры.** Согласно [опр. 9.1](#), аффинная квадрика  $Q$  является цилиндром, если и  $\bar{Q}$ , и  $Q_\infty$  особы, т. е.  $\det B = \det B_\infty = 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 9.5. Убедитесь, что это эквивалентно условию  $\text{Sing } \bar{Q} \cap L_\infty \neq \emptyset$ .

Если выбрать в  $V$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  так, чтобы векторы  $e_i$  с  $i > r$  составили базис в  $\ker q \cap V$ , то уравнение аффинной квадрики  $Q$  не будет зависеть от последних  $n - r$  координат. Поэтому любой цилиндр является прямым произведением аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n-r}$ , параллельного последним  $n - r$  базисным векторам, и не имеющей особенностей на бесконечности аффинной квадрики в дополнительном к нему аффинном пространстве  $\mathbb{A}^r$ . Эта квадрика принадлежит к одному из уже рассмотренных выше трёх типов.

ПРИМЕР 9.1 (вещественные аффинные кривые второй степени)

Полный список непустых аффинных «кривых второй степени» в  $\mathbb{R}^2$  с точностью до аффинной конгруэнтности таков:

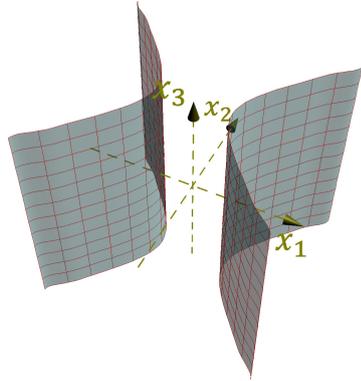
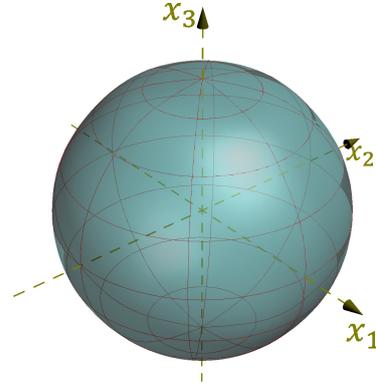
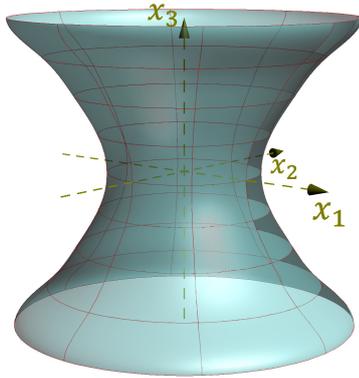
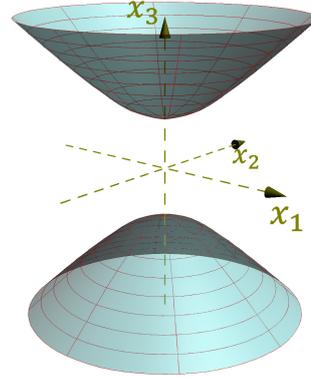
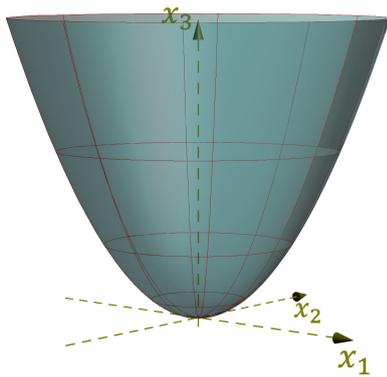
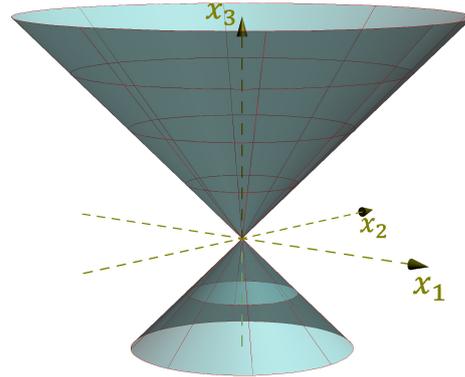
- эллипс  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , гладкая центральная квадрика с пустой асимптотической квадрикой; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика типа  $Q_{0,-1}$
- гипербола  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , гладкая с центральная квадрика с гладкой непустой асимптотической квадрикой, состоящей из точек  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ ; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика типа  $Q_{0,0}$
- парабола  $x_1^2 = x_2$ , касающаяся бесконечно удалённой прямой в точке  $(0 : 0 : 1)$ ; проективное замыкание типа  $Q_{1,0}$ , асимптотическая квадрика — конус над пустой квадрикой в  $\mathbb{P}_0$
- двойная точка  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , конус над гладкой пустой асимптотической квадрикой типа  $Q_{0,-1}$
- пара пересекающихся прямых  $x_1^2 - x_2^2 = 0$ , конус над гладкой непустой асимптотической квадрикой типа  $Q_{0,0}$
- пара параллельных прямых  $x_1^2 = 1$ , цилиндр над гладкой непустой квадрикой в  $\mathbb{A}^1$
- двойная прямая  $x_1^2 = 0$ , цилиндр над двойной точкой в  $\mathbb{A}^1$ .

ПРИМЕР 9.2 (вещественные аффинные квадратичные поверхности)

Полный список непустых аффинных «квадратичных поверхностей» в  $\mathbb{R}^3$  вдвое длиннее предыдущего списка «кривых». Он состоит из семи цилиндров над этими «кривыми», задаваемых теми же уравнениями, но только в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , и называемых соответственно эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, двойной прямой, парой пересекающихся и парой параллельных плоскостей и двойной плоскостью. Кроме семи цилиндров есть три гладких центральных поверхности:

- эллипсоид  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  с проективным замыканием  $Q_{2,0}$  и гладкой пустой асимптотической коникой  $Q_{1,-1}$ ; эллипсоид компактен и 0-планарен (см. [рис. 9◊2](#))
- двуполостный гиперboloид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$  с тем же самым проективным замыканием  $Q_{2,0}$  и гладкой непустой асимптотической коникой  $Q_{1,0}$ ; двуполостный гиперboloид 0-планарен и имеет две компоненты связности (см. [рис. 9◊4](#))

- *однополостный гиперboloид*  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$  (см. рис. 9◊3), проективным замыканием которого является квадрика Сегре  $Q_{2,1}$ , имеющая непустое пересечение с любой плоскостью и пересекающая каждую некасательную плоскость по гладкой непустой конике  $Q_{1,0}$ ; однополостный гиперboloид связан и заматается двумя семействами прямых

Рис. 9◊1. Цилиндр  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ Рис. 9◊2. Эллипсоид  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ Рис. 9◊3. Гиперboloид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$ Рис. 9◊4. Гиперboloид  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$ Рис. 9◊5. Параболоид  $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ Рис. 9◊6. Конус  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ 

два параболоида:

- эллиптический параболоид  $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$  (см. рис. 9◊5) с 0-планарным проективным замыканием  $Q_{2,0}$ , которое касается бесконечно удалённой плоскости  $x_0 = 0$  в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$ , и асимптотической коникой, которая является конусом с вершиной в этой точке над пустой гладкой квадрикой  $Q_{0,-1}$
- гиперболический параболоид  $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$  (см.рис. 9◊7) с 1-планарным проективным замыканием  $Q_{2,1}$  и асимптотической коникой, являющейся конусом с вершиной в точке  $(0 : 0 : 0 : 1)$  над непустой гладкой квадрикой  $Q_{0,0}$ ; гиперболический параболоид заматается двумя семействами прямых, в частности, пересекает бесконечность по паре прямых  $x_1 = \pm x_2$

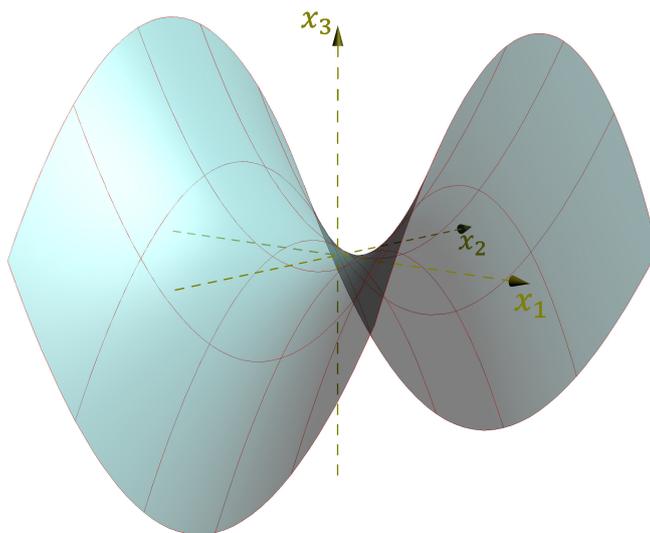


Рис. 9◊7. Гиперболический параболоид  $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$

и два простых конуса над разными гладкими асимптотическими кониками:

- двойная точка  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ , конус над пустой гладкой коникой
- эллиптический конус  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ , конус над не пустой гладкой коникой (см. рис. 9◊6)

Итого, 14 непустых попарно аффинно неконгуэнтных фигур.

Предложение 9.3

Каждый параболоид в  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфен  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Доказательство. Пусть проективное замыкание  $\overline{P} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  параболоида  $P \subset \mathbb{R}^n$  касается бесконечной гиперплоскости  $L_\infty$  в точке  $p$ . Проекция из точки  $p$  на любую не проходящую через  $p$  проективную гиперплоскость  $H \subset \mathbb{P}_n$  задаёт биекцию между точками параболоида  $P = \overline{P} \setminus L_\infty = P \setminus T_p \overline{P}$  и точками аффинной гиперплоскости  $H \setminus T_p \overline{P} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ . Поскольку координаты точки  $x \in P$  и её проекции  $t \in H$  являются рациональными функциями друг друга<sup>1</sup>, эта биекция является гомеоморфизмом.  $\square$

<sup>1</sup>Напомним, что  $\tilde{q}(t, t) \cdot (p - x) = 2\tilde{q}(t, p) \cdot t$ , ср. с прим. 4.7 на стр. 46.

Предложение 9.4

Гладкая центральная аффинная квадрика  $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$  размерности  $n$  с проективным замыканием типа  $Q_{n,m}$  гомеоморфна цилиндру  $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , где  $S^{n-m}$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^{n-m+1}$ , если её асимптотическая квадрика  $Q_\infty$  имеет тип  $Q_{n-1,m-1}$ , и гомеоморфна цилиндру  $S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , если асимптотическая квадрика имеет тип  $Q_{n-1,m}$ .

Доказательство. Если  $\bar{Q} \simeq Q_{n,m}$  и  $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m-1}$ , квадрика  $Q$  задаётся в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнением

$$1 + x_1^2 + \dots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2.$$

Разобьём  $\mathbb{R}^{n+1}$  в произведение  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+1-m}$ . Пересечение квадрики  $Q$  со слоем  $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$  над любой точкой  $w = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  является сферой в  $\mathbb{R}^{n-m+1}$  с центром в нуле и квадратом радиуса  $1 + (w, w)$ , где  $(*, *)$  — стандартная евклидова структура на  $\mathbb{R}^m$ . Отображение

$$(w, u) \mapsto \left( w, \frac{u}{\sqrt{1 + (w, w)}} \right),$$

осуществляющее в каждом слое  $w \times \mathbb{R}^{n+1-m}$  гомотетию с коэффициентом  $(1 + (w, w))^{-1/2}$ , задаёт гомеоморфизм между квадрикой  $Q$  и цилиндром  $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ . Если  $\bar{Q} \simeq Q_{n,m}$  и  $Q_\infty \simeq Q_{n-1,m}$ , то  $Q$  имеет уравнение  $x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = x_{m+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 + 1$ . Применяя к  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}$  то же рассуждение, что и выше, получаем гомеоморфизм  $Q \simeq S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ .  $\square$

Упражнение 9.6. Выведите из предыдущих предложений, что единственной с точностью до аффинной конгруэнтности несвязной гладкой нецилиндрической аффинной квадрикой является двуполостный гиперboloид с уравнением  $1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2$ .

**9.7. Квадрики в евклидовом пространстве.** Зафиксируем на векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$  евклидову структуру так, чтобы стандартный базис стал ортонормальным, и обозначим через

$$(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

евклидово скалярное произведение. Тогда каждой квадратичной форме  $f \in S^2V^*$  биективно сопоставится<sup>1</sup> самосопряжённый линейный оператор  $\varphi_f: V \rightarrow V$ , матрица которого в любом ортонормальном базисе пространства  $V$  совпадает с матрицей Грама формы  $f$  в этом базисе, и который однозначно характеризуется тем, что  $(u, \varphi_f w) = \tilde{f}(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ . Согласно теор. 2.7 на стр. 27 этот оператор диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства  $V$ , который таким образом является ортогональным для квадратичной формы  $f$ . Диагональные элементы матрицы Грама равны собственным числам оператора  $\varphi_f$ , а базисные векторы являются собственными векторами этого оператора. Мы будем называть всякий базис с такими свойствами *каноническим базисом* квадратичной формы  $f$ . Обратите внимание, что если все собственные числа матрицы Грама формы  $f$  в произвольном ортонормальном базисе пространства  $V$  различны, то канонический базис определён однозначно с точностью до смены знаков и перенумерации базисных векторов.

<sup>1</sup>См. н° 1.3.4 на стр. 11, а также сл. 7.2 на стр. 91.

**9.7.1. Центральные квадрики.** Пусть гладкая центральная аффинная квадратика  $Q \subset \mathbb{A}(V)$  задаётся в стандартных координатах на  $V = \mathbb{R}^n$  аффинным уравнением

$$f_0 + f_1(x) + f_2(x) = 0, \quad \text{где } f_i \in S^i V^*, x \in \mathbb{R}^n.$$

Аффинный репер с началом в центре  $c$  квадрики  $Q$  и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$ , образующими канонический базис асимптотической квадратичной формы  $f_2$ , называется *каноническим репером* квадрики  $Q$ , а его координатные оси — *главными осями* квадрики  $Q$ . Таким образом, главные оси направлены вдоль собственных векторов матрицы Грама квадратичной формы  $f_2$ . Аффинное уравнение квадрики  $Q$  в каноническом репере имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 1, \quad (9-6)$$

где каждый коэффициент  $a_i = -q(u_i, u_i) / q(c, c) = -f_2(u_i, u_i) / f(c) = -\alpha_i / f(c)$ , а  $\alpha_i$  — собственное значение оператора  $\varphi_{f_2}$  на собственном векторе  $u_i$ . Поскольку ни собственные значения оператора  $\varphi_{f_2}$ , ни значение многочлена  $f$  в точке  $c \in \mathbb{A}(V)$  не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов  $a_i$  канонического уравнения (9-6) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным инвариантом гладкой центральной квадрики: одна такая квадратика переводится в другую движением объемлющего евклидова пространства если и только если у этих квадрик одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов  $a_i$  их канонических уравнений (9-6). Положительные числа  $\ell_i \stackrel{\text{def}}{=} |a_i|^{1/2}$  называются *полуосями* гладкой центральной квадрики. При  $a_i > 0$  число  $\ell_i$  равно расстоянию от центра квадрики до точки её пересечения с  $i$ -той главной осью. Обратите внимание, что коэффициенты  $a_i = -\alpha_i / f(c)$ , а с ними — и полуоси вычисляются по аффинному уравнению  $f$  квадрики в произвольном ортонормальном базисе евклидова пространства и не меняются при умножении этого уравнения на константу.

С конформной точки зрения векторы  $c, u_1, \dots, u_n \in W = \mathbb{R} \oplus V$ , составляющие канонический репер, являются вершинами автополярного относительно проективной квадрики  $\bar{Q}$  симплекса<sup>1</sup> в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$ , а выходящие из вершины  $c$  гиперграниц этого симплекса пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$  по  $(n-1)$ -мерному симплексу, автополярному относительно гладкой *абсолютной квадрики*  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  в пространстве  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ . Эта квадратика не имеет вещественных точек и задаёт на пространстве  $V$  *конформную структуру*.

#### Предложение 9.5

Для любого эллипсоида  $Q = V(f) \subset \mathbb{A}(V)$  с положительно определённой асимптотической квадратичной формой  $f_2$  характеристический многочлен  $\det(tE - F_e)$  матрицы Грама  $F_e$  формы  $f_2$  в любом евклидово ортонормальном базисе  $e$  пространства  $V$  не зависит от выбора этого ортонормального базиса. Симметричным образом, характеристический многочлен  $\det(tE - G_v)$  матрицы Грама  $G_v$  евклидова скалярного произведения в любом базисе  $v$  пространства  $V$ , ортонормальном для асимптотической формы  $f_2$ , не зависит от выбора такого базиса.

*Доказательство.* Матрица  $C_{e'e}$ , выражающая евклидово ортонормальный базис  $e'$  через евклидово ортонормальный базис  $e$ , удовлетворяет соотношению  $G_{e'} = C_{e'e}^t G_e C_{e'e}$ , где  $G_{e'} = G_e = E$  суть матрицы Грама евклидова скалярного произведения в этих базисах. Поэтому  $C_{e'e}^t = C_{e'e}^{-1}$ .

<sup>1</sup>Это означает, что полюсом каждой  $(n-1)$ -мерной гиперграниц симплекса относительно квадрики  $\bar{Q}$  является противоположащая этой грани вершина симплекса.

Из формулы, связывающей матрицы Грама асимптотической квадратичной формы тех же базисов:  $F'_e = C_{e'e}^t F_e C_{e'e} = C_{e'e}^{-1} G_e C_{e'e}$ , вытекает, что матрицы  $F_{e'}$  и  $F_e$  подобны и, стало быть, имеют равные характеристические многочлены. Второе утверждение доказывается аналогично.  $\square$

ПРИМЕР 9.3 (ВАРИАЦИИ НА ТЕОРЕМЫ АПОЛЛОНИЯ)

Уравнение эллипсоида в аффинном репере с началом в центре  $c$  этого эллипсоида после умножения на подходящую константу приобретает вид  $f_2(v) = 1$ , где  $f_2 \in S^2V^*$  — асимптотическая квадратичная форма эллипсоида, а  $v \in V$  — радиус вектор, ведущий из центра эллипсоида в переменную точку пространства. Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  тогда и только тогда составляют ортонормальный базис квадратичной формы  $f_2$ , когда  $2n$  точек  $c \pm v_i$  лежат на эллипсоиде и для каждого  $i$  две проходящие через точки  $c \pm v_i$  параллельные плоскости с направляющим векторным пространством, порождённым  $(n-1)$  векторами  $v_\nu$  с  $\nu \neq i$ , обе касаются эллипсоида. Такие векторы  $v_1, \dots, v_n$  называются *сопряжёнными радиусами эллипсоида*. Из предл. 9.5 вытекает, что для каждого  $k = 1, 2, \dots, n = \dim V$  сумма всех главных миноров<sup>1</sup> матрицы Грама  $G_\nu$  евклидовых скалярных произведений набора  $\nu = (v_1, \dots, v_n)$  сопряжённых радиусов эллипсоида не зависит от  $\nu$ . При  $k = n$  это означает, что евклидов объём параллелепипеда, натянутого на сопряжённые радиусы эллипсоида не зависит от выбора сопряжённых радиусов, а при  $k = 1$  — что сумма квадратов длин сопряжённых радиусов эллипсоида одинакова для всех наборов сопряжённых радиусов. Эти два утверждения про пару сопряжённых радиусов эллипса на плоскости известны как *теоремы Аполлония*.

Если провести параллельные сопряжённым радиусам  $v_i$  прямые  $\ell_i = \{a + v_i t\}$  через произвольную не лежащую на эллипсоиде точку  $a$ , то каждая из  $n$  прямых пересечёт эллипсоид в точках  $a'_i = a + v_i t'_i$  и  $a''_i = a + v_i t''_i$ , где  $t'_i$  и  $t''_i$  являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + 2\tilde{q}(v_i, a) + q(a) = 0,$$

в котором  $q \in S^2(\mathbb{R}c \oplus V)^*$  — однородная квадратичная форма, задающая проективное замыкание эллипсоида<sup>2</sup>. Поскольку произведение длин  $|a'_i - a| \cdot |a''_i - a| = t'_i t''_i |v_i|^2 = q(a) |v_i|^2$ , мы заключаем, что сумма таких произведений по всем  $n$  сопряжённым направлениям

$$\sum_{i=1}^n |a'_i - a| \cdot |a''_i - a| = q(a) \cdot \text{tr } G_\nu$$

тоже не зависит от выбора набора сопряжённых направлений.

ПРИМЕР 9.4 (ОРТООПТИЧЕСКАЯ СФЕРА ЦЕНТРАЛЬНОЙ КВАДРИКИ)

Одним из многомерных обобщений директора<sup>3</sup> центральной коники на евклидовой плоскости является ГМТ пересечения  $n$  попарно перпендикулярных гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n$ , касающихся заданной центральной квадрики  $Q$  в аффинном евклидовом пространстве  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ . Вложим  $\mathbb{A}^n$  в  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(W)$ , где  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$ , и зафиксируем в пространстве  $W$  такой базис

<sup>1</sup>Т. е. сумма определителей всех  $k \times k$ -подматриц в  $G_\nu$ , главная диагональ которых содержится в главной диагонали  $G_\nu$ . Согласно прим. 3.2 на стр. 33 эта сумма, умноженная на  $(-1)^k$ , равна коэффициенту при  $t^{n-k}$  в характеристическом многочлене  $\det(tE - G_\nu)$ .

<sup>2</sup>Коэффициент при  $t^2$  получился равен  $\tilde{q}(v_i, v_i) = f_2(v_i) = 1$ , поскольку векторы  $v_i$  образуют ортонормальный базис формы  $f_2$ .

<sup>3</sup>См. н° 8.3.1 на стр. 100.

$e_0, e_1, \dots, e_n$ , что вектор  $e_0$  является центром квадррики  $Q$ , а векторы  $e_1, \dots, e_n$  образуют евклидово ортонормальный базис пространства  $V$ . Умножая уравнение квадррики  $Q$  на ненулевую константу, мы можем считать, что в однородных координатах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  относительно выбранного базиса проективное замыкание  $\bar{Q} = V(q)$  квадррики  $Q$  задаётся диагональной квадратичной формой  $q(x) = -x_0^2 + b_1x_1^2 + \dots + b_nx_n^2$ . Каждые  $n$  пересекающихся в заданной точке  $a = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$  гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n \subset \mathbb{P}^n$  представляют собою набор из  $n$  точек проективного пространства  $a^\times = \mathbb{P}(\text{Ann } a) \subset \mathbb{P}(W^\times)$ , которое мы отождествим с  $\mathbb{P}(V^*)$ , сопоставив ненулевому ковектору  $\xi \in V^*$  проходящую через точку  $a$  гиперплоскость  $T_\xi$ , задаваемую в однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  линейным уравнением<sup>1</sup>

$$\xi(x_1, \dots, x_n) - \xi(a_1, \dots, a_n)x_0 = 0. \quad (9-7)$$

Попарная перпендикулярность плоскостей  $T_i$  означает, что отвечающие им по формуле (9-7) ковекторы  $\xi_i \in V^*$  образуют автополярный симплекс относительно двойственной к абсолютной квадррике  $A \subset \mathbb{P}(V)$  квадррики  $A^\times \subset \mathbb{P}(V^*)$ , имеющей единичную матрицу Грама  $E$  в базисе  $x_1, \dots, x_n$  пространства<sup>2</sup>  $V^*$ . Условие касания плоскостей  $T_i$  с квадррикой  $Q$  означает, что задающие эти плоскости линейные формы  $\xi_i - \xi_i(a)x_0$  из формулы (9-7) лежат на двойственной к  $\bar{Q}$  квадррике  $\bar{Q}^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$ , имеющей в базисе  $x_0, x_1, \dots, x_n$  пространства  $W^*$  диагональную матрицу Грама с диагональными элементами  $-1, b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1}$ . Ограничение этой формы на подпространство  $a^\times$  имеет в базисе из форм  $\eta_i = x_i - a_ix_0$ , где  $1 \leq i \leq n$ , матрицу Грама<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} b_1^{-1} - a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_2 & \dots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & b_2^{-1} - a_2^2 & -a_2a_3 & \dots & -a_2a_n \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & b_3^{-1} - a_3^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1}a_n \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \dots & -a_na_{n-1} & b_n^{-1} - a_n^2 \end{pmatrix}. \quad (9-8) \end{aligned}$$

Согласно теор. 6.2 на стр. 74 лежащий на такой квадррике набор точек  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , одновременно автополярный относительно квадррики с единичной матрицей Грама, существует если и только если матрица (9-8) бесследна. Точки  $a$ , для которых это условие выполняется, образуют сферу с тем же центром  $e_0$ , что и квадррика  $Q$ , и квадратом радиуса, равным  $\sum a_i^2 = \sum b_i^{-1}$ . Эта

<sup>1</sup>Иначе говоря, мы зафиксируем в проективном пространстве  $a^\times$  базис из  $n$  линейных форм  $\eta_i = x_i - a_ix_0$ , где  $1 \leq i \leq n$  и  $a_i$  обозначает  $i$ -тую аффинную координату точки  $a$  в зафиксированном выше базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ . В однородных координатах  $(z_1 : \dots : z_n)$  относительно базиса  $\eta_1, \dots, \eta_n$  гиперплоскость  $\Phi \in a^\times$  с координатами  $(\varphi_1 : \dots : \varphi_n)$  евклидово перпендикулярна гиперплоскости  $\Psi \in a^\times$  с координатами  $(\psi_1 : \dots : \psi_n)$  если и только если  $\sum \varphi_i\psi_i = 0$ .

<sup>2</sup>Или, что то же самое, в базисе пространства  $a^\times$ , состоящем из форм  $\eta_i = x_i - a_ix_0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>3</sup>Иначе говоря, значение квадратичной формы с матрицей Грама  $B^{-1}$  на паре линейных форм вида (9-7), построенных по ковекторам  $\varphi, \psi \in V^*$ , равно

$$(-\varphi(a) \varphi) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B_\infty^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\psi(a) \\ \psi^t \end{pmatrix} = -\varphi(a)\psi(a) + \varphi B_\infty^{-1}\psi^t.$$

сфера называется *ортооптической сферой* квадрики  $Q$ . Для эллипсоида квадрат радиуса ортооптической сферы равен сумме квадратов полуосей. Для гиперboloида он может оказаться отрицательным, и в этом случае множество вещественных точек ортооптической сферы пусто. Например, директор гиперболы на плоскости выглядит является непустой окружностью если и только если содержащий ветвь гиперболы угол между её асимптотами острый. При этом одна из двух перпендикулярных касательных, опущенных из каждой точки пересечения директора с асимптотами, касаются гиперболы в бесконечно удалённой точке. Для равнобокой гиперболы с перпендикулярными касательными на директоре имеется ровно одна вещественная точка — центр гиперболы, и опущенные из него касательные суть асимптоты. Если содержащий ветвь гиперболы угол между асимптотами тупой, директор имеет отрицательный радиус и не имеет вещественных точек.

**9.7.2. Параболоиды.** Пусть проективное замыкание  $\bar{P} \subset \mathbb{P}(W)$  параболоида  $P \subset \mathbb{A}(V)$  касается бесконечно удалённой гиперплоскости  $\mathbb{P}(V)$  в точке  $p$ . Обозначим через  $U = p^\perp \subset V$  евклидово ортогональное дополнение к одномерному подпространству  $p \subset V$ . Подпространство  $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  имеет коразмерность 2 в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  и сопряжение относительно гладкой квадрики  $\bar{P}$  задаёт на пучке проходящих через  $L$  гиперплоскостей  $H \subset \mathbb{P}(W)$  инволюцию<sup>1</sup>. Двумя неподвижными точками этой инволюции являются проходящие через  $L$  касательные гиперплоскости к квадрике  $\bar{P}$ . Одной из них является бесконечность  $L_\infty$ , касающаяся  $\bar{P}$  в точке  $p$ . Обозначим вторую гиперплоскость через  $L_0$ , и пусть она касается  $\bar{P}$  в точке  $c \in U_0 = \mathbb{A}(V)$ . Эта точка называется *вершиной*, а прямая  $(cp)$ , выходящая из вершины в направлении  $p \in \mathbb{P}(V)$ , называется *осью* параболоида  $P$ .

Так как подпространство  $U$  трансверсально к  $p$ , ограничение асимптотической квадратичной формы  $f_2$  квадрики  $P$  на подпространство  $U$  невырождено. Следовательно, в  $U$  существует евклидово ортонормальный базис  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , в котором форма  $f_2|_U$  имеет диагональную матрицу Грама с диагональными элементами, равными ненулевым собственным числам  $\alpha_i$  самосопряжённого оператора<sup>2</sup>  $\varphi_{f_2}$ , а ортонормальные векторы  $u_i$  являются собственными векторами этого оператора с собственными значениями  $\alpha_i$ . Поскольку прямая  $(cp)$  сопряжена подпространству  $L = \mathbb{P}(U)$  относительно квадрики  $\bar{P}$ , расширенная квадратичная форма  $q$ , задающая квадрику  $\bar{P}$ , ограничивается на неё невырождено, а значит, линейная оболочка изотропных векторов  $p \in V$  и  $c \in U_0$  является гиперболической плоскостью для квадратичной формы  $q$ . Аффинный репер с началом в вершине  $c$  и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_{n-1}, p$  называется *каноническим репером* параболоида  $P$ , если в аффинных координатах относительно этого репера параболоид  $P$  задаётся уравнением вида

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n, \quad (9-9)$$

где число положительных коэффициентов в левой части не меньше, чем число отрицательных, и каждый коэффициент  $a_i = -q(u_i, u_i) / \tilde{q}(c, p) = -f_2(u_i, u_i) / \tilde{q}(c, p) = -\alpha_i / \tilde{q}(c, p)$ , где  $\alpha_i$  — ненулевое собственное значение оператора  $\varphi_{f_2}$  на собственном векторе  $u_i$ . Условие на знаки коэффициентов в левой части (9-9) однозначно фиксирует направление  $n$ -того единичного базисного вектора  $p \in V$ . Если все собственные числа асимптотической матрицы Грама  $B_\infty$  различны, то канонический репер параболоида единствен с точностью до перенумерации и смены

<sup>1</sup>Которая переводит две плоскости друг в друга если и только если каждая из них проходит через полюс другой, см. п° 6.1 на стр. 69.

<sup>2</sup>Или, что то же самое, асимптотической матрицы Грама  $B_\infty$ .

знаков первых  $(n - 1)$  базисных векторов. Так как ни собственные значения оператора  $\varphi_{f_2}$ , ни значение симметричной билинейной формы  $\tilde{q}$  на *однозначно* определяемых параболоидом  $P$  векторах  $c \in U_0 = e_0 + V$  и  $p \in V$  не зависят от выбора канонического репера, набор коэффициентов  $a_i$  канонического уравнения (9-9) с точностью до перенумерации не зависит от выбора канонического репера и является полным евклидовым инвариантом параболоида: один гиперболоид переводится в другой движением объемлющего евклидова пространства если и только если они имеют одинаковые с точностью до перестановки наборы коэффициентов  $a_i$  канонических уравнений (9-9).

Пример 9.5 (ортооптическая плоскость)

В отличие от центральных квадрик, для параболоида  $P \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  ГМТ пересечения  $n$ -ок его попарно перпендикулярных касательных гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n$  представляет собою не сферу, а гиперплоскость, которая называется *директрисой* параболоида или *ортооптической плоскостью*. Чтобы убедиться в этом, надо повторить вычисление из [прим. 9.4](#) на стр. 117, взяв в качестве базиса в  $W = \mathbb{R} e_0 \oplus V$  канонический базис параболоида  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , в котором вектор  $e_0 \in P$  является вершиной параболоида, вектор  $e_n \in V$  является точкой касания проективного замыкания  $\bar{P}$  с гиперплоскостью  $L_\infty$ , прямая  $(e_0 e_n)$  полярна относительно  $\bar{P}$  линейной оболочке векторов  $e_i$  с  $1 \leq i \leq n - 1$ , а векторы  $e_1, \dots, e_{n-1}$  образуют евклидово ортонормальный базис пространства  $V$ . Умножая уравнение параболоида на ненулевую константу, можно считать, что в однородных координатах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  его матрица Грама имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & b_1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9-10)$$

Пространство  $a^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$  проходящих через точку  $a = (1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}(V)$  гиперплоскостей  $T \subset \mathbb{P}(W)$  состоит, как и в [прим. 9.4](#), из точек вида  $\xi - \xi(a) x_0 \in W^*$ , где  $\xi$  пробегает  $V^*$ , но рассматривается как линейная форма на  $W$ , аннулирующая базисный вектор  $e_0$ . Попарная перпендикулярность друг другу  $n$ -ки таких гиперплоскостей  $T_1, \dots, T_n \in a^\times$  означает, что отвечающие им  $n$  линейных форм  $\xi_i$  составляют автополярный относительно евклидовой квадрики  $A^\times$  набор точек в  $\mathbb{P}(V^*)$ . Ограничение двойственной к (9-10) квадратичной формы на гиперплоскость  $a^\times$  имеет в базисе из форм  $\eta_i = x_i - a_i x_0$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & b_1^{-1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & & 0 & a_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & b_{n-1}^{-1} & & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & & 2a_n \end{pmatrix} \quad (9-11)$$

и наличие на такой квадрике  $n$  автополярных относительно единичной матрицы точек равносильно бесследности<sup>1</sup> матрицы (9-11), только теперь это условие выражается линейным по  $a$

<sup>1</sup>См. теор. 6.2 на стр. 74.

уравнением  $-2a_n = b_1^{-1} + \dots + b_{n-1}^{-1}$ , которое задаёт гиперплоскость, перпендикулярную оси параболоида и находящуюся от его вершины на расстоянии  $|b_1^{-1} + \dots + b_{n-1}^{-1}|$ . Полюс этой гиперплоскости называется *фокусом* параболоида.

**9.7.3. Конусы.** Каноническим репером аффинного конуса  $C \subset A(V)$  называется система координат с началом в вершине  $c$  конуса и евклидово ортонормальными базисными векторами  $u_1, \dots, u_n$ , которые являются собственными векторами невырожденного самосопряжённого оператора  $\varphi_{f_2}$ . Аффинное уравнение конуса в этой системе координат имеет вид

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0. \quad (9-12)$$

Набор коэффициентов  $(a_1 : \dots : a_n)$  пропорционален набору  $(\alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  собственных чисел самосопряжённого оператора  $\varphi_{f_2}$ . Конус является двойной точкой если и только если все коэффициенты  $a_i$  одинакового знака. Отличный от двойной точки конус является линейным соединением вершины  $c$  и непустой гладкой квадрики в  $L_\infty = \mathbb{P}(V)$ , которая задаётся в базисе  $u_1, \dots, u_n$  тем же самым уравнением (9-12). Поскольку непустая гладкая вещественная проективная квадрика определяет своё уравнение однозначно с точностью до пропорциональности, два отличных от двойной точки конуса евклидово конгруэнтны если и только если наборы собственных чисел  $(\alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  асимптотических квадратичных форм  $f_2$  их аффинных уравнений в произвольном ортонормальном базисе отличаются друг из друга перестановкой элементов и умножением всех элементов на одну и ту же ненулевую константу.

## §10. Линейные отображения евклидовых пространств

В этом параграфе всюду за исключением алгебраических добавлений из н° 10.3 и н° 10.4 речь идёт про конечномерные евклидовы пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$ . Евклидово скалярное произведение векторов  $u, w \in V$  обозначается через  $(u, w)$  или  $u \cdot w$ .

**10.1. Сингулярные числа и сингулярные направления.** Напомню, что с каждым линейным отображением  $f : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  связано *евклидово сопряжённое* отображение  $f^\times : W \rightarrow U$ , однозначно характеризуемое тем, что  $(fu, w) = (u, f^\times w)$  для всех  $u \in U$  и  $w \in W$ . Матрицы  $F_{wu}$  и  $F_{uw}^\times$  этих отображений в базисах  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  и  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  пространств  $U$  и  $W$  связаны с матрицами Грама  $G_u = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}$  и  $G_w = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$  этих базисов соотношением

$$F_{wu}^t G_w = G_u F_{uw}^\times, \quad (10-1)$$

которое получается подстановкой  $(fu_1, \dots, fu_n) = \mathbf{w} F_{wu}$  и  $(f^\times w_1, \dots, f^\times w_n) = \mathbf{u} F_{uw}^\times$  в равенство  $(fu_1, \dots, fu_n)^t \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u}^t \cdot (f^\times w_1, \dots, f^\times w_n)$ , имеющее место по определению сопряжённого оператора. В частности, матрицы евклидово сопряжённых операторов, записанные в произвольных ортонормальных базисах пространств  $U, W$ , транспонированы друг другу:  $F^\times = F^t$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 10.1.** Убедитесь, что сопряжённое к  $f : U \rightarrow W$  отображение  $f^\times : W \rightarrow U$  раскладывается в композицию  $f^\times = \varepsilon_U^{-1} \circ f^* \circ \varepsilon_W$ , где  $\varepsilon_U : U \simeq U^*$  и  $\varepsilon_W : W \simeq W^*$  — корреляции<sup>1</sup>, задаваемые евклидовыми структурами на  $U$  и  $W$ , а  $f^* : W^* \rightarrow U^*$ ,  $\xi \mapsto \xi \circ f$ , — двойственное к  $f$  отображение.

Поскольку для любой пары линейных отображений  $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$  и всех  $u \in U$  и  $w \in W$  выполняются равенства  $(gfu, w) = (fu, g^\times w) = (u, f^\times g^\times w)$ , сопряжение является антигомоморфизмом по отношению к композиции, т. е.  $(gf)^\times = f^\times g^\times$ , что согласуется с равенством  $(GF)^t = F^t G^t$  между матрицами этих отображений в ортонормальных базисах.

**УПРАЖНЕНИЕ 10.2.** Покажите, что  $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$ .

**ЛЕММА 10.1**

Для любого линейного отображением  $f : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  обе композиции  $ff^\times \in \operatorname{End}(W)$ ,  $f^\times f \in \operatorname{End}(U)$  являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение  $f$  сюръективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора  $ff^\times$  (соотв.  $f^\times f$ ) строго положительны.

**Доказательство.** Самосопряжённость операторов  $ff^\times$  и  $f^\times f$  очевидна. По лем. 2.5 на стр. 26 все их собственные числа вещественны. Если для некоторого ненулевого вектора  $w \in W$  выполняется равенство  $ff^\times w = \lambda w$ , то  $(f^\times w, f^\times w) = (ff^\times w, w) = \lambda \cdot (w, w)$  и либо  $w \in \ker f^\times$  и  $\lambda = 0$ , либо  $\lambda = (f^\times w, f^\times w) / (w, w) > 0$ . Аналогично, если  $f^\times f u = \mu u$  для ненулевого  $u \in U$ , то либо  $\mu = 0$  и  $u \in \ker f$ , либо  $\mu = (fu, fu) / (u, u) > 0$ . Поэтому все ненулевые собственные числа обоих операторов положительны. Если отображение  $f$  сюръективно, то по упр. 10.2  $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp = 0$  и, стало быть, все собственные числа оператора  $ff^\times$  положительны. Наоборот, если  $\operatorname{im} f \neq W$ , то  $\ker ff^\times \supset \ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp \neq 0$ . Аналогично, если  $\ker f = 0$ , то все собственные числа оператора  $f^\times f$  строго положительны, и наоборот, если  $\ker f \neq 0$ , то и  $\ker f^\times f \supset \ker f \neq 0$ .  $\square$

<sup>1</sup>См. н° 1.2.2 на стр. 7.

## ТЕОРЕМА 10.1

Каждое линейное отображение  $f : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$  единственным образом раскладывается в композицию  $f = \iota_f \circ \delta_f \circ \pi_f$  ортогональной проекции  $\pi_f : U \rightarrow V$  на ортогональное дополнение  $V \stackrel{\text{def}}{=} \ker^\perp f$  к ядру  $\ker f \subset U$ , невырожденного самосопряжённого оператора  $\delta_f : V \rightarrow V$  с положительными собственными значениями  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , где  $r = \text{rk } f = \dim \text{im } f$ , и изометрического вложения  $\iota_f : V \hookrightarrow W$ . При этом набор  $\alpha_1^2, \dots, \alpha_r^2$  квадратов собственных чисел оператора  $\delta_f$  является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора  $f^\times f : U \rightarrow U$ .

Доказательство. Согласно предл. 2.2 на стр. 25 в евклидовом пространстве  $U$  имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов  $u_1, \dots, u_n$  самосопряжённого линейного оператора  $f^\times f : U \rightarrow U$ , причём все собственные значения этого оператора неотрицательны по лем. 10.1, т. е.  $f^\times f u_i = \alpha_i^2 u_i$  для некоторых вещественных  $\alpha_i \geq 0$ . Перенумеруем базис так, чтобы  $\alpha_i \neq 0$  при  $1 \leq i \leq r$  и  $\alpha_i = 0$  при  $i > r$ . Тогда, как мы видели в доказательстве лем. 10.1, все векторы  $u_i$  с  $i > r$  лежат в ядре отображения  $f$ . Напротив, при  $1 \leq i, j \leq r$  равенства

$$(f u_i, f u_j) = (f^\times f u_i, u_j) = \alpha_i^2 (u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы  $w_i = f u_i / \alpha_i$  образуют в пространстве  $W$  ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как  $f(u_j) = 0$  при  $j > r$ , для любого  $u = \sum x_i u_i \in U$  выполняется равенство  $f(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$ , т. е. векторы  $w_i$  с  $1 \leq i \leq r$  составляют ортонормальный базис в  $\text{im } f$ , а векторы  $u_i$  с  $1 \leq i \leq r$  — ортонормальный базис в ортогональном дополнении  $V$  к ядру  $\ker f$ . Оператор  $f$  является композицией изометрического изоморфизма  $\iota_f : V \xrightarrow{\cong} \text{im } f$ ,  $u_i \mapsto w_i$ , диагонального оператора  $\delta_f : V \rightarrow V$ ,  $u_i \mapsto \alpha_i u_i$ , и ортогональной проекции  $\pi_f : U \rightarrow V$  вдоль  $\ker f$ .

Если имеется какое-либо ещё разложение  $f = \iota \circ \delta \circ \pi_f$ , где  $\pi_f : U \rightarrow V$  — ортогональная проекция вдоль  $\ker f$ , то из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство  $V$  является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств  $V_i$  оператора  $f^\times f$ , отвечающих ненулевым собственным значениям  $\alpha_i^2$  этого оператора, а композиция  $\iota \delta : V \rightarrow \text{im } f$  совпадает с ограничением  $f|_V$ . Поскольку  $\delta^\times = \delta$  как операторы  $V \rightarrow V$ , а  $\iota^\times = \iota^{-1}$  как изометрические операторы  $\text{im } f \rightarrow V$ , мы заключаем, что  $f^\times f|_V = \delta^2$ . Так как оператор  $\delta^2$  диагонализуется в том же самом базисе, что и  $\delta$ , мы заключаем, что самосопряжённый оператор  $\delta$  действует на каждом подпространстве  $V_i$  умножением на  $\alpha_i$  и, тем самым, определяется по  $f$  однозначно. А тогда и  $\iota = \delta^{-1} \circ f|_V : V \rightarrow W$  определяется однозначно.  $\square$

Упражнение 10.3. Убедитесь, что оператор  $f^\times : W \rightarrow V$  действует на построенные в доказательстве теор. 10.1 векторы  $w_1, \dots, w_r \in W$  по правилу  $w_i \mapsto \alpha_i u_i$  и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов  $f^\times f$  и  $f f^\times$  одинаковы.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (сингулярные числа и сингулярные направления)

В условиях теор. 10.1 набор из  $\dim U$  неотрицательных квадратных корней  $\alpha_i$  из собственных значений самосопряжённого оператора  $f^\times f : U \rightarrow U$  называется набором сингулярных чисел линейного отображения  $f : U \rightarrow W$  между евклидовыми пространствами  $U, W$ . Ровно  $\text{rk } f$  из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства<sup>1</sup> оператора  $f^\times f$  называются сингулярными направлениями отображения  $f$ .

<sup>1</sup>Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.

ПРИМЕР 10.1 (ЭТИМОЛОГИЯ ЭПИТЕТА «СИНГУЛЯРНЫЙ»)

Свяжем с отображением  $f: U \rightarrow W$  функцию  $\varphi: U \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto (fu, fu)/(u, u)$ . Покажем, что её производная зануляется ровно на собственных направлениях оператора  $f^\times f$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Покажите, что  $(u, u)'(v) = 2(u, v)$  и  $(fu, fu)'(v) = 2(fu, fv) = 2(f^\times fu, v)$ .

Согласно правилу дифференцирования дробей, условие  $\varphi'(u) = 0$  равносильно тому, что для любого  $v \in V$  выполняется равенство  $2(f^\times fu, v)(u, u) - 2(fu, fu)(u, v) = 0$ , означающее, что  $f^\times fu = u \cdot (fu, fu)/(u, u)$ , т. е. что вектор  $u$  является собственным для оператора  $f^\times f$  с собственным значением  $(fu, fu)/(u, u) = (f^\times fu, u)/(u, u)$ .

СЛЕДСТВИЕ 10.1 (ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Каждое биективное линейное преобразование  $f \in GL(V)$  евклидова пространства  $V$  допускает единственное разложение  $f = gh$ , в котором оператор  $g \in O(V)$  ортогонален, а  $h \in GL(V)$  самосопряжён и имеет положительные собственные значения. Квадраты этих собственных значений являются собственными числами оператора  $f^\times f$ .

Доказательство. Поскольку оператор  $f$  биективен, правый член его канонического разложения  $f = \iota_f \circ \delta_f \circ \pi_f$  из теор. 10.1 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор  $h = \delta_f$  не имеет ядра. Следовательно его собственные числа строго положительны.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. (ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ  $g$  И  $h$ ) Компоненты  $g \in O(V)$  и  $h$  полярного разложения  $f = gh$  однозначно находятся из условий  $g^\times g = \text{Id}_V$  и  $h^\times = h$ . А именно,  $f^\times f = h^\times g^\times gh = h^2$ , откуда  $h = \sqrt{f^\times f}$  и  $g = fh^{-1}$ . Отметим, что так как нуль не является собственным числом оператора  $f^\times f$ , аналитическая вне нуля функция  $\sqrt{t}$  алгебраически вычислима на операторе  $f^\times f$  при помощи стандартной интерполяционной процедуры, известной из курса алгебры<sup>1</sup>.

УПРАЖНЕНИЕ 10.5. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор  $f \in GL(V)$  на евклидовом пространстве  $V$  также допускает единственное разложение  $f = sr$ , в котором  $r \in O(V)$ , а  $s$  самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора  $f f^\times$ .

ПРИМЕР 10.2

Найдём полярное разложение  $f = gh$  для оператора  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе. Поскольку  $\det F = -4$ , оператор  $f$  невырожден. Самосопряжённый оператор  $f^\times f$  имеет матрицу

$$C = F^t F = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след  $\text{tr}(C) = 9$ , сумма главных  $2 \times 2$ -миноров

$$\det \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

<sup>1</sup>На всякий случай я напомним её в алгебраическом добавлении из н° 10.4 ниже.

равна 24, определитель  $\det(C) = \det^2 F = 16$  и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t - 1)(t - 4)^2.$$

Так как оператор  $f^{\times}f$  диагонализуем, он аннулируется многочленом  $(t - 1)(t - 4)$ . Следовательно, матрица  $H = \sqrt{C}$  самосопряжённого сомножителя  $h$  полярного разложения  $f = gh$  имеет вид<sup>1</sup>  $aE + bC$ , где интерполяционный многочлен  $p(t) = a + bt$  для вычисления функции  $\sqrt{t}$  на матрице  $C$  однозначно определяется тем, что  $p(1) = \sqrt{1} = 1$  и  $p(4) = \sqrt{4} = 2$ , т. е.  $a + b = 1$  и  $a + 4b = 2$ , откуда  $a = 2/3$ ,  $b = 1/3$ . Таким образом, полярное разложение имеет вид  $F = GH$ , где самосопряжённая матрица  $H = \sqrt{C}$  равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а ортогональная матрица  $G = FH^{-1}$  равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 10.6. Убедитесь, что  $G^t G = E$ .

СЛЕДСТВИЕ 10.2 (SVD-РАЗЛОЖЕНИЕ<sup>2</sup>)

Каждая вещественная прямоугольная матрица  $F \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  раскладывается в произведение  $F = T_m D T_n$ , в котором матрицы  $T_m \in O_m$  и  $T_n \in O_n$  ортогональны, а  $m \times n$ -матрица  $D = (d_{ij})$  диагональна и неотрицательна в том смысле, что  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , а все  $d_{ii} \geq 0$ . При этом ровно  $\text{rk } F$  диагональных элементов матрицы  $D$  отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать  $F = F_{mn}$  как матрицу оператора  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , записанную в стандартных базисах  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}$  пространств  $U = \mathbb{R}^n$  и  $W = \mathbb{R}^m$  соответственно. Обозначим через  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  ортонормальный базис пространства  $U$ , построенный в доказательстве теор. 10.1, а через  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  — любой ортонормальный базис пространства  $W$ , содержащий ортонормальный набор векторов  $w_i = fu_i / \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , из доказательства теор. 10.1. Оператор  $f : u_i \mapsto \alpha_i w_i$  задаётся в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  диагональной матрицей  $D = F_{wu}$ , ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  оператора  $f$ . Поэтому  $F = F_{mn} = C_{mw} F_{wu} C_{un}$ , где  $C_{mw}$  — ортогональная матрица перехода от базиса  $\mathbf{w}$  к стандартному базису  $\mathbf{m}$  в  $\mathbb{R}^m$ , а  $C_{un} = C_{nu}^{-1} = C_{nu}^t$  — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса  $\mathbf{n}$  в  $\mathbb{R}^n$  к базису  $\mathbf{u}$ . Для любого другого разложения  $F = T_m A T_n$  с ортогональными  $T_n, T_m$  и диагональной матрицей  $A$  имеем  $F^t F = T_n^{-1} A^t A T_n$ . Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные числа, стоящие на диагонали диагональной матрицы  $A^t A$  квадраты диагональных элементов матрицы  $A$  суть собственные числа матрицы  $F^t F$ .  $\square$

<sup>1</sup>По поводу вычисления функций от операторов см. алгебраическое добавление из н° 10.4 на стр. 132 ниже, в частности, ?? на стр. ??.

<sup>2</sup>«SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

**10.2. Инвариантные углы между подпространствами.** Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^k$  пару векторных подпространств  $U, W$  размерностей  $\dim U = n \leq m = \dim W$  и обозначим через  $\pi : U \rightarrow W$  ортогональную проекцию вдоль  $W^\perp$ . Пусть эта проекция имеет сингулярные числа  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ . Так как  $|\pi u| = |u| \cdot \cos \angle(\pi u, u)$  для всех  $u \in U$ , числа  $\alpha_i = \cos \varphi_i$  являются косинусами неубывающих углов

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \pi/2, \quad \varphi_i = \angle(w_i, u_i), \quad (10-2)$$

между векторами  $u_1, u_2, \dots, u_n$  некоторого ортонормального базиса  $\mathbf{u}$  в  $U$  и первыми  $n$  векторами такого ортонормального базиса  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  в  $W$ , что вектор  $\pi u_i$  пропорционален вектору  $w_i$  при  $1 \leq i \leq n$ , причём по теор. 10.1 этот набор углов не зависит от выбора ортонормального базиса в  $U$ , проектирующегося в ортогональный набор векторов из  $W$ . Поэтому углы (10-2) называются *инвариантными углами* между подпространствами  $U, W$ .

Мы будем обозначать набор инвариантных углов через  $\angle(U, W) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ .

**Предложение 10.1**

Максимальное значение скалярного произведения  $(u, w)$  всевозможных пар векторов  $u \in U, w \in W$  единичной длины  $|u| = |w| = 1$  равно максимальному сингулярному числу ортогональной проекции  $\pi : U \rightarrow W$  вдоль  $W^\perp$ . Минимальный угол  $\angle(u, w)$  между ненулевыми векторами  $u \in U, w \in W$  достигается на сингулярном направлении  $u_1$  проекции  $\pi$  с максимальным коэффициентом растяжения  $\alpha_1$  и его ортогональной проекцией  $w_1 = \pi(u_1)/\alpha_1$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать второе утверждение, первое является его переформулировкой. Пусть ортонормальные базисы  $u_1, \dots, u_n \in U$  и  $w_1, \dots, w_m \in W$  таковы, что

$$\pi u_i = \alpha_i w_i \quad \text{при } 1 \leq i \leq n.$$

Так как  $u_i = w_i + w'_i$  для некоторых векторов  $w'_1, \dots, w'_n \in W^\perp$ , мы имеем при всех  $i \neq j$  соотношения ортогональности  $(u_i, w_j) = 0$ , из которых в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца вытекает, что для любых  $u = \sum x_i u_i$  и  $w = \sum y_j w_j$  длины  $|u| = |w| = 1$

$$\begin{aligned} (u, w) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i (u_i, w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \leq \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \\ &\leq \alpha_1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \leq \alpha_1 |u| |w| = \alpha_1 = (u_1, w_1). \end{aligned}$$

□

**Упражнение 10.7.** Выведите существование минимального угла  $\angle(u, w)$  между ненулевыми векторами  $u \in U, w \in W$  из компактности сферы и непрерывности скалярного произведения.

**Пример 10.3 (угол между прямой и подпространством)**

Если пространство  $U = \mathbb{R}u$  одномерно, то оно само и является единственным сингулярным направлением ортогональной проекции  $\pi : U \rightarrow W$ . Если евклидова длина  $|u| = 1$ , то

$$\alpha = \cos \angle(u, W) = \cos \angle(u, u_W) = \sqrt{(u, u_W)}, \quad \text{где } u_W = \pi(u),$$

является единственным сингулярным числом. По предл. 10.1 угол  $\angle(u, u_W)$  является минимальным среди углов  $\angle(u, w)$  по всем ненулевым  $w \in W$ . Два крайних значения  $\angle(u, u_W) = 0$  и

$\angle(u, u_W) = \pi/2$  возникают при  $u_W = u$  и  $u_W = 0$ , т. е. при  $u \in W$  и  $u \in W^\perp$ . Во втором случае вектор  $u$  перпендикулярен сразу всем ненулевым векторам из  $W$ . Если же угол  $\angle(u, u_W)$  ненулевой и острый, то он является абсолютно минимальным, т. е. для всех не пропорциональных  $u_W$  векторов  $w \in W$  выполняется строгое неравенство  $\angle(u, w) > \angle(u, u_W)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Выведите все эти факты из свойств ортогональной проекции<sup>1</sup> без ссылок на предл. 10.1.

Если в пространстве  $W$  задан какой-нибудь<sup>2</sup> базис  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , то согласно форм. (1-16) на стр. 12 ортогональная проекция вектора  $u$  на  $W$  вычисляется по формуле  $u_W = \sum_{i=1}^m w_i (w_i^\times, u)$ , где  $\mathbf{w}^\times = (w_1^\times, \dots, w_m^\times) = \mathbf{w} G_w^{-1}$  — евклидово двойственный к  $\mathbf{e}$  базис<sup>3</sup> в  $W$ . Поэтому

$$\cos^2 \angle(u, W) = (u_W, u) = \sum_{i=1}^m (w_i^\times, u) (w_i, u) = G_{u\mathbf{w}^\times} G_{\mathbf{w}u} = G_{u\mathbf{w}} G_w^{-1} G_{\mathbf{w}u},$$

где взаимные матрицы Грама  $G_{u\mathbf{w}}$ ,  $G_{u\mathbf{w}^\times}$  и  $G_{\mathbf{w}u}$  суть две строки и столбец, составленные из скалярных произведений  $(u, w_j)$ ,  $(u, w_j^\times)$  и  $(w_i, u)$  соответственно.

Альтернативный способ отыскания угла  $\angle(u, W)$  заключается в том, что в натянутом на векторы  $u, w_1, \dots, w_m$  параллелепипеде длина опущенной из вершины  $u$  на грань  $w_1, \dots, w_m$  высоты равна, с одной стороны, произведению  $|u| \sin \angle(u, W)$ , а с другой стороны — отношению объёма параллелепипеда к объёму грани, откуда

$$\sin \angle(u, W) = \sqrt{\frac{\det G_{u, w_1, \dots, w_m}}{(u, u) \det G_{w_1, \dots, w_m}}},$$

где через  $G_{u, w_1, \dots, w_m}$  и  $G_{w_1, \dots, w_m}$  обозначены матрицы Грама набора векторов  $u, w_1, \dots, w_m$  и набора векторов  $w_1, \dots, w_m$  соответственно.

ПРИМЕР 10.4 (явные формулы в общем случае)

Если в пространствах  $U$  и  $W$  заданы (не обязательно ортонормальные) базисы

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = \mathbf{e} C_{eu} \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) = \mathbf{e} C_{ew},$$

где  $\mathbf{e}$  — стандартный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ , то набор ортогональных проекций

$$\mathbf{u}_W = (u_{1W}, \dots, u_{nW})$$

базисных векторов пространства  $U$  на пространство  $W$  выражается через базис  $\mathbf{w}$  по формуле<sup>4</sup>  $\mathbf{u}_W = \mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{w} G_w^{-1} G_{\mathbf{w}u}$ , где  $G_{\mathbf{w}u} = C_{ew}^t C_{eu}$  — взаимная матрица Грама<sup>5</sup> наборов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{u}$ . Таким образом, проектор  $\pi : U \rightarrow W$  имеет в базисах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  матрицу

$$P_{\mathbf{w}u} = G_w^{-1} G_{\mathbf{w}u} = G_w^{-1} C_{ew}^t C_{eu}.$$

<sup>1</sup>См. предл. 1.4 на стр. 12.

<sup>2</sup>Не обязательно ортонормальный.

<sup>3</sup>См. н° 1.3.1 на стр. 9.

<sup>4</sup>Как и выше, точкой обозначается произведение матриц из векторов, при вычислении которого векторы перемножаются скалярно. Обратите внимание, что левое произведение в формуле  $\mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u})$  это произведение матрицы из векторов на числовую матрицу  $\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}$ , и его не следует путать со скалярным произведением матриц из векторов: равенство « $\mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^{\times t}) \mathbf{u}$ » категорически неверно!

<sup>5</sup>См. н° 1.2.1 на стр. 6.

Согласно форм. (10-1) на стр. 122 евклидово сопряжённый к нему оператор имеет в тех же базисах матрицу  $\Pi_{uw}^\times = G_u^{-1} \Pi_{wu}^t G_w = G_u^{-1} G_{wu}^t = G_u^{-1} G_{uw}$ . Тем самым, квадраты косинусов инвариантных углов  $\angle(U, W)$  суть собственные числа симметричной матрицы

$$\Pi_{uw}^\times \Pi_{wu} = G_u^{-1} G_{uw} G_w^{-1} G_{wu} = G_{u \times w} \times G_{wu}.$$

ПРИМЕР 10.5 (индуктивное геометрическое описание инвариантных углов)

Ортонормальные базисы в  $U$  и  $W$ , пригодные для вычисления  $\angle(U, W)$ , можно получить при помощи следующей индуктивной геометрической процедуры. Сначала выберем произвольный ортонормальный базис  $u_1, \dots, u_{i-1}$  в пересечении  $U \cap W$  и положим  $V_i = (U \cap W)^\perp$ ,  $U_i = U \cap V_i$ ,  $W_i = W \cap V_i$ . Также положим  $w_\nu = u_\nu$  при  $\nu \leq i-1$ . По предл. 10.1 (или по упр. 10.7) угол  $\angle(u, w)$  между переменными векторами  $u \in U_i$ ,  $w \in W_i$  единичной длины  $|u| = |w| = 1$  достигает своего ненулевого минимума на некоторой паре векторов  $u_i, w_i$ . Добавим векторы  $u_i$  и  $w_i$  в уже имеющиеся базисы  $u_1, \dots, u_{i-1}$  и  $w_1, \dots, w_{i-1}$ , обозначим через  $V_{i+1} \subset V_i$  ортогональное дополнение к плоскости, порождённой векторами  $u_i$  и  $w_i$ , положим  $U_{i+1} = U_i \cap V_{i+1}$ ,  $W_{i+1} = W_i \cap V_{i+1}$  и продолжим по индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2

Пара векторных подпространств  $U', W'$  евклидова пространства тогда и только тогда переводится ортогональным линейным преобразованием в пару подпространств  $U'', W''$ , когда

$$\dim U' = \dim U'', \quad \dim W' = \dim W'' \quad \text{и} \quad \angle(U', W') = \angle(U'', W'') \quad (10-3)$$

Доказательство. Необходимость равенств (10-3) очевидна. Если они выполняются, то

$$\dim(U' + W') = \dim(U'' + W'') \quad \text{и} \quad \dim(U' \cap W') = \dim(U'' \cap W'').$$

Поэтому существует такое ортогональное преобразование  $g$  объёмлющего евклидова пространства, что  $g(U' + W') = U'' + W''$ ,  $g(U' \cap W') = U'' \cap W''$  и  $g(W') = W''$ . Тем самым, можно считать, что  $W' = W''$ , объёмлющее евклидово пространство является прямой суммой пространства  $W = W' = W''$  и его ортогонального дополнения  $W^\perp$ , а подпространства  $U', U'' \subset W \oplus W^\perp$  имеют нулевое пересечение с  $W$  и размерность  $\dim U' = \dim U'' = \dim W^\perp$ . В этом случае ортогональные проекции подпространств  $U'$  и  $U''$  на  $W^\perp$  вдоль  $W$  являются линейными изоморфизмами. Согласно предыдущему, в пространствах  $U'$  и  $U''$  имеются ортонормальные базисы из векторов вида  $u'_i = w'_i + v'_i$  и  $u''_i = w''_i + v''_i$ , где векторы  $w'_i$  и  $w''_i$  составляют части двух ортонормальных базисов пространства  $W$ , векторы  $v'_i$  и  $v''_i$  образуют два (возможно, не ортонормальных) базиса в  $W^\perp$ , и при всех  $i$  и всех  $i \neq j$  выполняются соотношения

$$(u'_i, w'_i) = \alpha_i = (u''_i, w''_i) \quad \text{и} \quad (u'_i, w'_j) = 0 = (u''_i, w''_j),$$

из которых вытекает, что базисы пространства  $W^\perp$ , состоящие из векторов  $v'_i = u'_i - w'_i$  и из векторов  $v''_i = u''_i - w''_i$  оба ортогональны и имеют одинаковые скалярные квадраты базисных векторов  $(v'_i, v'_i) = (v''_i, v''_i) = 2 - 2\alpha_i$ . Поэтому линейное преобразование пространства  $W \oplus W^\perp$ , переводящее  $w'_i$  в  $w''_i$ , а  $v'_i$  — в  $v''_i$  является ортогональным. Оно переводит подпространство  $U'$  в подпространство  $U''$ .  $\square$

**10.3. Алгебраическое дополнение I: аннулирующие многочлены.** Напомню, что линейный оператор  $F : V \rightarrow V$ , действующий в векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ , можно подставить вместо переменной  $t$  в любой многочлен  $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{k}[t]$ . Результатом такой подстановки по определению является линейный оператор

$$f(F) = a_0 \text{Id}_V + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_m F^m \in \text{End}(V).$$

Подставляя фиксированный оператор  $F \in \text{End } V$  во всевозможные многочлены  $f \in \mathbb{k}[t]$ , мы получаем гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(V)$ ,  $f \mapsto f(F)$ , который называется *гомоморфизмом вычисления* многочленов на операторе  $F$ . Многочлены  $f$ , лежащие в ядре этого гомоморфизма, т. е. такие, что  $f(F) = 0$ , называются *аннулирующими* оператор  $F$ . Если  $\dim V < \infty$ , алгебра  $\text{End } V$  конечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , а алгебра  $\mathbb{k}[t]$  бесконечномерна. Поэтому  $\ker \text{ev}_F \neq 0$ , т. е. любой оператор на конечномерном пространстве аннулируется некоторым ненулевым многочленом. Такой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1 обозначается  $\mu_F$  и называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ . Поскольку все идеалы кольца  $\mathbb{k}[t]$  главные, ядро  $\ker \text{ev}_F = (\mu_F)$  состоит из всех многочленов, делящихся на  $\mu_F$ . Следующий пример показывает, что  $\deg \mu_F \leq \dim V$ .

**Пример 10.6** (тождество Гамильтона–Кэли)

Обозначим через  $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$  кольцо многочленов с целыми коэффициентами от  $n^2$  коммутирующих переменных  $a_{ij}$ , а через  $K[t]$  — кольцо многочленов с коэффициентами из  $K$  от ещё одной переменной  $t$ , коммутирующей со всеми переменными  $a_{ij}$ . Кольцо  $n \times n$  матриц  $\text{Mat}_n(K[t])$  с элементами из кольца многочленов  $K[t]$  совпадает с кольцом многочленов  $\text{Mat}_n(K)[t]$  с коэффициентами в кольце матриц  $\text{Mat}_n(K)$ , поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от  $t$ , можно записать как многочлен от  $t$  с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  матрицу из элементов  $a_{ij}$ . В кольце  $\text{Mat}_n(K[t])$  выполняется равенство<sup>1</sup>

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee, \quad (10-4)$$

в котором  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ , а  $(tE - A)^\vee$  — присоединённая к  $(tE - A)$  матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $tE - A$ . Многочлен  $\chi_A(t) = \det(tE - A) = t^n - \text{tr}(A)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A \in K[t]$  называется *характеристическим* многочленом матрицы  $A$ . Перепишывая (10-4) в виде равенства между многочленами от  $t$  с коэффициентами в кольце матриц  $\text{Mat}_n(K)$ :

$$t^n E - \text{tr}(A) t^{n-1} E + \dots + (-1)^n \det A E = (tE - A) (t^m A_m^\vee + \dots + t A_1^\vee + A_0^\vee),$$

где  $A_i^\vee \in \text{Mat}_n(K)$  — некоторые матрицы, и подставляя в него  $t = A$ , получаем в кольце  $\text{Mat}_n(K)$  равенство  $\chi_A(A) \cdot E = 0$ , откуда  $\chi_A(A) = 0$ . Таким образом, каждый линейный оператор  $F$  аннулируется своим характеристическим многочленом  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ .

<sup>1</sup>Это частный случай соотношения Лапласа из форм. (3-12) на стр. 33, возникающий при  $m = 1$ , когда  $L^m A = A$ , а  $L^{n-m} A = A^\vee = \hat{A}^t$  — матрица, транспонированная к матрице, состоящей из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $A$ .

ТЕОРЕМА 10.2 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на произвольном<sup>1</sup> векторном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{k}$  аннулируется многочленом  $q \in \mathbb{k}[t]$ , который раскладывается над полем  $\mathbb{k}$  в произведение  $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$  попарно взаимно простых многочленов  $q_i \in \mathbb{k}[t]$ . Положим  $Q_j = q/q_j$ . Тогда  $\ker q_j(F) = \operatorname{im} Q_j(F)$  для каждого  $j$ , все эти подпространства  $F$ -инвариантны, и пространство  $V$  является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как  $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$ , имеем включение  $\operatorname{im} Q_i(F) \subset \ker q_i(F)$ . Достаточно показать, что  $V$  линейно порождается образами операторов  $Q_i(F)$ , и что сумма ядер  $\ker q_i(F)$  прямая, т. е.  $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$  для всех  $i$ . Первое вытекает из того, что  $\text{н.о.д.}(Q_1, \dots, Q_r) = 1$ , а значит, существуют такие  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$ , что  $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$ . Подставляя в это равенство  $t = F$  и применяя обе части к произвольному вектору  $v \in V$ , получаем разложение  $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \operatorname{im} Q_j(F)$ . Второе вытекает из взаимной простоты  $q_i$  и  $Q_i$ , в силу которой существуют такие многочлены  $g$  и  $h$ , что  $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$ . Подставим сюда  $t = F$  и применим обе части полученного равенства  $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$  к произвольному вектору  $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$ . Так как  $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$  при всех  $j \neq i$ , получим  $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$ , что и требовалось.  $\square$

ПРИМЕР 10.7 (ПРОЕКТОРЫ)

Линейный оператор  $\pi : V \rightarrow V$  называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - t = t(t - 1)$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\pi^2 = \pi$ . По теор. 10.2 образ любого идемпотента  $\pi : V \rightarrow V$  совпадает с подпространством его неподвижных векторов:  $\operatorname{im} \pi = \ker(\pi - \operatorname{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$ , и всё пространство распадается в прямую сумму  $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$ . Тем самым, оператор  $\pi$  проектирует  $V$  на  $\operatorname{im} \pi$  вдоль  $\ker \pi$ . Отметим, что оператор  $\operatorname{Id}_V - \pi$  тоже является идемпотентом и проектирует  $V$  на  $\ker \pi$  вдоль  $\operatorname{im} \pi$ . Таким образом, задание прямого разложения  $V = U \oplus W$  равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов  $\pi_1 = \pi^2$  и  $\pi_2 = \pi^2$  пространства  $V$ , связанных соотношениями  $\pi_1 + \pi_2 = 1$  и  $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.9. Выведите из этих соотношений, что  $\ker \pi_1 = \operatorname{im} \pi_2$  и  $\operatorname{im} \pi_1 = \ker \pi_2$ .

ПРИМЕР 10.8 (ИНВОЛЮЦИИ)

Линейный оператор  $\sigma : V \rightarrow V$  называется *инволюцией*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - 1$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\sigma^2 = \operatorname{Id}_V$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \operatorname{Id}_V$  называется *тривиальной*. Если  $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$ , то  $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) = 0$  является произведением различных линейных множителей. Поэтому над таким полем каждое пространство  $V$  с инволюцией  $\sigma$  распадается в прямую сумму  $V = V_+ \oplus V_-$  собственных подпространств  $V_+ = \ker(\sigma - E)$  и  $V_- = \ker(\sigma + E)$  с собственными значениями  $+1$  и  $-1$  соответственно. Произвольный вектор  $v = v_+ + v_-$  пространства  $V$  имеет в этом разложении компоненты

$$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2} \in \operatorname{im}(\sigma + \operatorname{Id}_V) = V_+ \quad \text{и} \quad v_- = \frac{v - \sigma v}{2} \in \operatorname{im}(\sigma - \operatorname{Id}_V) = V_-.$$

Отметим, в частности, что все инволюции диагонализуемы.

<sup>1</sup>Возможно даже бесконечномерном.

Следствие 10.3 (критерий диагонализуемости)

Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  диагонализуем если и только если он аннулируется многочленом, полностью раскладывающимся над полем  $\mathbb{k}$  в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Если  $F$  диагонализуем, то  $V = \bigoplus_{\lambda} \ker(F - \lambda E)$ , где  $\lambda$  без повторений пробегает все различные собственные числа оператора  $F$ . Поэтому произведение  $\prod_{\lambda} (F - \lambda E)$  действует на  $V$  нулём, т. е. многочлен  $\prod_{\lambda} (t - \lambda E)$  аннулирует  $F$ . Наоборот, если оператор  $F$  аннулируется произведением попарно различных двучленов  $(t - \lambda)$ , то по теор. 10.2  $V = \bigoplus_{\lambda} \ker(F - \lambda E)$  является прямой суммой собственных подпространств оператора  $F$ .  $\square$

Следствие 10.4

Если оператор  $F : V \rightarrow V$  диагонализуем, то его ограничение на любое  $F$ -инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.  $\square$

**10.3.1. Перестановочные операторы.** Если линейные операторы  $F, G : V \rightarrow V$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора  $F$  переводятся оператором  $G$  в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства  $V_{\lambda} = \ker(F - \lambda E)$  и все корневые подпространства  $K_{\lambda} = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_{\lambda}}$ , где  $m_{\lambda}$  — кратность собственного числа  $\lambda$  оператора  $F$ , инвариантны относительно любого перестановочного с  $F$  оператора  $G$ .

Предложение 10.3

Любое множество коммутирующих операторов на конечномерном векторном пространстве обладает над алгебраически замкнутым полем общим собственным вектором. Если каждый из операторов диагонализуем (над произвольным полем), то их можно одновременно диагонализировать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по размерности пространства  $V$ , на котором действуют операторы. Если все операторы скалярны (что так при  $\dim V = 1$ ), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескаларный оператор  $F$ , то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем  $V$ , а в диагонализуемом случае  $V$  является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора  $F$  инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора  $F$  останутся диагонализуемы по сл. 10.4. Применяя к собственным подпространствам оператора  $F$  предположение индукции, получаем требуемое.  $\square$

Пример 10.9 (конечные группы операторов)

Если  $m$  линейных операторов на конечномерном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} > m$  образуют группу  $G$ , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом  $t^m - 1$ , который раскладывается в произведение  $m$  попарно различных линейных множителей. Поэтому каждый оператор в группе  $G$  диагонализуем. Все операторы из группы  $G$  одновременно диагонализуются в одном общем базисе если и только если группа  $G$  абелева.

**10.4. Алгебраическое дополнение II: функции от операторов.** В этом разделе мы рассматриваем фиксированный линейный оператор  $F : V \rightarrow V$ , действующий в векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , которое мы обозначаем через  $\mathbb{K}$ . Всюду далее мы предполагаем, что оператор  $F$  аннулируется некоторым многочленом  $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$ , который полностью разлагается над полем  $\mathbb{K}$  на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}, \quad (10-5)$$

где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$  и все  $m_i \in \mathbb{N}$ . Мы полагаем  $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$ . Алгебра  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$ , состоящая из функций  $U \rightarrow \mathbb{K}$  от переменной  $t$ , пробегающей какое-нибудь открытое подмножество  $U \subset \mathbb{K}$ , содержащее все корни  $\lambda$  аннулирующего оператор  $F$  многочлена (10-5), называется *алгебраически вычислимой* на операторе  $F$ , если она содержит алгебру многочленов  $\mathbb{K}[t]$  и для каждого корня  $\lambda$  кратности  $k$  аннулирующего многочлена (10-5) все функции  $f \in \mathcal{A}$  определены в точке  $\lambda$  вместе с первыми  $k - 1$  производными  $f^{(v)} = \frac{d^v}{dt^v} f$  и допускают в этой точке разложение Тейлора – Лагранжа вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (10-6)$$

где функция  $g_\lambda(t)$  тоже лежит в алгебре  $\mathcal{A}$ .

Например, если оператор  $F$  действует на конечномерном векторном пространстве, и все его собственные числа лежат в поле  $\mathbb{K}$ , то в качестве аннулирующего многочлена  $\alpha$  можно взять характеристический многочлен  $\alpha(t) = \chi_F(t)$  оператора  $F$ , и алгебра  $\mathcal{A}$  всех функций  $U \rightarrow \mathbb{K}$ , определённых на каком-нибудь подмножестве  $U \subset \mathbb{K}$ , содержащем некоторую  $\varepsilon$ -окрестность каждого собственного числа  $\lambda$ , и представимых в каждой из этих  $\varepsilon$ -окрестностей суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от  $(t - \lambda)$ , является алгебраически вычислимой на операторе  $F$ . Подалгебра этой алгебры, состоящая из всех аналитических функций<sup>1</sup>  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  алгебраически вычислима на любом линейном операторе  $F \in \text{End}(V)$ , все собственные числа которого лежат в  $\mathbb{K}$ .

#### ТЕОРЕМА 10.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе  $F : V \rightarrow V$  алгебра функций  $\mathcal{A}$  допускает единственный такой гомоморфизм  $\mathbb{K}$ -алгебр  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ , что  $\text{ev}_F(p) = p(F)$  для всех многочленов  $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ .

Гомоморфизм  $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$  из теор. 10.3 называется *вычислением функций*  $f \in \mathcal{A}$  на операторе  $F$ . Линейный оператор  $\text{ev}_F(f) : V \rightarrow V$ , в который переходит функция  $f \in \mathcal{A}$  при гомоморфизме вычисления, обозначается  $f(F)$  и называется *функцией  $f$  от оператора  $F$* .

Например, для любого оператора  $F \in \text{End}(V)$  с собственными числами из  $\mathbb{K}$  определены такие аналитические функции, как  $e^F$  или  $\sin F$ , а для любого оператора  $F \in \text{GL}(V)$  с собственными числами из  $\mathbb{K}$  — аналитические вне нуля функции, например,  $\ln F$  или  $\sqrt{F}$ , причём алгебраические свойства этих функций в алгебре  $\text{End } V$  точно такие же, как у соответствующих числовых функций  $e^t$ ,  $\sin t$ ,  $\ln t$  и  $\sqrt{t}$ . В частности, все эти функции от оператора  $F$  коммутируют друг с другом и с  $F$ , а также подчиняются привычным алгебраическим тождествам вроде  $\ln F^2 = 2 \ln F$  и  $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$ .

<sup>1</sup>Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в  $\mathbb{K}$  степенными рядами.

**10.4.1. Интерполяционный многочлен.** Если оператор  $F$  аннулируется многочленом  $m$ -той степени, то все операторы  $F^k$  с  $k \geq m$  являются линейными комбинациями  $m$  операторов

$$F^0 = E, F, F^2, \dots, F^{m-1}. \quad (10-7)$$

Поэтому любой оператор, который можно получить из  $E$  и  $F$  при помощи взятия линейных комбинаций с коэффициентами из  $\mathbb{K}$ , композиций и переходов к пределу, находится в  $\mathbb{K}$ -линейной оболочке операторов (10-7), т. е. является многочленом от  $F$ , степени не выше, чем  $m - 1$ .

Многочлен от переменной  $t$ , значение которого на операторе  $F$  равно значению  $f(F)$  заданной функции  $f \in \mathcal{A}$  на операторе  $F$  обозначается через  $p_{f(F)}(t)$  и называется *интерполяционным многочленом* для вычисления  $f(F)$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 10.10.** Покажите, что класс многочлена  $p_{f(F)}$  в фактор кольце  $\mathbb{K}[t]/(\mu_F)$ , где  $\mu_F$  — минимальный многочлен оператора  $F$ , однозначно определяется оператором  $F$  и функцией  $f \in \mathcal{A}$ .

Так как оператор  $F$  аннулируется многочленом  $\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , пространство  $V$  является по теореме о разложении<sup>1</sup> прямой суммой  $F$ -инвариантных *корневых подпространств*  $K_{\lambda_i} = \ker(F - \lambda_i E)^{m_i}$  этого многочлена. Согласно формуле (10-6) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!} (F - \lambda E)^{m_\lambda-1} + g_\lambda(F)(F - \lambda E)^{m_\lambda} \quad (10-8)$$

действует на каждом корневом подпространстве  $K_\lambda$ , отвечающем  $k$ -кратному корню  $\lambda$ , точно так же, как результат подстановки оператора  $F$  в многочлен

$$j_\lambda^{k-1} f(t) = f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(k-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{k-1} / (k - 1)!,$$

класс которого в фактор кольце  $\mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^k)$  называется  $(k - 1)$ -*струёй* функции  $f \in \mathcal{A}$  в точке  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Таким образом, в качестве интерполяционного многочлена для вычисления  $f(F)$  подойдёт любой многочлен, имеющий в каждом корне  $\lambda$  кратности  $k$  аннулирующего оператора  $F$  многочлена  $\alpha(t)$  такую же  $(k - 1)$ -струю, как и функция  $f(t) \in \mathcal{A}$ .

**ЛЕММА 10.2**

Для любого поля  $\mathbb{K}$ , любого набора из  $s$  попарно различных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ , любого набора кратностей  $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$  и произвольного набора из  $m = m_1 + \dots + m_s$  значений  $\beta_{ij} \in \mathbb{K}$ , где  $1 \leq i \leq s$ ,  $0 \leq j \leq m_i - 1$ , существует единственный такой многочлен  $p$  степени не выше, чем  $m - 1$ , что  $p^{(j)}(\lambda_i) = \beta_{ij}$  при всех  $i, j$  из указанного диапазона, где  $p^{(j)} = \frac{d^j p}{dt^j}$  обозначает  $j$ -тую производную, и для единообразия обозначений мы полагаем  $p^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} p$ .

**Доказательство.** Отображение  $S: \mathbb{K}[t]_{\leq (m-1)} \rightarrow \mathbb{K}^m$  из  $m$ -мерного векторного пространства многочленов степени не выше, чем  $m - 1$ , в  $m$ -мерное координатное пространство, сопоставляющее многочлену  $p$  набор из  $m$  значений  $p^{(j)}(\lambda_i)$ , линейно и инъективно, поскольку для любого ненулевого многочлена, лежащего в его ядре, каждое число  $\lambda_i$  является корнем кратности не менее  $m_i$ . Стало быть, отображение  $S$  биективно.  $\square$

**Доказательство ТЕОР. 10.3.** Если требуемый гомоморфизм  $ev_F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  существует, то согласно предыдущему для каждой функции  $f \in \mathcal{A}$  оператор  $f(F)$  действует на пространстве  $V$  как единственный многочлен  $p_{f(F)}$  степени  $\deg p_{f(F)} < \deg \alpha$ , имеющий в каждом корне  $\lambda$  кратности  $k$

<sup>1</sup>См. теор. 10.2 на стр. 130.

многочлена  $\alpha$  ту же самую  $(k-1)$ -струю, что и функция  $f$ . Тем самым, оператор  $f(F) = p_{f(F)}(F)$  определяется по функции  $f$  однозначно. Остаётся проверить, что отображение  $f \mapsto p_{f(F)}(F)$  является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J: \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{((t-\lambda_1)^{m_1})} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{((t-\lambda_s)^{m_s})} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \quad (10-9)$$

$$f \mapsto \left( j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_s}^{m_s-1} f \right),$$

сопоставляющее функции  $f \in \mathcal{A}$  набор её струй<sup>1</sup> во всех корнях аннулирующего оператора  $F$  многочлена  $\alpha$ , является гомоморфизмом  $\mathbb{K}$ -алгебр, т. е.  $\mathbb{K}$ -линейно и удовлетворяет равенству  $J(fg) = J(f)J(g)$ . Первое очевидно, второе достаточно проверить для каждой струи  $j_{\lambda}^{m-1}$  отдельно: по правилу Лейбница  $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu+\mu=k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(\mu)}$  получаем по модулю  $(t-\lambda)^m$ :

$$\begin{aligned} j_{\lambda}^{m-1}(fg) &= \sum_{k \leq m-1} \frac{(t-\lambda)^k}{k!} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{k!}{\nu! \mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) = \\ &= \sum_{k \leq m-1} \sum_{\nu+\mu=k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!} (t-\lambda)^{\nu} \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t-\lambda)^{\mu} \equiv j_{\lambda}^{m-1}(f) j_{\lambda}^{m-1}(g). \end{aligned}$$

Отображение  $f \mapsto P_{f(F)}(F)$  является композицией гомоморфизма (10-9) с гомоморфизмом вычисления многочленов  $ev_F: \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V$ ,  $p \mapsto p(F)$ , который корректно пропускается через фактор  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ , так как  $\alpha(F) = 0$ .  $\square$

ПРИМЕР 10.10 (СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Задача отыскания  $n$ -того члена  $a_n$  числовой последовательности  $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \mapsto z_n$ , решающей рекуррентное уравнение  $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$  с начальным условием  $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , сводится вычислению  $n$ -той степени матрицы сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из  $m$  последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член  $a_n$  оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Согласно сказанному выше,  $S^n = p_{S^n}(S)$  является результатом подстановки матрицы  $S$  в интерполяционный многочлен  $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$  для вычисления на матрице  $S$  степенной функции

<sup>1</sup>Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактору кольца  $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$ .

$f(t) = t^n$ . Степень этого многочлена меньше  $m$ , и его коэффициенты находятся решением системы из  $m+1$  линейных уравнений на  $m+1$  неизвестных. Например, для последовательности Фибоначчи, решающей уравнение  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  с начальным условием  $(a_0, a_1) = (0, 1)$ , матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{имеет} \quad S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix},$$

поскольку интерполяционный многочлен  $p_{S^n}(t) = at + b$  линеен. Тем самым,

$$(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b).$$

Характеристический многочлен  $\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$  имеет однократные корни  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ , и функция  $t^n$  принимает на них значения  $\lambda_{\pm}^n$ . Коэффициенты  $a, b$  интерполяционного многочлена находятся из уравнений

$$\begin{cases} a\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\lambda_- + b = \lambda_-^n \end{cases}$$

и первый из них  $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n) / (\lambda_+ - \lambda_-)$ , откуда

$$a_n = a = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

## §11. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$ .

**11.1. Напоминания из аффинной геометрии и топологии.** Для любого набора точек

$$p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$$

и произвольных весов  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  с ненулевой суммой  $\mu = \sum \mu_i \neq 0$  существует единственная такая точка  $c \in \mathbb{A}^n$ , что

$$\mu_1 \overline{cp_1} + \mu_2 \overline{cp_2} + \dots + \mu_m \overline{cp_m} = 0. \quad (11-1)$$

В самом деле, сумма в левой части формулы (11-1), посчитанная для другой точки  $s$  в роли  $c$ , отличается от суммы из (11-1) на вектор

$$\sum \mu_i \overline{sp_i} - \sum \mu_i \overline{cp_i} = \sum \mu_i (\overline{sp_i} - \overline{cp_i}) = \mu \overline{sc}.$$

Поэтому при фиксированной начальной точке  $s \in \mathbb{A}^n$  соотношение (11-1) выполняется для единственной точки  $c$  с радиус вектором

$$\overline{sc} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overline{sp_i}. \quad (11-2)$$

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$ . Термин пришёл из механики: если поместить евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  в качестве «горизонтальной» гиперплоскости  $\Gamma$  и приложить к каждой точке  $p_i$  силу  $\mu_i$ , направленную вниз, если  $\mu_i > 0$ , и вверх, если  $\mu_i < 0$ , как на рис. 11◊1, то равенство (11-1) выражает обнуление суммарного момента этих сил относительно точки  $c$ : если оно выполняется, гиперплоскость  $\Gamma$ , удерживаемая ровно за одну точку  $c$ , будет находиться в равновесии.

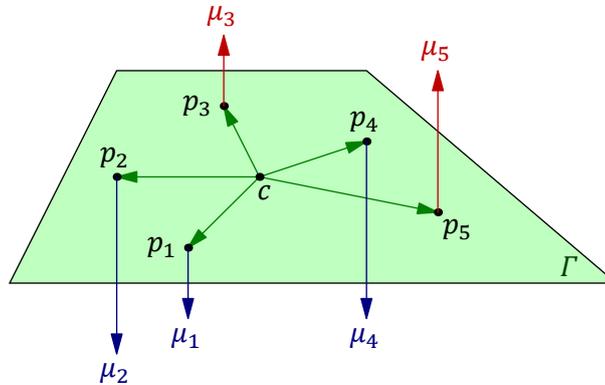


Рис. 11◊1. Моменты сил.

Из единственности центра тяжести вытекает, что для любого набора точек  $p_1, p_2, \dots, p_m$  и любых  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  с суммой  $\sum x_i = 1$ , точка  $c = s + \sum x_i \cdot \overline{sp_i}$  не зависит от выбора начальной точки  $s$ . Эта точка обозначается

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m \stackrel{\text{def}}{=} s + \sum_{i=1}^m x_i \cdot \overline{sp_i} \quad (11-3)$$

и называется *барицентрической комбинацией* точек  $p_i$  с весами  $x_i$ .

Пример 11.1 (барицентрические координаты)

Если никакие  $n$  из  $n + 1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  не лежат в одной гиперплоскости, то помещая пространство  $\mathbb{A}(V)$  в качестве аффинной гиперплоскости  $e + V$  в векторное пространство  $W = \mathbb{R}e \oplus V$ , мы можем взять  $n + 1$  радиус векторов, ведущих из нуля пространства  $W$  в точки  $p_0, p_1, \dots, p_n$  в качестве базиса в  $W$ . В координатах  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  относительно этого базиса аффинное пространство  $e + V \subset W$  задаётся уравнением  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$  и отождествляется с аффинной картой  $U = U_{x_0 + x_1 + \dots + x_n}$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(W)$ . Точка с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  видна в карте  $U$  если и только если  $\sum x_i \neq 0$ , и в этом случае её изображением в карте  $U$  является в точности центр тяжести точек  $p_i$ , взятых с весами  $x_i$ . Таким образом, каждая точка  $z \in \mathbb{A}^n$  единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации точек  $p_i$ , и коэффициенты  $x_i$  этой комбинации совпадают с однородными координатами точки  $z \in U$  относительно базиса  $p_0, p_1, \dots, p_n$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}(W)$ . Они называются *барицентрическими координатами* точки  $z$  относительно точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ .

Упражнение 11.1 (группирование масс). Пусть набор точек  $p_i$  с весами  $\mu_i$  и набор точек  $q_j$  с весами  $\nu_j$  имеют центры тяжести в точках  $p$  и  $q$ , причём обе суммы весов:  $\mu = \sum \mu_i$  и  $\nu = \sum \nu_j$ , а также их сумма  $\mu + \nu$  ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек<sup>1</sup>  $p_i$  и  $q_j$  совпадает с центром тяжести точек  $p$  и  $q$ , взятых с весами  $\mu$  и  $\nu$ . Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация  $\sum_i y_i p_i$  точек  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией  $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$  каких-то ещё точек  $q_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , тоже представляется в виде барицентрической комбинации  $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$  упомянутых точек  $q_{ij}$ , причём если все  $y_i \geq 0$  и все  $x_{ij} \geq 0$ , то и все  $z_{ij} \geq 0$ .

**11.1.1. Выпуклость.** Барицентрическая комбинация  $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m$  точек  $p_i \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  называется *выпуклой*, если все её коэффициенты  $x_i \geq 0$ . Фигура  $\Phi \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из [упр. 11.1](#) вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками  $a, b$  она содержала и соединяющий их *отрезок*

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu > 0 \}.$$

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру  $\Phi$ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры  $\Phi$  и обозначается  $\text{conv } \Phi$ . Иначе  $\text{conv } \Phi$  можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры  $\Phi$ : это множество выпукло по [упр. 11.1](#) и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру  $\Phi$ .

**11.1.2. Стандартная топология<sup>2</sup>.** Для произвольного вещественного  $\varepsilon > 0$  мы называем  $\varepsilon$ -*окрестностью* точки  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  правильный куб с центром в  $p$  и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины  $2\varepsilon$ :

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i |x_i - p_i| \leq \varepsilon \}. \quad (11-4)$$

<sup>1</sup>Если какая-то из точек  $p_i$  совпадает с некоторой точкой  $q_j$ , то их «объединение» заключается в сложении весов.

<sup>2</sup>Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции:  
[http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_08.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf).

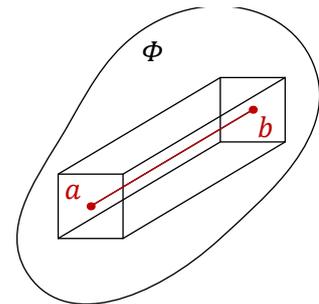
Подмножество  $U \subset \mathbb{R}^n$  *открыто*, если вместе с каждой точкой  $p \in U$  в  $U$  лежит и какая-нибудь её  $\varepsilon$ -окрестность  $B_\varepsilon(p)$ . Кубы (11-4) являются шарами радиуса  $\varepsilon$  относительно *sup-нормы*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\text{sup}} = \max_i |x_i|.$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  задают одну и ту же топологию, данное выше определение открытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения  $\varepsilon$ -окрестностей.

**УПРАЖНЕНИЕ 11.2.** Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомню, что точка  $p$  называется *внутренней* точкой фигуры  $\Phi$ , если она лежит в  $\Phi$  вместе с некоторой своей  $\varepsilon$ -окрестностью. Множество внутренних точек фигуры  $\Phi$  обозначается  $\text{int } \Phi$ . Внутренние точки дополнения  $\mathbb{A}^n \setminus \Phi$  называются *внешними* точками фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ . Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *границными*. Множество граничных точек фигуры  $\Phi$  обозначается  $\partial\Phi$ . Объединение  $\bar{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$  называется *замыканием* фигуры  $\Phi$ .



**Рис. 11◊2.** Выпуклость внутренней.

**УПРАЖНЕНИЕ 11.3.** Покажите, что  $p \in \partial\Phi$  если и только если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $p$  имеются как точки фигуры  $\Phi$ , так и точки не лежащие в  $\Phi$ , и докажите, что замыкание  $\bar{\Phi}$  является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим  $\Phi$ .

#### Предложение 11.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

**Доказательство.** Первое вытекает из того, что если точки  $a$  и  $b$  содержатся в выпуклом множестве  $\Phi$  вместе с некоторыми  $\varepsilon$ -кубами  $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$ , то все точки отрезка  $[ab]$  содержатся в  $\Phi$  вместе с такими же  $\varepsilon$ -кубами, см. рис. 11◊2. Второе — из того, что если  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$  и  $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ , то при любых фиксированных  $\lambda$  и  $\mu$  предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lambda a + \mu b$ . В частности, каждая точка отрезка  $[a, b]$  является пределом последовательности точек фигуры  $\Phi$ , если таковыми являются концы  $a, b$  этого отрезка.  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 11.4.** Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

#### Пример 11.2 (симплексы)

Выпуклая оболочка  $n + 1$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , не лежащих в  $(n - 1)$ -мерной плоскости, называется *n-мерным симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i p_i \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (11-5)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве  $\mathbb{A}^n$ , в аффинных координатах  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  относительно репера с началом в  $p_0$  и базисными векторами  $e_i = \overline{p_0 p_i}$ , где  $1 \leq i \leq n$ , симплекс (11-5) задаётся системой из  $(n + 1)$  линейных неоднородных неравенств

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1. \quad (11-6)$$

Поскольку в точке с координатами  $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n})$  все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым  $\varepsilon$ -кубом, т. е. каждый симплекс имеет непустую внутренность. В частности, выпуклая оболочка любых  $(n + 1)$  не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства  $\mathbb{R}^n$  имеет непустую внутренность.

**УПРАЖНЕНИЕ 11.5.** Проверьте, что граница симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$  является объединением всевозможных симплексов вида  $[p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_m}]$ , где  $m < n$  и  $v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**11.1.3. Аффинные функционалы и полупространства.** Мы называем *аффинными функционалами* на  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$  аффинные отображения  $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Если произвольно фиксировать начальную точку  $c \in \mathbb{A}^n$ , то действие такого функционала на точку  $p \in \mathbb{A}^n$  задаётся формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overline{cp}),$$

которую мы будем коротко записывать в виде  $a = a_c + \alpha$ , где  $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$ , а дифференциал  $\alpha = D_a \in V^*$  не зависит от  $c$ . Ограничение аффинного функционала  $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на любой отрезок  $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$  представляет собою «школьную линейную функцию»  $a(x) = \alpha x + \beta$  на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключаяющие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке  $z \in [p, q]$ . В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка  $z$  является одним из концов отрезка, и функционал  $a$  имеет постоянный знак на полуинтервале  $[p, q] \setminus z$ , либо  $z \in (a, b)$ , а  $a$  имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах  $[p, z)$  и  $(z, b]$ . Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал  $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$  задаёт разбиение аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости  $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$  и двух выпуклых открытых полупространств  $\text{int } H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$  и  $\text{int } H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$ , которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств  $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geq 0\}$  и  $H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leq 0\}$  с общей границей  $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$ . Каждый отрезок  $[p, q]$  с  $p \in \text{int } H_a^+$  и  $q \in \text{int } H_a^-$  пересекает гиперплоскость  $H_a$  в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка  $[p, q]$ .

**11.2. Опорные полупространства.** Гиперплоскость  $H_a \subset \mathbb{A}^n$  называется *опорной гиперплоскостью* фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ , если  $H_a \cap \partial\Phi \neq \emptyset$  и  $\Phi \subset H_a^+$ . В этой ситуации замкнутое полупространство  $H_a^+$  называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал  $a$  — *опорным функционалом* фигуры  $\Phi$ .

**ЛЕММА 11.1**

Для любого открытого выпуклого множества  $U$  в аффинном пространстве размерности  $n \geq 2$  через каждую точку  $p \notin U$  можно провести не пересекающую  $U$  прямую.

**Доказательство.** Обозначим через  $S$  объединение всех открытых лучей

$$]p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overline{pu} \mid u \in U, t > 0\},$$

начинающихся в  $p$  и проходящих через всевозможные точки  $u \in U$ . Из рис. 11◊3 и рис. 11◊4 очевидно, что  $C$  является открытой выпуклой фигурой, и  $p \in \partial C$ . Так как  $U \subset C$ , достаточно провести через  $p$  прямую, не пересекающую  $C$ . Из выпуклости  $C$  следует, что любая проходящая через  $p$  прямая  $\ell$  либо не пересекает  $C$ , либо пересекает  $C$  по одному из лучей  $]p, u)$ , все точки которого являются внутренними точками  $C$ , а все остальные отличные от  $p$  точки прямой  $\ell$  являются для  $C$  внешними, см. рис. 11◊3. В частности, внешние для  $C$  точки существуют. Пусть  $q$  — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней мере двумерно, через  $q$  можно провести пересекающую  $C$  прямую, отличную от прямой  $(qp)$ . На ней имеется отличная от  $p$  граничная точка  $r$  конуса  $C$ . Тем самым, прямая  $(pr)$  не пересекает  $C$ .  $\square$

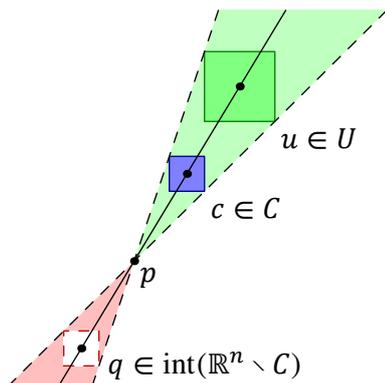


Рис. 11◊3. Открытость  $C$  и непустота  $\text{int}(\mathbb{A}^n \setminus C)$ .

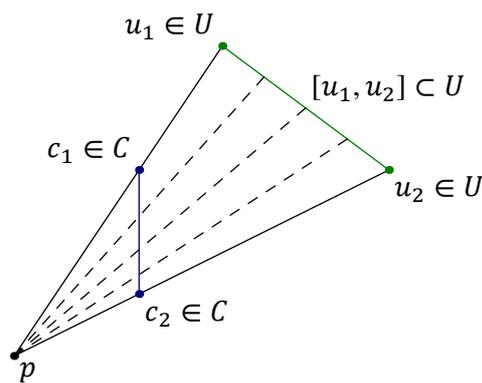


Рис. 11◊4. Выпуклость  $C$ .

#### ТЕОРЕМА II.1

Для любых открытого выпуклого множества  $U$  и не пересекающегося с ним аффинного подпространства  $\Pi$  в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  существует аффинная гиперплоскость, содержащая  $\Pi$  и не пересекающая  $U$ .

**Доказательство.** Поместим начало координат внутрь  $\Pi$  и отождествим  $\Pi$  с векторным подпространством  $W \subset V$  (возможно нулевым). Обозначим через  $H \subset V$  какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее  $W$  и не пересекающее  $U$ , а через  $H' \subset V$  любое дополнительное к  $H$  векторное подпространство. Проекция пространства  $V = H \oplus H'$  на  $H'$  вдоль  $H$  переводит отрезки из  $\mathbb{A}(V)$  в отрезки или точки из  $\mathbb{A}(H')$ , а кубы из  $\mathbb{A}(V)$  со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в  $V$ , согласованного с разбиением  $V = H \oplus H'$ , — в аналогичные кубы в  $\mathbb{A}(H')$ . Поэтому множество  $U$  спроектируется в открытое выпуклое множество  $U' \subset \mathbb{A}(H')$ , не содержащее нуля, поскольку ядро проекции  $H$  не пересекается с  $U$ . Если  $\dim H' > 1$ , то по лем. 11.1 в  $H'$  найдётся одномерное подпространство  $L$ , не пересекающее  $U'$ . Но тогда подпространство  $H \oplus L \subset V$  не пересекает  $U$  и строго больше, чем  $H$ , вопреки выбору  $H$ . Поэтому  $\dim H' = 1$  и  $H$  является искомым гиперплоскостью.  $\square$

#### ТЕОРЕМА II.2

Через каждую граничную точку  $p$  любой выпуклой фигуры  $\Phi$  можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

**Доказательство.** Если фигура  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$  целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в  $\Phi$  есть  $n + 1$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то  $\text{int} \Phi \neq \emptyset$  согласно прим. 11.2 на стр. 138. Проведём через  $p$  гиперплоскость  $H_a$ , не

пересекающую  $\text{int } \Phi$ . Функционал  $a$  имеет на  $\text{int } \Phi$  постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из  $H_a \cap \text{int } \Phi$ . Меняя, если нужно, знак у  $a$ , мы можем считать, что  $\text{int } \Phi \subset \text{int } H_a^+$ . Поскольку  $\Phi$  лежит в замыкании своей внутренней  $\text{int } \Phi$ , которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве  $H_a^+$ , мы заключаем, что  $\Phi \subset H_a^+$ .  $\square$

### ТЕОРЕМА 11.3

Всякое замкнутое выпуклое множество  $Z \subset \mathbb{R}^n$  является пересечением своих опорных полупространств.

**Доказательство.** Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего  $Z$ , мы можем считать, что  $Z$  не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка  $q \notin Z$  не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества  $Z$ . Для этого соединим  $q$  отрезком  $[q, p]$  с какой-нибудь внутренней точкой  $p \in \text{int } Z$  и проведём опорное полупространство  $H_a^+$  к  $Z$  в граничной точке  $r \in [q, p] \cap \partial Z$ . Поскольку  $r$  лежит строго внутри  $[q, p]$ , из  $a(p) > 0$  и  $a(r) = 0$  следует, что  $a(q) < 0$ , т. е.  $q \notin H_a^+$ .  $\square$

**11.2.1. Грани и крайние точки.** Пересечение замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры  $\Phi$ . Каждая грань фигуры  $\Phi$  тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры  $\Phi \subset \mathbb{R}^n$  строго меньше  $n$ . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 11♦5, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  может не быть гранью самой фигуры  $\Phi$ .

Точка  $p \in \Phi$  называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$ , если она не является внутренней точкой никакого отрезка  $[a, b] \subset \Phi$ . Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка  $q$  является внутренней точкой какого-либо отрезка  $[a, b] \subset \Phi$ , то она может оказаться в грани фигуры  $\Phi$  только если весь отрезок  $[a, b]$  лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть нульмерные грани, возникающие из всевозможных цепочек вида: фигура  $\Phi$ , грань фигуры  $\Phi$ , грань грани фигуры  $\Phi$ , грань грани грани фигуры  $\Phi$ , и т. д.. В частности, все вершины фигуры  $\Phi$  являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  являются крайними и для  $\Phi$ , хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры  $\Phi$ .



Рис. 11♦5.

### ТЕОРЕМА 11.4

Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, отсекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры.  $\square$

**11.2.2. Цилиндры.** Замкнутая выпуклая фигура вида  $\Phi = A(U) \times B \subset A(U) \times A(W)$ , где  $\dim U > 0$ , а  $B \subset A(W)$  — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром с основанием  $B$  и образующей  $A(U)$* . Если основание  $B$  состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей  $A(U)$  и является аффинным пространством.

Предложение II.2

Через каждую точку  $p$  любой замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi \subset A(V)$  проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в  $\Phi$ . Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство  $U \subset V$ . Если  $U \neq 0$ , то для любого дополнительного<sup>1</sup> векторного подпространства  $U' \subset V$  замкнутая выпуклая фигура  $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$  не содержит аффинных пространств положительной размерности, и  $\Phi = A(U) \times \Phi'$  является цилиндром с основанием  $\Phi'$  с образующей  $A(U)$ .

Доказательство. Если аффинные подпространства  $p + W_1$  и  $p + W_2$  содержатся в  $\Phi$ , то  $\Phi$  содержит и аффинное подпространство  $p + (W_1 + W_2)$ , т. к. для любых  $w_1 \in W_1$  и  $w_2 \in W_2$  точка  $p + w_1 + w_2$  является серединой отрезка с концами в точках  $p + 2w_1$  и  $p + 2w_2$ . Поэтому аффинное пространство  $p + U$ , где  $U \subset V$  это сумма всех таких подпространств  $W \subset V$ , что  $p + W \subset \Phi$ , содержит все лежащие в  $\Phi$  аффинные подпространства, проходящие через  $p$ . Если  $q + W$  это максимальное содержащееся в  $\Phi$  аффинное подпространство, проходящее через точку  $q \notin p + U$ , то  $U \subset W$ , так как для любого вектора  $u \in U$  точка  $r = q + u$  является концом содержащегося в  $\Phi$  интервала  $[p, r[ = \{(1-t)p + tr \mid 0 \leq t < 1\}$  (см. рис. 11◊6), ибо

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi.$$

По той же причине  $W \subset U$ . Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение  $V = U \oplus U'$  задаёт разложение  $A(V) = (p + U) \times (p + U')$ , в котором  $p + U \subset \Phi$ . Для любой точки  $q = p + u + u' \in \Phi$  точка  $p + u' = q - u \in q + U$  лежит в  $(p + U') \cap \Phi = \Phi'$ . Наоборот, для любой точки  $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$  всё аффинное пространство  $p + u' + U \subset \Phi$ . Поэтому  $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$ .  $\square$

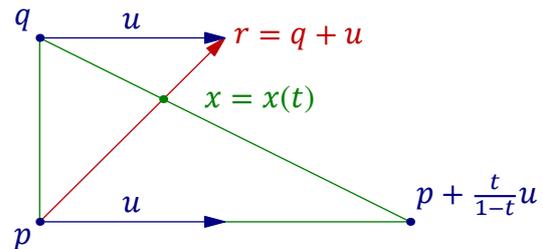


Рис. 11◊6.  $\overline{px} : \overline{xr} = t : (1-t)$ .

Следствие II.1

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры  $\Phi$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $\Phi$  является цилиндром

<sup>1</sup>Т. е. такого, что  $U \oplus U' = V$ .

- 2)  $\Phi$  не имеет крайних точек
- 3)  $\Phi$  содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1)  $\Rightarrow$  (2). Если  $\Phi$  цилиндр, то через любую точку  $p \in \Phi$  проходит содержащееся в  $\Phi$  аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка  $p \in \Phi$  не может быть крайней.

Импликация (2)  $\Rightarrow$  (3). Если фигура  $\Phi$  не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у  $\Phi$  есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем  $\dim \Phi$ . Заменяя  $\Phi$  на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура  $\Phi$ , грань фигуры  $\Phi$ , грань грани фигуры  $\Phi$ , и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то  $\Phi$  содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2)  $\Rightarrow$  (3) вытекает из [предл. 11.2](#). □

**11.3. Выпуклые многогранники.** Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+, \quad (11-7)$$

задаваемых в аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  набором непостоянных аффинных функционалов

$$a_1, a_2, \dots, a_m : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (11-8)$$

называется *выпуклым многогранником*. В частности, каждая аффинная гиперплоскость  $H_a = H_a^+ \cap H_a^- = H_a^+ \cap H_{-a}^+$  является выпуклым многогранником. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, все аффинные подпространства, включая точку, а также пустое множество и сечения любого выпуклого многогранника любыми аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Удобно считать, что и всё объемлющее пространство  $\mathbb{A}(V)$  является выпуклым многогранником, который мы будем называть *несобственным* в отличие от многогранников (11-7), которые будем называть *собственными*.

Каждый собственный непустой выпуклый многогранник  $M$  имеет грани, и все они являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник  $M$  является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с  $M$  грань *несобственной*, а все остальные грани  $\Gamma \subsetneq M$  — *собственными*.

Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани  $\Gamma \subset M$  размерности  $\dim \Gamma = \dim M - 1$  называются *гипергранями*.

Для многогранника (11-7) и каждого непустого подмножества

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

мы полагаем  $H_I = \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$ . Это аффинное подпространство в  $\mathbb{A}(V)$ , возможно пустое.

**ТЕОРЕМА 11.5 (ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАНЕЙ)**

Для каждого  $I$  пересечение  $\Gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} M \cap H_I$  либо пусто, либо является гранью  $M$ , и все грани многогранника  $M$  получаются таким образом. Для каждой грани  $\Gamma_I$  аффинное подпространство  $H_I$

является наименьшим содержащим грань  $\Gamma_I$  аффинным пространством. Точка  $p \in \Gamma_I$  является внутренней<sup>1</sup> точкой грани  $\Gamma_I$  если и только если  $a_j(p) > 0$  для всех  $j \notin I$ .

Доказательство. Если многогранник  $\Gamma_I = M \cap H_I$  не пуст, то сумма  $a_I = \sum_{i \in I} a_i$  является опорным функционалом<sup>2</sup> для  $M$  и  $\Gamma_I = M \cap H_{a_I}$ . Поэтому все непустые многогранники  $\Gamma_I$  являются гранями многогранника  $M$ . Покажем, что для каждой такой грани  $\Gamma_I$  справедливы два последних утверждения теоремы. Пусть точка  $p \in \Gamma_I = H_I \cap M$  такова, что  $a_j(p) > 0$  для всех  $j \notin I$ . Так как эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки  $p$  в аффинном пространстве  $H_I$ , точка  $p$  входит в  $\Gamma_I$  вместе с этой кубической окрестностью. Это означает, что подпространство  $H_I$  является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань  $\Gamma_I$ , а точка  $p$  является внутренней точкой грани  $\Gamma_I$ . Наоборот, если хоть один функционал  $a_k$  зануляется в точке  $p$ , лежащей в произвольной<sup>3</sup> грани  $\Gamma' \subseteq M$ , но при этом положителен в некоторой другой точке  $q$  той же грани, то точка  $p$  не может быть внутренней точкой грани  $\Gamma'$ , ибо в противном случае, немного продлив отрезок  $[q, p]$  за точку  $p$ , мы получим в грани  $\Gamma'$  точку, где функционал  $a_k$  строго отрицателен.

Рассмотрим теперь произвольную грань  $\Gamma = H_b \cap M$ , где  $b$  — какой-либо опорный функционал многогранника  $M$ . Обозначим через  $I = I(\Gamma) \subset \{1, 2, \dots, m\}$  множество номеров всех тех из задающих  $M$  функционалов  $a_i$ , для которых  $\Gamma \subset H_{a_i}$ . Поскольку для каждого  $j \notin I$  найдётся такая точка  $q_j \in \Gamma$ , что  $a_j(q_j) > 0$ , все функционалы  $a_j$  с  $j \notin I$  строго положительны в барицентре  $q_\Gamma$  всех точек  $q_j$ . Если  $I = \emptyset$ , то вообще все функционалы  $a_i$  строго положительны в точке  $q_\Gamma$ , а значит, и на некотором кубе с центром в  $q_\Gamma$ . Тем самым,  $q_\Gamma$  является внутренней<sup>4</sup> точкой многогранника  $M$  и не лежит ни в какой грани. Мы заключаем, что для любой грани  $\Gamma \subseteq M$  множество  $I = I(\Gamma)$  непусто и  $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$ . В частности, и грань  $\Gamma_I = H_I \cap M$ , и аффинное подпространство  $H_I$  тоже непусты, а точка  $q_\Gamma$  является, по уже доказанному, внутренней точкой грани  $\Gamma_I$ . Поэтому для любой точки  $p \in \Gamma_I$  отрезок  $[p, q_\Gamma]$  можно немного продлить за точку  $q_\Gamma$  так, чтобы его новый конец  $r$  всё ещё лежал в  $\Gamma_I$ . Из соотношений  $b(p) \geq 0$ ,  $b(q_\Gamma) = 0$ ,  $b(r) \geq 0$  вытекает, что  $b(r) = b(p) = 0$ . Следовательно, каждая точка  $p \in \Gamma_I$  лежит в грани  $\Gamma$ , откуда  $\Gamma = \Gamma_I$ .  $\square$

Следствие II.2

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника.  $\square$

Следствие II.3

Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они.  $\square$

Следствие II.4

Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой.  $\square$

Следствие II.5

Непустой выпуклый многогранник  $M$  тогда и только тогда является цилиндром<sup>5</sup>, когда он не имеет вершин.  $\square$

<sup>1</sup> В топологии аффинного пространства  $H_I$ .

<sup>2</sup> См. п° 11.2 на стр. 139.

<sup>3</sup> Возможно даже не имеющей вида  $\Gamma_I = M \cap H_I$ .

<sup>4</sup> В топологии объемлющего пространства  $\mathbb{A}(V)$ .

<sup>5</sup> См. п° 11.2.2 на стр. 142. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

**11.4. Выпуклые многогранные конусы.** Каждое непустое конечное множество  $R$  векторов из  $V$  задаёт в  $\mathbb{A}(V)$  фигуру

$$\sigma_R = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, w_i \in R \subset V\}, \quad (11-9)$$

состоящую из всех неотрицательных линейных комбинаций векторов из множества  $R$  и именуемую *выпуклым многогранным конусом*. Векторы  $w \in R$  называются *образующими* конуса  $\sigma_R$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Убедитесь, что  $\sigma_R$  является замкнутой выпуклой фигурой в  $\mathbb{A}(V)$ .

Каждый конус (11-9) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор  $0 \in V$ . Вместе с каждым ненулевым вектором  $v \in \sigma_R$  в конусе  $\sigma_{\mathbb{R}}$  лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч  $[0, v) = \mathbb{R}_{\geq 0} v$ . Поэтому любая опорная гиперплоскость  $H_\alpha$  конуса  $\sigma$  проходит через нуль: в противном случае из неравенства  $\alpha(0) > 0$  и равенства  $\alpha(v) = 0$ , которое должно выполняться в некоторой точке  $v \in H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$ , вытекало бы, что  $\alpha(w) < 0$  для всех  $w \in [0, v) \setminus \{0\}$ . Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в  $V$  и имеют вид  $H_\alpha$  для некоторого *линейного* функционала  $\alpha \in V^*$ . Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус  $\sigma_R$  является пересечением своих опорных полупространств  $H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}$ , по всем таким  $\alpha \in V^*$ , что  $\alpha(w) \geq 0$  для всех  $w \in \sigma_R$  и  $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$ . Поэтому для любого вектора  $u \notin \sigma_R$  найдётся такой ковектор  $\alpha \in V^*$ , что  $\alpha(u) < 0$ , но  $\alpha(w) \geq 0$  для всех  $w \in \sigma_R$ . Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

ТЕОРЕМА 11.6 (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Подмножество  $\sigma \subset V$  тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}, \quad \text{где } \alpha \in V^*. \quad (11-10)$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

Доказательство. Пусть подмножество  $\sigma \subset V$  является пересечением конечного числа векторных полупространств (11-10). Тогда  $\sigma$  является выпуклым многогранником в  $\mathbb{A}(V)$ , содержит нуль  $0 \in V$ , и вместе с каждой точкой  $p \neq 0$  содержит весь замкнутый луч  $[0, p)$ . Пересечение многогранника  $\sigma$  со стандартным единичным кубом  $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$  с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 11.4 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, которые образуют конечное множество  $R \subset \sigma$ . Так как для каждого  $v \in \sigma$  существует такое  $\lambda \geq 0$ , что  $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$  является выпуклой комбинацией векторов из  $R$ , сам вектор  $v$  является неотрицательной линейной комбинацией векторов из  $R$ , т. е.  $\sigma = \sigma_R$ .

Наоборот, любой многогранный конус  $\sigma_R \subset V$ , как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (11-10). Для того, чтобы неравенство  $\alpha(w) \geq 0$  выполнялось для всех  $w \in \sigma_R$ , достаточно, чтобы оно выполнялось для всех  $w \in R$ . Поэтому множество всех таких ковекторов  $\alpha \in V^*$ , что  $\sigma_R \subset H_\alpha^+$  представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств  $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geq 0\}$ , задаваемых векторами  $w \in R$ , рассматриваемыми как линейные функционалы на  $V^*$ . По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом  $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$ , порождённым конечным множеством ковекторов  $R^\vee \subset V^*$ . Так как каждый ковектор  $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$  является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов  $\psi \in R^\vee$ , все неравенства  $\alpha(v) \geq 0$ , где  $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ , следуют из конечного набора неравенств  $\psi(v) \geq 0$ , где  $\psi \in R^\vee$ , т. е.  $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$ .  $\square$

**11.4.1. Двойственность.** Множество линейных функционалов  $\alpha \in V^*$ , принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе  $\sigma_R \subset V$ , является пересечением конечного числа векторных полупространств  $H_w^+ \subset V^*$ , задаваемых образующими  $w \in R$  конуса  $\sigma_R$ , рассматриваемыми как линейные функционалы на  $V^*$ , и по теор. 11.6 представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через  $R^\vee \subset V^*$ . Конус  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$  называется *двойственным* к конусу  $\sigma_R \subset V$ . По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса  $\sigma$  выполняется равенство  $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ .

**11.4.2. Грани конусов.** Условимся, что помимо собственных граней, отсекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями  $H_\alpha$ , где  $\alpha \in V^*$ , у каждого конуса  $\sigma \subset V$  имеется также и *несобственная* грань  $\sigma = H_0 = V \cap \sigma$  размерности  $\dim \sigma$ , отсекаемая нулевым ковектором  $0 \in V^*$ . Для каждой грани  $\Gamma \subset \sigma_R$  обозначим через  $\langle \Gamma \rangle \subset V$  её линейную оболочку, через  $R_\Gamma = R \cap \Gamma$  — множество лежащих в этой грани образующих конуса, а через  $R_\Gamma^\vee = R^\vee \cap \text{Ann}\langle \Gamma \rangle$  — множество аннулирующих грань  $\Gamma$  образующих двойственного конуса.

Предложение II.3

Каждая грань  $\Gamma$  конуса  $\sigma_R$  является конусом, порождённым множеством  $R_\Gamma = R \cap \Gamma$  лежащих в ней образующих конуса  $\sigma_R$ , причём множество  $R_\Gamma$  линейно порождает линейную оболочку  $\langle \Gamma \rangle$  грани  $\Gamma$ .

Доказательство. Согласно теор. 11.5 на стр. 143, каждая грань  $\Gamma$  отсекается из конуса  $\sigma_R$  векторным подпространством  $\text{Ann } R_\Gamma^\vee \subset V$ , которое совпадает с линейной оболочкой  $\langle \Gamma \rangle$  грани  $\Gamma$ . Поэтому включение  $\sigma_{R_\Gamma} \subset \Gamma$  очевидно. Для доказательства обратного включения и последнего утверждения леммы достаточно убедиться, что в представлении произвольного вектора  $v \in \Gamma$  в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из  $R$  ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие  $w \in R_\Gamma$ . Для каждой образующей  $w' \in R \setminus R_\Gamma$  найдётся такой функционал  $\alpha \in R_\Gamma^\vee$ , что  $\alpha(w') > 0$ . Если бы образующая  $w'$  входила в разложение вектора  $v \in \Gamma$  с положительным коэффициентом, то значение  $\alpha(v)$  было бы строго положительным, а не нулевым, как это должно быть для ковектора  $\alpha \in R_\Gamma^\vee \subset \text{Ann}\langle \Gamma \rangle$ .  $\square$

Упражнение II.7. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество  $I \subset R$  порождает конус, являющийся гранью конуса  $\sigma_R$ .

Следствие II.6 (двойственность между гранями двойственных конусов)

Для лежащих в  $n$ -мерных векторных пространствах двойственных конусов  $\sigma_R$  и  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$  при каждом  $k = 0, 1, \dots, \dim \sigma_R$  имеется оборачивающая включения биекция между  $k$ -мерными гранями конуса  $\sigma_R$  и  $(n - k)$ -мерными гранями конуса  $\sigma_R^\vee$ . Она переводит грань  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$  конуса  $\sigma_R$  в грань  $\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{R_\Gamma^\vee}$ , отсекаемую из двойственного конуса  $\sigma_R^\vee$  аннулятором грани  $\Gamma$ . В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями  $(n - 1)$ -мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Все образующие  $w \in R_\Gamma$  грани  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \subset \sigma_R$  являются опорными функцио-  
налами двойственного конуса  $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ . Поэтому подпространство  $\text{Ann } \Gamma = \text{Ann } R_\Gamma \subset V^*$   
высекает из двойственного конуса  $\sigma_R^\vee$  некоторую грань. Обозначим её  $\Gamma^\vee$ . По [предл. 11.3](#) эта  
грань представляет собою конус  $\sigma_{R_\Gamma^\vee} \subset \sigma_{R^\vee}$ , порождённый множеством  $R_\Gamma^\vee \subset R^\vee$  всех аннули-  
рующих грань  $\Gamma$  образующих конуса  $\sigma_R^\vee$ , причём множество  $R_\Gamma^\vee$  линейно порождает линейную  
оболочку  $\langle \Gamma^\vee \rangle$  грани  $\Gamma^\vee$ . Так как  $\text{Ann } \Gamma^\vee = \text{Ann } R_\Gamma^\vee$  и  $\sigma_R \cap \text{Ann } R_\Gamma^\vee = \Gamma$  по [теор. 11.5](#), отображение  
 $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$  переводит грань  $\Gamma^\vee$  в грань  $\Gamma^{\vee\vee} = \Gamma$ , т. е. инволютивно, а значит, биективно.  $\square$

Замечание 11.1. В [сл. 11.6](#) не предполагается равенства  $\dim \sigma_R = \dim V$ . Например, одномер-  
ный конус  $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$  представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении век-  
тора  $v$  и имеет две грани — нульмерную грань  $0$  и одномерную грань, совпадающую с самим  
этим лучом. Двойственный ему конус  $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$  является векторным полупространством  
и тоже имеет две грани:  $n$ -мерную грань  $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } 0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$  и  $(n - 1)$ -мерную грань  
 $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } v = H_v$ .

Упражнение 11.8. Покажите, что для каждой грани  $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$  конуса  $\sigma_R$  выполняется равенство  
 $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap -\sigma_{R_\Gamma^\vee}^\vee$ , где  $-\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid -v \in \sigma\}$  обозначает конус, центрально симметричный  
конусу  $\sigma$  относительно начала координат.

**11.5. Проективный и асимптотический конусы выпуклого многогранника.** Вложим  $V$  в век-  
торное пространство  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  в качестве аффинной гиперплоскости  $U = e_0 + V$  и обозна-  
чим через  $x_0 \in W^*$  базисный ковектор одномерного подпространства  $\text{Ann } V \subset W^*$ , принимаю-  
щий на векторе  $e_0$  значение 1. Таким образом, аффинное под-  
пространство  $U \subset W$  задаётся уравнением  $x_0 = 1$ . Векторное  
пространство аффинных функционалов  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  естествен-  
но отождествляется с пространством  $W^*$  линейных функцио-  
налов  $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}$  так, что аффинному функционалу  $a = a_0 + \alpha$ ,  
где  $a_0 = a(0) \in \mathbb{R}$  и  $\alpha = D_a \in V^*$ , который действует на век-  
тор  $e_0 + v \in U$  по правилу  $a(e_0 + v) = a_0 + \alpha(v)$ , сопоставляется  
линейный функционал  $\bar{a} : W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda e_0 + v \mapsto \lambda a_0 + \alpha(v)$ ,  
который мы будем обозначать через  $a_0 x_0 + \alpha$ , рассматривая  
 $\alpha \in V^*$  как аннулирующий вектор  $e_0$  линейный функционал  
на векторном пространстве  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$ . Каждый выпуклый  
многогранник  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , задаваемый в аф-  
финном пространстве  $A(V) = U$  аффинными функционалами  
 $a_i = a_{i0} + \alpha_i$ , является пересечением аффинной гиперплоскости  $U \subset W$  с выпуклым много-  
гранником  $\bar{M} = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ \subset W$ , который задаётся в векторном простран-  
стве  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  ковекторами  $\bar{a}_i = a_{i0}x_0 + \alpha_i \in W^*$ . Конус  $\bar{M}$  называется *проективным*  
*конусом* многогранника  $M$ , а его пересечение  $M_\infty = \bar{M} \cap V$  с параллельным аффинной гипер-  
плоскости  $U$  векторным подпространством  $\text{Ann } x_0 = V \subset W$ , называется *асимптотическим*  
*конусом* или *конусом рецессии* многогранника  $M$ , см. [рис. 11♦7](#). Таким образом, проективный  
конус  $\bar{M}$  задаётся однородными неравенствами

$$a_{i0}x_0 + \alpha_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \tag{11-11}$$

на координаты  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  вектора  $w = x_0e_0 + v$  в любом таком базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$  про-  
странства  $W$ , что векторы  $e_1, \dots, e_n$  составляют базис в  $V$ . Ограничение неравенств (11-11) на

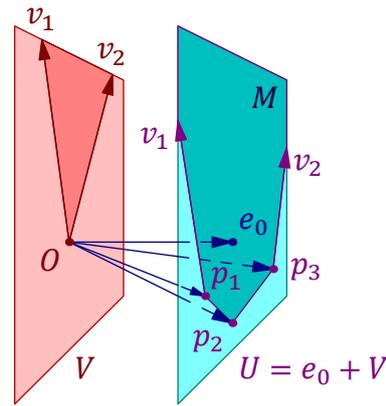


Рис. 11♦7. Конус  $\bar{M}$ .

аффинную гиперплоскость  $x_0 = 1$  задаёт в ней аффинный многогранник  $M$ , а асимптотический конус  $M_\infty$  описывается в векторном пространстве  $V \subset W$  однородными неравенствами

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

в которые превращаются (11-11) при  $x_0 = 0$ . Обратите внимание, что асимптотический конус  $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee$  двойствен конусу  $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V^*$ , порождённому дифференциалами  $\alpha_i = D_{\alpha_i}$  аффинных функционалов  $\alpha_i$ , задающих многогранник  $M$ . С геометрической точки зрения, проективный конус  $\overline{M}$  непустого многогранника  $M$  является замыканием объединения всех лучей  $[0, w)$ , где  $w \in M$ , а асимптотический конус  $M_\infty$  образован пределами  $[0, v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [0, w_t)$  таких лучей, проходящих через переменную точку  $w_t = w + tv \in M$ , которая стартует при  $t = 0$  из некоторой точки  $w \in M$  и уходит при  $t \rightarrow +\infty$  на бесконечность в направлении вектора  $v \in V$ , оставаясь всё время внутри  $M$ , см. рис. 11◊8.

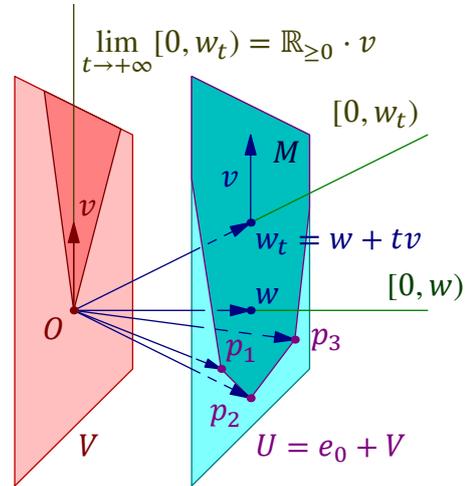


Рис. 11◊8. Конус  $M_\infty$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11.9. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус  $M_\infty$  непустого многогранника  $M$  состоит из всех векторов  $v \in V$ , обладающих такими эквивалентными свойствами<sup>1</sup>: (1) для любой точки  $p \in M$  точка  $p + v$  тоже лежит в  $M$  (2) для любой точки  $p \in M$  луч  $\{p + tv \mid t \geq 0\}$  содержится в  $M$  (3) в  $M$  содержится какой-нибудь луч  $[p, q)$  с направляющим вектором  $\overline{pq} = v$ .

ТЕОРЕМА 11.7 (ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Выпуклая оболочка любого конечного набора точек является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 11.4 на стр. 144. Докажем первое. Вложим  $A(V)$  в векторное пространство  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  в качестве аффинной гиперплоскости  $U = e_0 + V$ , как было объяснено выше. Выпуклая оболочка любого конечного множества  $P \subset U$  ограничена, так как содержится в любом содержащем  $P$  кубе в  $U$ , и высекается из аффинной гиперплоскости  $U$  конусом  $\sigma_P \subset W$ , поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация  $\sum x_i p_i$  точек  $p_i \in P$  лежит в конусе  $\sigma_P$ , и наоборот, для любого ненулевого вектора  $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$  пересечение луча  $[0, w)$  с аффинной гиперплоскостью  $U$ , задаваемой уравнением  $x_0 = 1$ , происходит в точке  $w/x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$ , которая является выпуклой комбинацией точек  $p_i$ , поскольку все  $\lambda_i \geq 0$ . По теор. 11.6 конус  $\sigma_P$  является выпуклым многогранником. Поэтому  $M = \sigma_P \cap U$  тоже является выпуклым многогранником.  $\square$

ТЕОРЕМА 11.8 (РАЗЛОЖЕНИЕ МОЦКИНА)

Всякий выпуклый многогранник  $M$  раскладывается в сумму

$$M = \text{conv } P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \text{conv } P, v \in M_\infty\},$$

<sup>1</sup>Направления таких векторов  $v$  называют асимптотическими или направлениями рецессии.

где  $P \subset M$  — некоторое конечное подмножество, а  $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V$  — асимптотический конус многогранника  $M$ . Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого).

Доказательство. Как и выше, отождествим  $\mathbb{A}(V)$  с аффинной гиперплоскостью  $U = e + V$  в векторном пространстве  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$ . По теор. 11.6 на стр. 145 проективный конус  $\overline{M} = \sigma_S$  порождается некоторым конечным множеством векторов  $S \subset W$ . По предл. 11.3 на стр. 146 высекаемая векторным подпространством  $V \subset W$  грань  $M_\infty = V \cap \overline{M} = \sigma_R$  порождается подмножеством  $R = S \cap V$ . Умножая не лежащие в  $R$  образующие проективного конуса  $\overline{M}$  на положительные константы, мы можем и будем считать, что  $P \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus R \subset M \subset U$ . Тогда  $\overline{M} = \sigma_{P \cup R} = \{p + r, | p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}$ . Луч  $[0, p + r)$ , где  $p \in \sigma_P, r \in \sigma_R$ , пересекает аффинную гиперплоскость  $U$  если и только если  $p \neq 0$ , и в этом случае точка пересечения  $(p + r)/x_0(p + r) = (p + r)/x_0(p)$  является суммой точки  $p/x_0(p) \in \text{conv } P$  и вектора  $r/x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$ .  $\square$

Следствие 11.7

Следующие свойства непустого многогранника  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , задаваемого аффинными функционалами  $a_i = a_{i0} + \alpha_i$  эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \iff \text{конус } M_\infty = 0 \iff \text{конус } \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = V^*.$$

$\square$

Пример 11.3 (двойственные многогранники)

Многогранники  $M \subset U$  и  $M^\vee \subset U^\vee$ , лежащие в аффинных подпространствах  $U = e_0 + V$  и  $U^\vee = x_0 + V^*$  двойственных векторных пространств  $W = \mathbb{R}e_0 \oplus V$  и  $W^* = \mathbb{R}x_0 \oplus V^*$ , которые спариваются по правилу  $\langle \mu x_0 + \alpha, \lambda e_0 + v \rangle = \lambda \mu + \alpha(v)$ , называются *двойственными* относительно точек  $e_0 \in U$  и  $x_0 \in U^\vee$ , если они имеют двойственные проективные конусы  $\overline{M}^\vee = \overline{M^\vee}$ .

Если точка  $e_0$  внутренняя для многогранника  $M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$ , то все задающие  $M$  аффинные функционалы  $a_i = a_{i0} + \alpha_i$  имеют  $a_{i0} = a_i(e_0) > 0$ . Умножив каждый функционал  $a_i$  на подходящую положительную константу<sup>1</sup>, мы можем считать, что его свободный член  $a_{i0} = 1$ . Таким образом, при  $e_0 \in \text{int } M$  проективный конус  $\overline{M}$  многогранника  $M$  является пересечением векторных полупространств  $H_{\bar{a}_i}^+ \subset W$ , задаваемых ковекторами  $\bar{a}_i = x_0 + \alpha_i$ , где  $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$ , а двойственный ему конус  $\overline{M}^\vee = \overline{M^\vee} = \sigma_{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m}$  этими ковекторами порождается и пересекает аффинную гиперплоскость  $U^\vee = x_0 + V^*$  по выпуклой оболочке точек  $x_0 + \alpha_i$ . В частности, если  $e_0 \in \text{int } M$ , то двойственный многогранник  $M^\vee$  компактен.

Например, *стандартный куб*  $B_1(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \forall i |x_i| \leq 1\}$  в  $\mathbb{R}^n$  задаётся неравенствами  $1 + x_i \geq 0$  и  $1 - x_i \geq 0$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Двойственный к нему относительно нулей в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{n*}$  многогранник представляет собою выпуклую оболочку стандартных базисных векторов  $\pm e_i^* \in \mathbb{R}^{n*}$  и называется *стандартным кокубом*.

<sup>1</sup>Это не меняет ни полупространства  $H_{a_i}^+$ , ни многогранника  $M$ .

## §12. Группы Кокстера

**12.1. Группы, порождённые отражениями.** Конечная группа  $G$  линейных ортогональных преобразований евклидова пространства  $V$  называется *группой Кокстера*, если она порождается отражениями в гиперплоскостях. Гиперплоскости, относительно которых происходят имеющиеся в группе  $G$  отражения, называются *зеркалами*, а перпендикулярные зеркалам векторы единичной длины — *корнями* группы Кокстера  $G$ . Дополнение к объединению всех зеркал группы  $G$  является дизъюнктивным объединением открытых многогранных конусов. Замыкания этих конусов называются *камерами Вейля*. Если зафиксировать для каждого зеркала один из двух корней, задающих это зеркало, и обозначить выбранные корни через  $e_1, \dots, e_n$ , то внутренности камер Вейля можно описать как классы эквивалентности не принадлежащих зеркалам векторов из  $V$  по отношению, объявляющему векторы  $u$  и  $w$  эквивалентными, если знаки скалярных произведений  $(u, e_i)$  и  $(w, e_i)$  одинаковы при каждом  $i$ . Векторы  $u$  и  $w$  лежат в одной камере Вейля если и только если внутренность соединяющего их концы отрезка  $[u, w]$  не пересекает зеркал.

Лемма 12.1

Для любого ортогонального линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  и ненулевого вектора  $u \in V$  выполняется равенство  $F \circ \sigma_u \circ F^{-1} = \sigma_{Fu}$  или, что то же самое,  $F \circ \sigma_u = \sigma_{F(u)} \circ F$ , где  $\sigma_u$  обозначает отражение в гиперплоскости  $u^\perp$ .

Доказательство. Геометрически очевидно, что ортогональный оператор  $F$  переводит симметричные относительно гиперплоскости  $u^\perp$  векторы  $v, w$  в векторы  $F(v), F(w)$ , симметричные относительно гиперплоскости  $F(u)^\perp$ . На языке формул: применяя  $F$  к обеим частям равенства  $w = v - 2u(v, u)/(u, u)$ , получаем  $F(w) = F(v) - 2F(u)(F(v), F(u))/(F(u), F(u))$ .  $\square$

Следствие 12.1

Каждое преобразование из группы Кокстера переводит зеркала в зеркала, а камеры Вейля — в камеры Вейля.

Доказательство. Пусть гиперплоскость  $e^\perp$  является зеркалом отражения  $\sigma_e$  из группы  $G$ . Для любого преобразования  $g \in G$  гиперплоскость  $g(e)^\perp = g(e)^\perp$  является зеркалом отражения  $\sigma_{g(e)} = g\sigma_e g^{-1} \in G$ .  $\square$

Пример 12.1 (группы диэдров)

В двумерном евклидовом пространстве всякая группа Кокстера  $G$  однозначно с точностью до изоморфизма определяется числом  $m$  имеющихся в ней отражений. Зеркала этих отражений разбивают плоскость на  $2m$  углов, как на рис. 12.1 на стр. 151. Выберем наименьший из них, пометим его буквой  $e$  и обозначим его стороны через  $\ell_1, \ell_2$ , а отражения в них — через  $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$ . Так как отражения группы  $G$  переводят зеркала в зеркала, все  $m$  зеркал группы  $G$  получаются последовательными отражениями зеркал  $\ell_1$  и  $\ell_2$  друг относительно друга, а камеры Вейля представляют собою углы между соседними прямыми и тоже являются последовательными отражениями камеры  $e$ . Если отражать камеру  $e$  по часовой стрелке и надписывать каждую новую камеру тем преобразованием из группы  $G$ , которым она получилась из  $e$ , то в силу равенства  $\sigma_{g(\ell_i)} = g\sigma_i g^{-1}$  выписанные по часовой стрелке камеры получают метки

$$\sigma_2, \quad \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_{\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_{\sigma_2\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2\sigma_1\sigma_2(e) = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \dots$$

Если аналогичным образом последовательно отражать камеру  $e$  против часовой стрелки, то упорядоченные таким образом камеры помечаются элементами

$$\sigma_1, \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2, \sigma_{\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1\sigma_2\sigma_1(e) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \dots$$

В результате каждая камера Вейля надписывается словом вида  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots$  и словом вида  $\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots$ , которые отвечают двум обходам вокруг нуля, ведущим из камеры  $e$  в рассматриваемую камеру. Так как движение плоскости однозначно определяется своим действием на угол  $e$ , мы заключаем, что группа  $G$  порождается двумя отражениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , и состоит из  $2m$  различных элементов вида

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots}_k = g = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots}_{2m-k}, \quad (12-1)$$

где  $k = 0, \dots, 2m$ , и при  $k = 0, 2m$  получается один и тот же элемент

$$e = (\sigma_1\sigma_2)^m = (\sigma_2\sigma_1)^m, \quad (12-2)$$

а все остальные элементы попарно различны и отличны от  $e$ . Соотношение (12-2) выражает тот факт, что композиции отражений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются поворотами на угол  $2\pi/m$ .

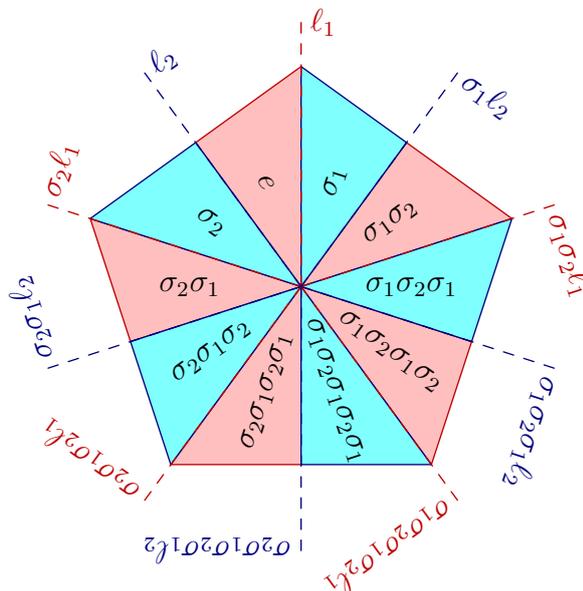


Рис. 12◊1. Группа диэдра.

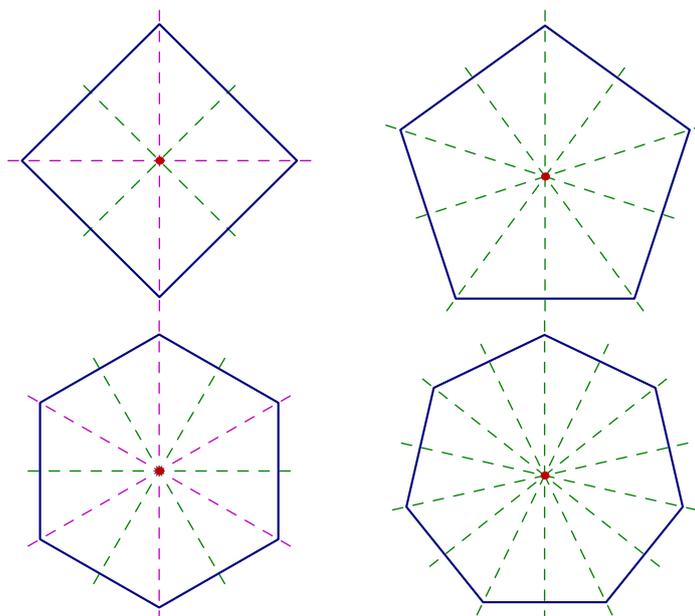


Рис. 12◊2. Оси правильных многоугольников.

Из рис. 12◊1 и рис. 12◊2 очевидно, что группа  $G$  совпадает с группой<sup>1</sup> правильного  $m$ -угольника и состоит из  $m$  отражений и  $m$  поворотов на углы  $2\pi k/m$ . Эту группу традиционно обозначают  $D_m$  и называют  $m$ -той диэдральной группой. Обратите внимание, что при нечётном  $m$  все зеркала составляют одну орбиту группы  $D_m$ , тогда как при чётном  $m$  орбиты прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  различны и образуют два геометрически разных набора осей: одни проходят через противоположные вершины многоугольника, а другие — через середины противоположных рёбер, см. рис. 12◊2 на стр. 151.

**12.2. Простые отражения.** Зафиксируем какую-нибудь камеру Вейля  $C$  группы Кокстера  $G$  и обозначим зеркала, высекающие гиперграни этой камеры, через  $H_1, \dots, H_m$ , а перпендикулярные им и направленные внутрь камеры  $C$  корни — через  $u_1, \dots, u_n$ . Корни  $u_i$ , зеркала  $H_i$  и отражения  $\sigma_i = \sigma_{u_i}$  называются простыми корнями, зеркалами и отражениями, задаваемыми камерой  $C$ . Обозначим через  $m_{ij} \geq 2$  число всех зеркал из группы  $G$ , проходящих через пересечение  $H_i \cap H_j$ . Эти зеркала пересекают порождённую корнями  $e_i$  и  $e_j$  двумерную плоскость  $\Pi_{ij} = (H_i \cap H_j)^\perp$  по  $m_{ij}$  прямым, образующим в этой плоскости конфигурацию зеркал группы правильного  $m_{ij}$ -угольника из прим. 12.1. Так как зеркала  $H_i$  и  $H_j$  являются гранями одной камеры, в образуемом ими двугранном угле нет других зеркал, проходящих через  $H_i \cap H_j$ , т. е. пересечения этих зеркал с плоскостью  $\Pi_{ij}$  являются соседними осями диэдра. Поэтому композиция  $\sigma_j \sigma_i$  действует в плоскости  $\Pi_{ij}$  поворотом на угол  $2\pi/m_{ij}$  и тождественна на пересечении  $H_i \cap H_j$ . Таким образом при всех  $i \neq j$  между простыми отражениями выполняется соотношение  $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = \text{Id}$ .

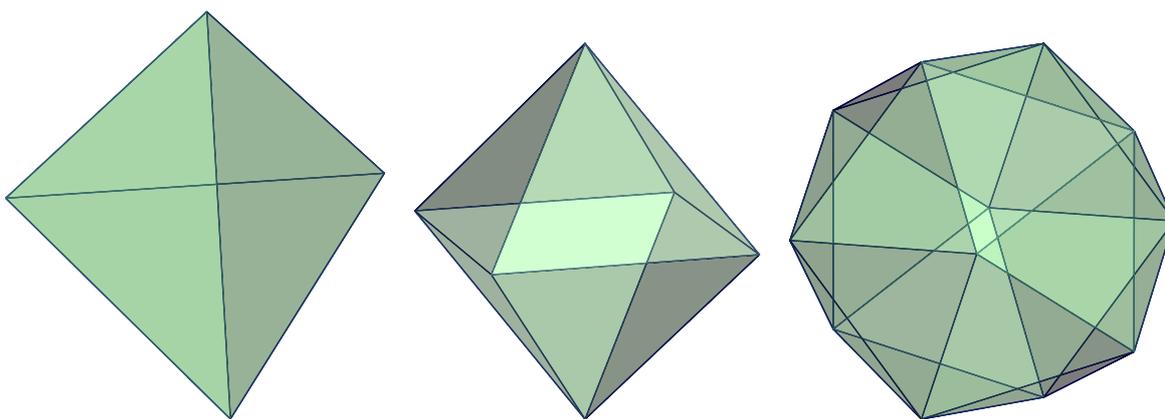


Рис. 12◊3. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

Пример 12.2 (группы платоновых тел)

Из пяти правильных многогранников<sup>2</sup> в  $\mathbb{R}^3$  октаэдр и куб, а также икосаэдр и додекаэдр двойственны друг другу в том смысле, что один из них является выпуклой оболочкой центров двумерных граней другого. Поэтому группа куба канонически изоморфна группе октаэдра, а груп-

<sup>1</sup>Напомним, что (полной) группой фигуры  $\Phi$ , лежащей в евклидовом пространстве  $V$ , называется группа  $O_\Phi$  всех биективных преобразований  $\Phi \simeq \Phi$ , получающихся ограничением на фигуру  $\Phi$  ортогональных линейных преобразований  $V \simeq V$ , переводящих фигуру  $\Phi$  в себя. Подгруппа  $SO_\Phi \subset O_\Phi$ , состоящая из биекций  $\Phi \simeq \Phi$ , задаваемых собственными (сохраняющими ориентацию) ортогональными преобразованиями, называется собственной группой фигуры  $\Phi$ . Если фигура лежит в гиперплоскости, то её собственная группа совпадает с полной.

<sup>2</sup>Правильные многогранники в  $\mathbb{R}^3$  также называют платоновыми телами.

па додекаэдра — группе икосаэдра. Чтобы унифицировать аргументацию, мы рассмотрим вписанное в единичную сферу с центром в нуле платоново тело  $M$  с треугольными гранями, т. е. тетраэдр, октаэдр или икосаэдр, см. рис. 12◊3. Плоскости симметрии тела  $M$  задают *барицентрическое разбиение* каждой его двумерной грани на 6 треугольников с вершинами в какой-нибудь вершине тела  $M$ , в середине одного из примыкающих к этой вершине рёбер и в центре одной из двух граничащих по этому ребру граней. На рис. 12◊4 показано возникающее таким образом разбиение тетраэдра. Все треугольники разбиения конгруэнтны друг другу и сходятся по  $2m_1 = 6$  штук в центрах граней тела  $M$ , по  $2m_2 = 4$  штуки — в серединах рёбер тела  $M$  и по  $2m_3$  штук — в вершинах многогранника  $M$ . Числа  $m_i$ , а также количество  $\gamma$  граней тела  $M$  и общее число треугольников  $N = 6\gamma$  барицентрического разбиения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра указаны в таблице<sup>1</sup>

$M$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$\gamma$	$N = 6\gamma$
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120

Обозначим через  $G \subset O_M$  группу Кокстера, порождённую отражениями в плоскостях симметрии тела  $M$ . Её камеры Вейля представляют собою трёхгранные углы с общей вершиной в нуле, опирающиеся на  $N$  треугольников барицентрического разбиения граней. Пометим одну из камер единичным элементом  $e$  и обозначим высекающие её зеркала  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  таким образом, чтобы для всех циклических перестановок  $i, j, k$  множества индексов 1, 2, 3 двугранный угол между плоскостями  $\pi_i$  и  $\pi_j$  равнялся  $\pi/m_k$ . Отражение в плоскости  $\pi_i$  обозначим через  $\sigma_i$ . Покажем, что  $G = O_M \simeq F_3/N$  является фактором свободной группы  $F_3$  с образующими  $x_1, x_2, x_3$  по наименьшей нормальной подгруппе  $N \triangleleft F_3$ , содержащей шесть слов  $x_i^2$  и  $(x_i x_j)^{m_k}$ , где  $i, j, k$  пробегает три циклические перестановки индексов 1, 2, 3.

Группа  $O_M$  транзитивно действует на камерах, и для каждой камеры  $C$  имеется ровно одно преобразование  $g \in O_M$ , переводящее камеру  $e$  в камеру  $C$ . Помечая камеру  $C$  таким преобразованием  $g$ , мы получаем биективное поименование камер Вейля элементами  $g \in O_M$ , при котором всякий элемент  $h \in O_M$  переводит каждую камеру  $g$  в камеру  $hg$ . На рис. 12◊5 на стр. 154 изображена стереографическая проекция картинка, которую 24 камеры тетраэдра с рис. 12◊4 высекают на описанной около него сфере. Каждый сферический треугольник на этой картинке надписан такой композицией простых отражений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , которая переводит в него начальный треугольник  $e$ . Чтобы написать такую композицию, преобразующую камеру  $e$  в произвольно заданную камеру  $g$ , выберем внутри этих камер векторы  $u, w$  единичной длины так, чтобы натянутая на них плоскость  $\Pi_{uw}$  не содержала линий пересечения зеркал, и пройдем из  $u$  в  $w$  по дуге

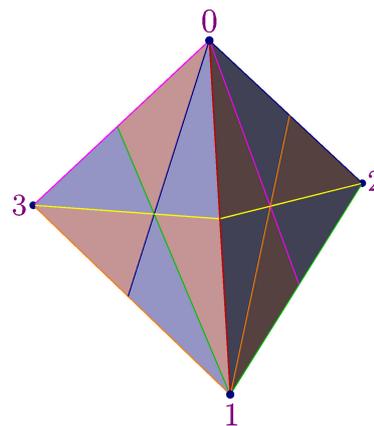


Рис. 12◊4. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

<sup>1</sup>Обратите внимание, что помещённый в  $\mathbb{R}^3$  правильный плоский  $n$ -угольник из прим. 12.1 тоже можно включить в эту таблицу со значениями  $m_1 = n, m_2 = 2, m_3 = 2, \gamma = 2$  и  $N = 4n$ , если условиться, что такой диэдр имеет две двумерных грани — «верхнюю» и «нижнюю».

окружности, высекаемой плоскостью  $\Pi_{uv}$  на описанной около  $M$  сфере. Пусть мы при этом последовательно пройдём через камеры  $e = g_1, g_2, g_3, \dots, g_m, g_{m+1} = g$  и при проходе из  $i$ -той камеры в  $(i + 1)$ -ю пересечём плоскость  $g_i(\pi_{v_i})$ , где  $v_i \in \{1, 2, 3\}$ , которая является образом грани  $\pi_{v_i}$  камеры  $e$  при отображении  $g$ , переводящем камеру  $e$  в камеру  $g$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 g_2 &= \sigma_{v_1} \\
 g_3 &= \sigma_{g_2(\pi_{v_2})}g_2 = (g_2\sigma_{v_2}g_2^{-1})g_2 = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2} \\
 g_4 &= \sigma_{g_3(\pi_{v_3})}g_3 = (g_3\sigma_{v_3}g_3^{-1})g_3 = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2}\sigma_{v_3} \\
 &\dots \\
 g &= g_{m+1} = \sigma_{g_m(\pi_{v_m})}g_m = (g_m\sigma_{v_m}g_m^{-1})g_m = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2}\dots\sigma_{v_m}.
 \end{aligned}$$

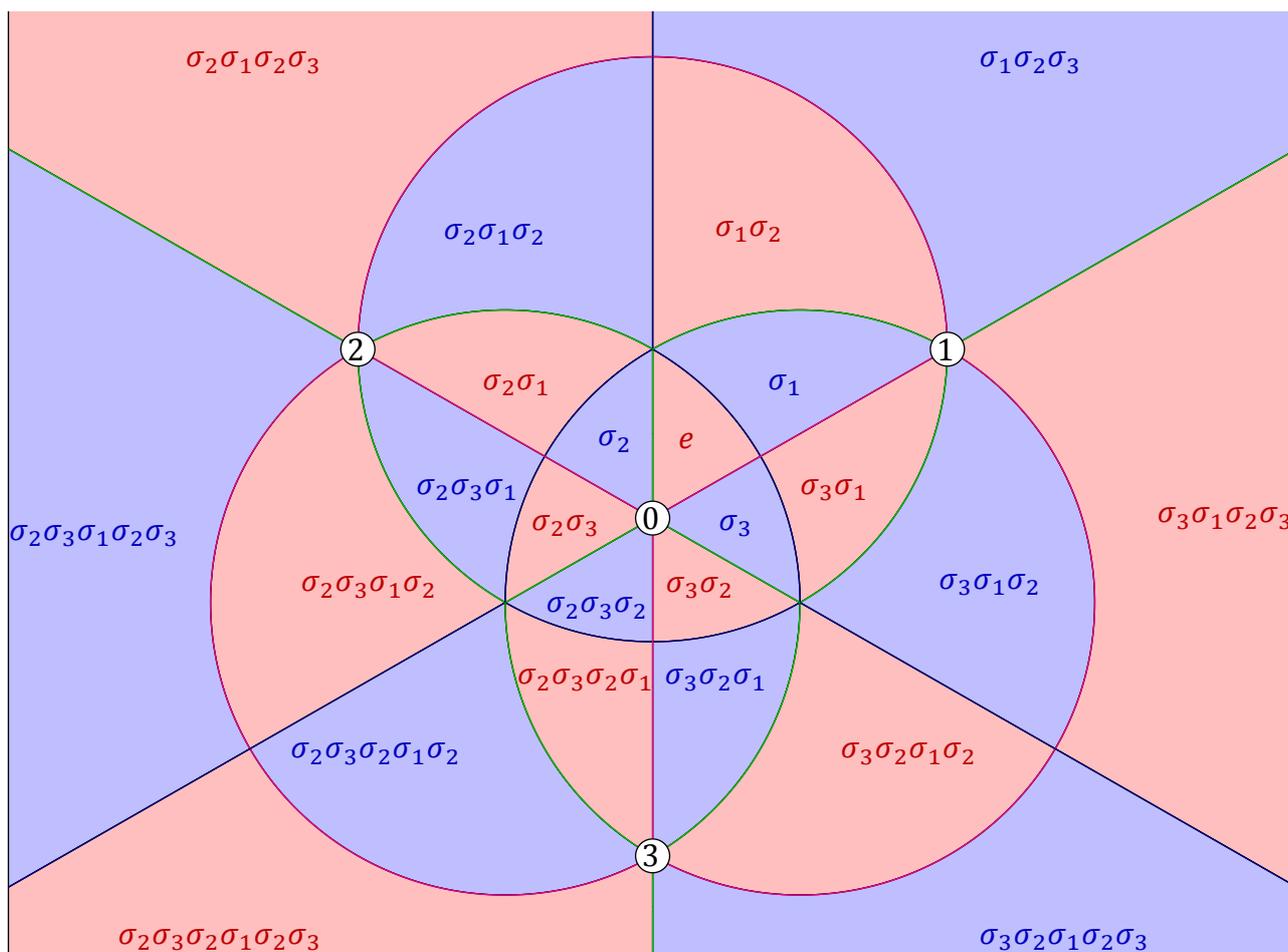


Рис. 12♦5.Триангуляция сферы плоскостями симметрии правильного тетраэдра  $[0, 1, 2, 3]$  в стереографической проекции из диаметрально противоположной к вершине  $[0]$  точки сферы на плоскость, параллельную грани  $[1, 2, 3]$ . Зеркала простых отражений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  изображены синим, зелёным и лиловым цветами соответственно.

Таким образом, если пометить стенки  $g(\pi_1), g(\pi_2), g(\pi_3)$  каждой камеры  $g$  соответственно цифрами 1, 2, 3, то для каждого элемента  $g \in O(M)$  будет выполнено равенство

$$g = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2}\dots\sigma_{v_m}, \tag{12-3}$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_m$  суть выписанные слева направо по порядку цифры 1, 2, 3, стоящие на зеркалах, которые придётся последовательно пересечь при движении из камеры  $e$  в камеру  $g$  по дуге  $[u, w]$ . Мы заключаем, что  $O_M = G$  является группой Кокстера и порождается простыми отражениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в стенках произвольно выбранной камеры Вейля. Так эти отражения удовлетворяют соотношениям  $\sigma_i^2 = (\sigma_i \sigma_j)^{m_k} = e$ , правило  $x_i \mapsto \sigma_i$  задаёт сюръективный гомоморфизм  $\varphi : F_3 / N \rightarrow O_M$ . Покажем, что он инъективен, т. е. любые два слова  $w_1, w_2$  из букв  $x_1, x_2, x_3$ , переходящие в один и тот же элемент  $g \in O_M$ , эквивалентны по модулю вставки и удаления подслов вида  $x_i^2$  и  $(x_i x_j)^{m_k}$ . Любое слово  $\sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_k} = g$  задаёт последовательность сферических треугольников  $g_0 = e, g_1 = \sigma_{v_1}, g_2 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2}, \dots, g_k = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_k}$ , в которой каждый треугольник  $g_i = g_{i-1} \sigma_{v_i}$  является отражением предыдущего треугольника  $g_{i-1}$  относительно их общей стороны, высекаемой на сфере плоскостью  $g_{i-1}(\pi_{v_i})$ . Эти треугольники образуют ведущую из  $e$  в  $g$  ленту вроде нарисованных на рис. 12◊6:

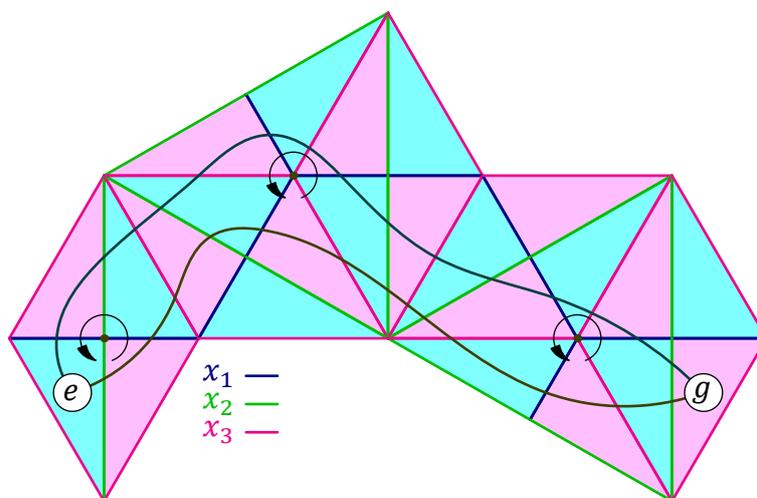


Рис. 12◊6.  $x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_1 x_2 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_2 = g = x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2$ .

и последовательность номеров  $v_1 v_2 \dots v_k$  простых отражений однозначно считывается с любой лежащей внутри этой ленты гладкой кривой, соединяющей какую-нибудь внутреннюю точку камеры  $e$  с какой-нибудь внутренней точкой камеры  $g$  и трансверсально пересекающей ровно по одному разу все встречающиеся по дороге из  $u$  в  $w$  внутри ленты зеркала. Две такие кривые, производящие слова  $w_1$  и  $w_2$ , можно непрерывно продеформировать одну в другую по поверхности сферы. При прохождении через вершину, в которой пересекаются помеченные номерами  $i$  и  $j$  стороны  $2m_k$  треугольников, в задаваемом кривой слове некоторый фрагмент вида  $x_i x_j x_i \dots$  длины  $\ell$  заменятся равным ему в  $F_3 / N$  фрагментом вида  $x_j x_i x_j \dots$  длины  $2m - \ell$ , дополняющим первый фрагмент до циклического соотношения  $(x_i x_j)^{m_k} = e$ . Например, переводимые гомоморфизмом  $\varphi$  в один и тот же элемент  $g \in O_M$  слова

$$x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_1 x_2 x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_2 \quad \text{и} \quad x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2$$

отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 12◊6, преобразуются одно в другое применением циклических соотношений  $x_1 x_2 = x_2 x_1$ ,  $x_3 x_1 x_3 x_1 = x_1 x_3$  и  $x_3 x_1 x_3 = x_1 x_3 x_1$  в трёх отмеченных на рис. 12◊6 вершинах. Тем самым, любые два слова, ведущие из  $e$  в  $g$  лежат в одном классе группы  $F_3 / N$ .

**12.3. Приведённые слова.** Следуя введённым в самом начале п° 12.2 обозначениям, покажем, что простые отражения  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  в гипергранях  $H_1, \dots, H_m$  произвольно выбранной камеры Вейля  $C$  группы Кокстера  $G$  позволяют перевести камеру  $C$  в любую другую камеру  $D$ . Для этого выберем векторы  $u \in \text{int } C$  и  $w \in \text{int } D$  единичной длины так, чтобы  $u \neq -w$  и порождённая этими векторами двумерная плоскость  $P_{uw}$  имела нулевое пересечение с каждым из конечного числа  $(n - 2)$ -мерных подпространств, по которым пересекаются пары зеркал группы  $G$ . Пройдём из  $u$  в  $w$  по кратчайшей дуге окружности, высекаемой плоскостью  $P_{uw}$  на единичной сфере с центром в нуле, последовательно отражая камеру, в которой в данный момент находимся, относительно встречаемых по дороге гиперграней и надписывая каждую новую камеру той композицией простых отражений  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , которая привела нас в эту камеру. Если мы покидаем уже надписанную словом  $g$  камеру через её гипергрань  $gH_i$ , то следующая камера надпишется словом  $\sigma_{gH_i}g = g\sigma_i g^{-1}g = g\sigma_i$ . Таким образом, камера  $D$  получается из камеры  $C$  композицией простых отражений  $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ , в которой  $i_1 i_2 \dots i_k$  суть выписанные слева направо по порядку номера тех простых зеркал, образы которых приходится пересекать по дороге из  $u$  в  $w$ . Мы будем называть получающуюся таким образом композицию  $w_{DC} = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$  *приведённым словом* камеры  $D = w_{DC}C$  относительно камеры  $C$ .

Вообще говоря, приведённое слово  $w_{CD}$  определяется камерами  $C, D$  не однозначно и зависит от выбора точек  $u \in \text{int } C$  и  $w \in \text{int } D$ . Если перемещать точки  $u$  и  $w$  внутри камер, то в те моменты, когда дуга  $[u, w]$  пройдёт через пересечение  $gH_i \cap gH_j$  какой-либо пары зеркал группы  $G$ , она разобьёт  $2m_{ij}$  двугранных углов, образуемых  $m_{ij}$  проходящими через  $gH_i \cap gH_j$  зеркалами группы  $G$  на две дополнительные друг другу группы из  $m_{ij}$  последовательных углов, и подслово длины  $m_{ij}$ , отвечающее в в слове  $w_{DC}$  за обход пересечения  $gH_i \cap gH_j$  по одной группе углов заменится симметричным подсловом длины  $m_{ij}$ , обходящим  $gH_i \cap gH_j$  по дополнительной группе углов, как показано на рис. 12◊7, где изображена проекция происходящего на двумерную плоскость, трансверсально пересекающую все участвующие зеркала<sup>1</sup>.

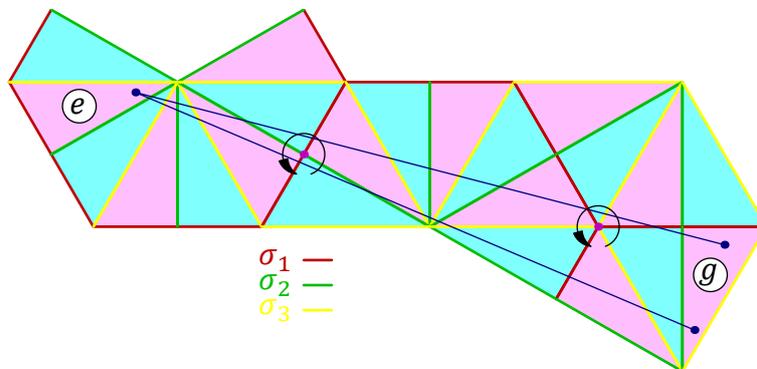


Рис. 12◊7.  $\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = g = \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2$ .

Разложения, отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 12◊7, отличаются друг от друга тем, что вершины триангуляции обходятся в противоположных направлениях с разных сторон. Композиции возникающих при этом отражений удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3,$$

<sup>1</sup>Попарные пересечения зеркал при этом изображаются точками, а сами зеркала — прямыми.

эквивалентным циклическим соотношениям  $(\sigma_1\sigma_2)^2 = e$  и  $(\sigma_1\sigma_3)^3 = e$  в диэдральных группах соответствующих вершин. Мы будем называть такие преобразования слов *допустимыми*.

Таким образом, приведённое слово  $w_{DC}$  представляет собою класс слов одинаковой длины, отличающихся друг от друга допустимыми преобразованиями.

ТЕОРЕМА 12.1

Каждая группа Кокстера  $G$  порождается отражениями  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  в гипергранях  $H_1, \dots, H_m$  произвольно выбранной камеры Вейля  $C$  и изоморфна фактору  $F_m/N$  свободной группы  $F_m$  с образующими  $x_1, \dots, x_m$  по наименьшей нормальной подгруппе  $N \triangleleft F_m$ , содержащей слова

$$x_i^2 \text{ и } (x_i x_j)^{m_{ij}}, \text{ где } 1 \leq i \neq j \leq m,$$

а  $m_{ij} \in \mathbb{N}$  равно числу всех зеркал группы  $G$ , проходящих через пересечение  $H_i \cap H_j$ .

Доказательство. Поскольку простые отражения транзитивно действуют на камерах Вейля, каждое зеркало  $H$  группы  $G$  имеет вид  $w_{DC}(H_j)$  для некоторого простого зеркала  $H_j$  и приведённого слова  $w_{DC} = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ , преобразующего камеру  $C$  в камеру  $D$ , гранью которой служит зеркало  $H$ . Поэтому отражение  $\sigma_H = \sigma_{w_{DC}(H_j)} = w_{DC}\sigma_j w_{DC}^{-1}$  является композицией простых отражений. Так как группа  $G$  порождается отражениями  $\sigma_H$ , она порождается простыми отражениями  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  в гипергранях камеры  $C$ . Покажем, что каждый элемент  $g \in G$  равен приведённому слову камеры  $D = gC$  относительно камеры  $C$ . Воспользуемся индукцией по длине  $\ell$  самого короткого представления  $g = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_\ell}$  в виде композиции простых отражений. При  $\ell = 0, 1$  элемент  $g$  равен  $e$  или одному из простых отражений  $\sigma_i$ , а камера  $D = gC$  либо совпадает с камерой  $C$  либо граничит с ней по гиперграну, отсекаемой простым зеркалом  $H_i$ , и доказываемое утверждение очевидно. Пусть оно верно для всех элементов, которые являются композициями не более  $k$  простых отражений. Достаточно убедиться, что для любого такого элемента  $g$  и каждого простого отражения  $\sigma_j$  композиция  $g\sigma_j$  равна приведённому слову  $w_{DC}$  камеры  $D = g\sigma_j C$ . Если камеры  $C$  и  $E = g\sigma_j C$  находятся по одну сторону от зеркала  $gH_j$ , как на рис. 12◊8, выберем векторы  $u \in \text{int } C$  и  $w \in \text{int } E$  так, чтобы продолжение дуги  $[u, w]$  за точку  $w$  уходило из камеры  $E$  в камеру  $D$  сквозь зеркало  $gH_j$ . По индукции, элемент  $g$  равен приведённому слову  $w_{EC}$ , считанному с дуги  $[u, w]$ . Поэтому, элемент  $g\sigma_j = w_{EC}\sigma_j = w_{DC}$  тоже равен приведённому слову, считанному с продолжения дуги  $[u, w]$  в камеру  $D$  сквозь стенку  $gH_j$ .

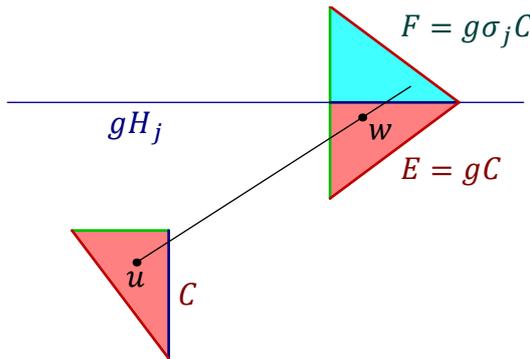


Рис. 12◊8.  $gH_j$  не разделяет  $C$  и  $gC$ .

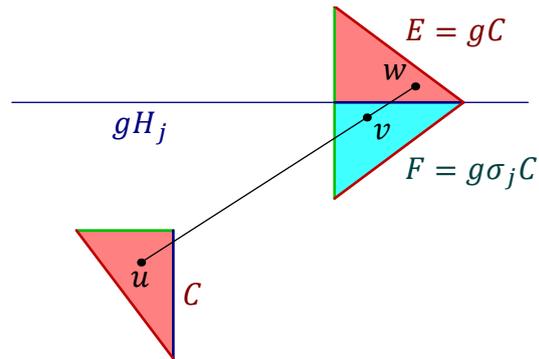


Рис. 12◊9.  $gH_j$  разделяет  $C$  и  $gC$ .

Если же камеры  $C$  и  $E = gC$  расположены по разные стороны от зеркала  $gH_j$ , как на рис. 12◊9, мы выберем  $u$  и  $w$  так, чтобы дуга  $[u, w]$  входила в камеру  $E$  сквозь зеркало  $gH_j$ , и обозначим через  $v$  любую точку этой дуги, лежащую в предыдущей камере  $\sigma_{gH_j} E = g\sigma_j g^{-1} C = g\sigma_j C = F$ .

По индукции,  $g$  равен считанному с дуги  $[u, w]$  приведённому слову  $w_{EC}$ , самой правой буквой которого является  $\sigma_j$ . Поэтому элемент  $g\sigma_j = w_{EC}\sigma_j$  является композицией  $k - 1$  простых отражений, и доказываемое утверждение верно для него по индукции.

Из сказанного вытекает, что элементы группы  $G$  находятся в биекции с камерами Вейля и выражаются через простые отражения точно также, как и в [прим. 12.2](#) выше. Это даёт сюръективный гомоморфизм  $F_m/N \rightarrow G$ ,  $x_i \mapsto \sigma_i$ . Его инъективность проверяется дословно тем же рассуждением, что в [прим. 12.2](#).  $\square$

#### Следствие 12.2

Камеры Вейля группы  $G$  можно биективно пометить элементами группы так, чтобы всякий элемент  $h \in G$  переводил каждую камеру  $g$  в камеру<sup>1</sup>  $gh$ . При этом все приведённые слова  $w_{ge}$  камеры  $g$  относительно камеры  $e$  будут минимальными по длине выражениями элемента  $g \in G$  через простые отражения.

Доказательство. Первое утверждение было установлено в доказательстве [теор. 12.1](#). Второе доказывается индукцией по длине минимального разложения элемента  $g \in G$  в композицию простых отражений. Утверждение очевидно, когда эта длина 0 или 1. Пусть для каждого элемента  $g \in G$ , представимого в виде композиции не более  $k$  простых отражений, приведённые слова  $w_{ge} = g$  являются минимальными по длине выражениями этого элемента через простые отражения. Достаточно убедиться, что то же самое справедливо для всех композиций  $g\sigma_j$ . Выберем внутри камер  $e$  и  $g$  единичные векторы  $u$  и  $w \neq -u$  так, чтобы натянутая на них плоскость была трансверсальна попарным пересечениям зеркал и кратчайшая из двух высекаемых этой плоскостью на единичной сфере дуг либо входила в камеру  $g$  сквозь зеркало  $gH_j$ , либо продолжалась за точку  $w$  до пересечения с этим зеркалом. В первом случае считанное с дуги  $[u, w]$  приведённое слово камеры  $g$  кончается на  $\sigma_j$  и имеет длину  $\leq k$ , а приведённое слово камеры  $g\sigma_j$  короче, чем у камеры  $g$ . Поэтому элемент  $g\sigma_j \in G$  является композицией менее  $k$  простых отражений и доказываемое утверждение справедливо для него по индукции. Во втором случае приведённое слово камеры  $g\sigma_j$ , считанное с продолжения дуги  $[u, w]$  сквозь зеркало  $gH_j$ , равно  $w_{ge}\sigma_j$  и имеет длину  $k + 1$ . Если элемент  $g\sigma_j \in G$  является композицией  $\leq k$  простых отражений, доказываемое утверждение снова выполняется для него по индукции. Если же  $g\sigma_j$  не раскладывается в композицию  $\leq k$  простых отражений, то каждое минимальное по длине выражение этого элемента через простые отражения имеет длину  $k + 1$ , и приведённое слово  $w_{ge}\sigma_j$  является одним из таких минимальных выражений.  $\square$

#### Пример 12.3 (образующие и соотношения симметрической группы)

Группа перестановок  $S_{n+1}$  изоморфна группе  $O_{\Delta^n}$  правильного  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  вложенного в  $(n + 1)$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$  с координатами  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  как выпуклая оболочка концов стандартных базисных векторов  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . В самом деле, каждая перестановка базисных векторов однозначно задаёт ортогональное преобразование пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , переводящее симплекс  $\Delta^n$  в себя, и наоборот, каждое преобразование из группы симплекса как-то переставляет его вершины и, тем самым, однозначно продолжается до ортогонального преобразования пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , получающегося из некоторой перестановки базисных векторов. Во избежание многэтажных индексов мы будем обозначать вершину  $e_i$

<sup>1</sup>В этой ситуации говорят, что множество камер Вейля является главным однородным пространством группы  $G$ .

симплекса  $\Delta^n$  символом  $[i]$ , а  $k$ -мерную грань, натянутую на вершины  $[i_0], \dots, [i_k]$  симплекса  $\Delta^n$ , — символом  $[i_0 i_1 \dots i_k]$ . Центр этой грани обозначим через  $\langle i_0 i_1 \dots i_k \rangle \in [i_0 i_1 \dots i_k]$ .

Отражение  $\sigma_{ij}$  в гиперплоскости  $H_{ij} = (e_i - e_j)^\perp$ , проходящей через середину ребра  $[ij]$  и содержащей противоположную этому ребру  $(n-2)$ -мерную грань, натянутую на остальные  $n-1$  вершин, отличных от  $[i], [j]$ , переставляет между собою вершины  $[i], [j]$ , оставляя все остальные вершины на месте. В терминах  $S_{n+1}$ , отражение  $\sigma_{ij}$  осуществляет транспозицию элементов  $i$  и  $j$ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Убедитесь, что при  $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$  зеркала  $H_{ij}$  и  $H_{km}$  ортогональны, а зеркала  $H_{ij}$  и  $H_{jk}$  с попарно различными  $i, j, k$  пересекаются под углом  $\pi/3$ .

Гиперплоскости  $H_{ij}$  осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса  $\Delta^n$  на  $n!$  меньших симплексов, каждый из которых имеет вершины в некоторой вершине  $[i_0]$  симплекса  $\Delta^n$ , в центре  $\langle i_0 i_1 \rangle$  некоторого выходящего из этой вершины ребра  $[i_0 i_1]$ , в центре  $\langle i_0 i_1 i_2 \rangle$  некоторой примыкающей к этому ребру двумерной грани  $[i_0 i_1 i_2]$  и т. д. вплоть до вершины, расположенной в центре  $[i_0 i_1 \dots i_n] = [01 \dots n]$  всего симплекса  $\Delta^n$ . При  $n=3$  мы получаем барицентрическое разбиение тетраэдра, изображённое на рис. 12◊4 на стр. 153 выше. Надпишем симплекс

$$[\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle], \quad (12-4)$$

единичным элементом  $e \in S_{n+1}$ . Каждая перестановка  $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$  переводит симплекс  $e$  в симплекс

$$[\langle g_0 \rangle, \langle g_0, g_1 \rangle, \langle g_0, g_1, g_2 \rangle, \dots, \langle g_0 g_1 \dots g_{n-1} \rangle, \langle g_0 g_1 \dots g_n \rangle], \quad (12-5)$$

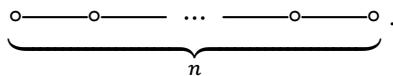
который мы пометим элементом  $g$ . В результате все  $n!$  симплексов разбиения биективно пометятся элементами группы  $S_{n+1}$ , совершенно аналогично тому, как это было в прим. 12.2 на стр. 152. Те же самые аргументы, что и в прим. 12.2, показывают, что группа  $S_{n+1}$  является группой Кокстера и порождается  $n$  отражениями  $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{i-1, i}$ , где  $1 \leq i \leq n$ , в зеркалах  $H_i \stackrel{\text{def}}{=} (e_i - e_{i-1})^\perp$ , высекающих гиперграни симплекса  $e$ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Удостоверьтесь в истинности последнего высказывания.

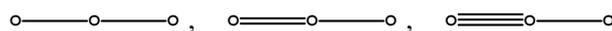
В силу теор. 12.1 на стр. 157 и предыдущего упр. 12.1 группа  $S_{n+1}$  изоморфна фактору  $F_n / N$  свободной группы  $F_n$  с образующими  $x_1, \dots, x_n$  по наименьшей нормальной подгруппе  $N \triangleleft F_n$ , содержащей слова  $x_i^2$  с  $1 \leq i \leq n$ , слова  $(x_i x_j)^2$  с  $1 \leq i, j \leq n$  и  $|i-j| \geq 2$ , и слова  $(x_k x_{k+1})^3$  с  $1 \leq k \leq n-1$ . Изоморфизм переводит образующую  $x_i \in F_n$  в транспозицию  $s_i$  элементов  $i-1$  и  $i$ . Соотношение  $(\sigma_i \sigma_j)^2 = e$  означает, что  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  при  $|i-j| \geq 2$ , т. е. что транспозиции непересекающихся пар последовательных элементов коммутируют друг с другом. Соотношение  $(\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k)^3 = e$  чаще записывают в виде  $\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}$  и называют *уравнением треугольника*, поскольку простейшей его инкарнацией является соотношение между отражениями в медианах правильного треугольника.

**12.4. Классификация групп Кокстера** даётся в терминах *графов Кокстера*. По определению, вершинами графа Кокстера группы Кокстера  $G$  являются простые зеркала  $H_1, \dots, H_m$ , высекающие гиперграни произвольно зафиксированной камеры Вейля группы  $G$ . Вершина  $H_i$  соединяется с вершиной  $H_j$  неориентированными рёбрами, число которых равно  $m_{ij} - 2$ , где  $m_{ij}$  — количество зеркал группы  $G$ , проходящих через пересечение  $H_i \cap H_j$ . Таким образом, между перпендикулярными простыми зеркалами рёбер нет, пара простых зеркал, пересекающихся под

углом  $\pi/3$ , соединяется одним ребром, простые зеркала, составляющие угол  $\pi/4$  — двумя рёбрами и т. д. Например, симметрическая группа  $S_n$  имеет граф Кокстера



Граф Кокстера диэдральной группы  $D_m$  из прим. 12.1 на стр. 150 состоит из двух вершин, соединённых  $m - 2$  рёбрами. Графы Кокстера групп тетраэдра, октаэдра и икосаэдра из прим. 12.2 на стр. 152 имеют вид

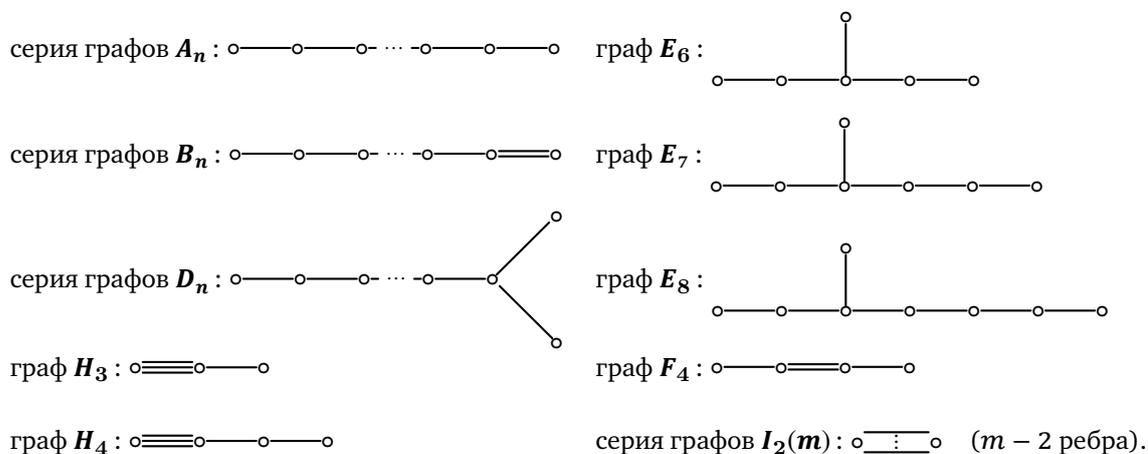


(число рёбер между вершинами  $i$  и  $j$  равно числу  $m_k$  из таблицы со стр. 153).

Граф Кокстера несвязен если и только если объёмлющее евклидово пространство  $V$  раскладывается в ортогональную прямую сумму  $V = \bigoplus V_i$  инвариантных относительно группы  $G$  подпространств  $V_i \subset V$ , а группа  $G$  — в прямое произведение  $G = \prod G_i$  своих подгрупп Кокстера  $G_i \subset G$ , которые находятся в биекции с компонентами  $V_i$  и независимо действуют каждая на своей компоненте, оставляя все остальные компоненты неподвижными. При этом зеркала каждой подгруппы  $G_i$  высекаются из подпространства  $V_i$  теми зеркалами группы  $G$ , которые не содержат  $V_i$ , но содержат все остальные подпространства  $V_j$  с  $j \neq i$ , а графы Кокстера групп  $G_i$  являются связными компонентами графа Кокстера группы  $G$ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Убедитесь в этом.

Полный список связных графов Кокстера таков<sup>1</sup>:



Доказательство<sup>2</sup> состоит в последовательном исключении невозможных конфигураций зеркал посредством простых геометрических соображений и явном построении примеров, реализующих перечисленные выше конфигурации. К сожалению, временные рамки данного курса не позволяют нам разобрать это доказательство.

<sup>1</sup>Нижний индекс в обозначении графа всегда равен числу его вершин.

<sup>2</sup>См. мою лекцию [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_07.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_07.pdf) или Дубнинскую брошюру: Е. Ю. Смирнов. «Группы отражений и правильные многогранники». М.: МЦНМО, 2009.

### §13. Мёбиусовы преобразования

**13.1. Сферы.** Напомню, что сферой радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $c$  евклидова аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  называется квадрика  $S(r, c) \subset \mathbb{A}^n$ , задаваемая аффинным уравнением

$$(x - c, x - c) - r^2 = 0, \quad (13-1)$$

где  $(*, *)$  обозначает евклидово скалярное произведение на подлежащем аффинному пространству  $\mathbb{A}^n$  евклидовом векторном пространстве  $V \simeq \mathbb{R}^n$ . Мы будем называть уравнение (13-1) *приведённым* аффинным уравнением сферы  $S(r, c)$  и обозначать неоднородный квадратичный многочлен, стоящий в его левой части, через

$$s_{r,c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x - c, x - c) - r^2. \quad (13-2)$$

Геометрически, уравнение (13-1) означает, что сфера  $S(r, c)$  является ГМТ  $x$ , удалённых от центра сферы на расстояние  $r$ . Каждая проходящая через  $c$  прямая с вектором скорости  $e \in V$  единичной длины пересекает сферу по точкам  $c \pm re$ . Отрезок с концами в таких точках называется *диаметром* сферы. Уравнение (13-1) равносильно тому, что  $(x - c + re, x - c - re) = 0$ . Таким образом, сфера представляет собою ГМТ, из которых её диаметр виден под прямым углом.

**ПРИМЕР 13.1 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)**

Если точки  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$  не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера. Она называется *описанной сферой* симплекса  $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ . Действительно, ГМТ, равноудалённых от двух точек  $p_0$  и  $p_i$ , описывается уравнением

$$(x - p_0, x - p_0) = (x - p_i, x - p_i),$$

которое эквивалентно линейному неоднородному уравнению

$$2(x, p_i - p_0) = (p_i, p_i) - (p_0, p_0). \quad (13-3)$$

Задаваемая этим уравнением гиперплоскость проходит через точку  $(p_i + p_0)/2$  перпендикулярно вектору  $p_i - p_0$  и называется *срединным перпендикуляром* к отрезку  $[p_0, p_i]$ . ГМТ, равноудалённых от всех точек  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , является пересечением срединных перпендикуляров к  $n$  отрезкам  $[p_0, p_i]$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Так как векторы  $p_i - p_0$  линейно независимы, система из  $n$  линейных уравнений (13-3) имеет единственное решение  $c$ . Это центр описанной сферы.

**13.1.1. Пересечение сферы с аффинным подпространством.** Если подпространство  $\Pi \subset \mathbb{A}^n$  находится на расстоянии  $\varrho$  от центра  $c$  сферы  $S(r, c)$ , то при  $\varrho > r$  пересечение  $\Pi \cap S(r, c)$  пусто, а при  $\varrho < r$  представляет собою лежащую в  $\Pi$  сферу радиуса  $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$  с центром в ортогональной проекции  $c_\Pi$  точки  $c$  на подпространство  $\Pi$ . Чтобы убедиться в этом, положим в уравнении (13-1) переменную точку  $x$  равной  $c_\Pi + z$ , где вектор  $z = x - c_\Pi$  пробегает направляющее векторное пространство аффинного подпространства  $\Pi$ . Так как  $(z, c_\Pi - c) = 0$ , а  $(c_\Pi - c, c_\Pi - c) = \varrho^2$ , мы получаем на  $z$  уравнение  $(z, z) = r^2 - \varrho^2$ .

При  $\varrho = r$  сфера  $\Pi \cap S(r, c)$  вырождается в одну точку  $p_\Pi$ . Следовательно, в этом случае подпространство  $\Pi$  содержится в касательном пространстве к сфере в точке  $p_\Pi \in S(r, c)$ . Таким образом, в каждой точке  $p \in S$  касательное пространство  $T_p S(r, c)$  представляет собою

гиперплоскость, проходящую через точку  $p$  перпендикулярно вектору  $p - c$ , и задаётся линейным неоднородным уравнением

$$(x - c, p - c) = r^2. \quad (13-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.1. Убедитесь, что это согласуется с описанием касательного пространства к произвольной проективной квадрике, данным в н° 4.3.1 на стр. 44.

**13.1.2. Степень точки относительно сферы.** Значение  $s_{r,c}(p) = (p - c, p - c) - r^2$  квадратичного полинома (13-2) на произвольно взятой точке  $p \in \mathbb{A}^n$  называется *степенью* точки  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Степень обращается в нуль в точности на точках сферы  $S(r, c)$  и отрицательна внутри ограничиваемого сферой шара, достигая своего минимума  $-r^2$  в единственной точке — центре сферы. Каждая внешняя по отношению к шару точка  $p$  имеет положительную степень  $|p - c|^2 - r^2 = |p - q|^2$ , равную квадрату длины любого касательного отрезка  $[p, q]$ , опущенного из  $p$  на сферу, см. рис. 13◊1.

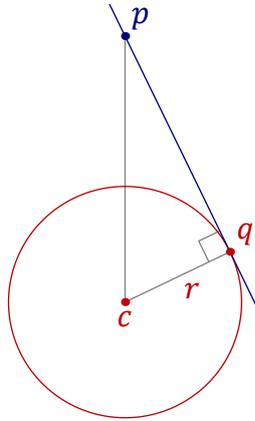


Рис. 13◊1.  $s_{r,c}(p) = |q - p|^2$ .

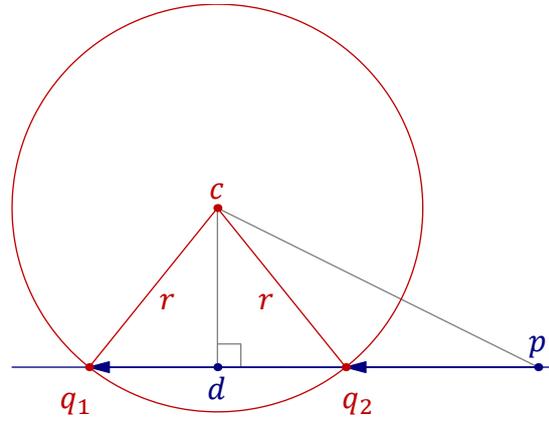


Рис. 13◊2.  $s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p)$ .

Вообще, если проходящая через точку  $p$  прямая пересекает сферу  $S(r, c)$  в точках  $q_1, q_2$  или касается её в точке  $q_1 = q_2$ , то центр  $d = (q_1 + q_2) / 2$  отрезка  $[q_1, q_2]$  является ортогональной проекцией центра сферы на эту прямую<sup>1</sup> и по теореме Пифагора  $s_{r,c}(p) = |p - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 + |d - c|^2 - r^2 = |d - p|^2 - |q_1 - d|^2 = (d - p + (q_1 - d), d - p - (q_1 - d)) = (q_1 - p, q_2 - p)$ , см. рис. 13◊2. Равенство

$$s_{r,c}(p) = (q_1 - p, q_2 - p) \quad (13-5)$$

известно как *теорема о степени точки относительно сферы*.

ПРИМЕР 13.2 (радикальная гиперплоскость)

ГМТ, имеющих равные степени относительно сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ , описывается уравнением  $(x - c_1, x - c_1) - r_1^2 = (x - c_2, x - c_2) - r_2^2$ , которое эквивалентно линейному уравнению

$$\left(x - \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1\right) = \frac{r_1 + r_2}{2} (r_1 - r_2) \quad (13-6)$$

задающему гиперплоскость, перпендикулярную вектору  $c_2 - c_1$  и удалённую от середины отрезка  $[c_1, c_2]$  на расстояние  $(r_1^2 - r_2^2) / 2|c_2 - c_1|$  в направлении второй сферы. Эта гиперплоскость называется *радикальной гиперплоскостью* сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$ . Когда сферы пересекаются, т. е. при  $r_1 + r_2 \geq |c_2 - c_1|$ , радикальная гиперплоскость пересекает каждую из сфер в точности по сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

<sup>1</sup>См. н° 13.1.1 на стр. 161.

**13.1.3. Сферы как комплексные проективные квадрики.** Рассмотрим евклидово векторное пространство  $V = \mathbb{R}^n$  как множество вещественных точек комплексного векторного пространства  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  с комплексно билинейной формой  $(*, *) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , продолжающей евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^n$ , и вложим  $\mathbb{C}^n$  в качестве стандартной аффинной карты  $x_0 = 1$  в комплексное проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  — проективизацию векторного пространства  $W = \mathbb{C}e_0 \oplus V_{\mathbb{C}}$ . Проективное замыкание сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{A}(V_{\mathbb{C}})$  с аффинным уравнением  $(x, x) - 2(x, c) + (c, c) - r^2 = 0$  задаётся однородным уравнением

$$(x, x) - 2x_0(x, c) + x_0^2((c, c) - r^2) = 0, \quad (13-7)$$

где через  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $c = (c_1, \dots, c_n)$  по-прежнему обозначаются последние  $n$  координат, а через  $(*, *)$  — стандартное комплексно билинейное скалярное произведение на  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$\left( (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{C}. \quad (13-8)$$

Все сферы (13-7) пересекают бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$  по абсолютной квадрике

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0\}, \quad (13-9)$$

состоящей из (комплексных) изотропных векторов евклидова скалярного произведения (13-8).

**УПРАЖНЕНИЕ 13.2.** Пусть две проективные квадрики имеют общее гиперплоское сечение. Покажите, что у них есть и второе общее гиперплоское сечение<sup>1</sup>.

Применительно к сферам (13-7) утверждение из [упр. 13.2](#) очевидно: однородные уравнения

$$\begin{aligned} (x, x) - x_0(2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2) &= 0 \\ (x, x) - x_0(2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

при любых  $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$  и  $c_1, c_2 \in V_{\mathbb{C}}$  совпадают друг с другом как при  $x_0 = 0$ , так и на гиперплоскости, вдоль которой совпадают друг с другом линейные множители, на которые умножается  $x_0$ . Второе гиперплоское сечение описывается уравнением

$$2(x, c_1) + x_0(c_1, c_1) - x_0 r_1^2 = 2(x, c_2) + x_0(c_2, c_2) - x_0 r_2^2,$$

которое преобразуется к тому же самому виду, что и уравнение (13-10) выше:

$$\left( x - x_0 \frac{c_1 + c_2}{2}, c_2 - c_1 \right) = x_0 \frac{r_1 + r_2}{2} (r_1 - r_2). \quad (13-10)$$

При  $c_1 \neq c_2$  и  $x_0 = 1$  оно задаёт радикальную гиперплоскость (13-10), а при  $c_1 = c_2$  — бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ . Таким образом, радикальной гиперплоскостью двух концентрических сфер разумно считать бесконечно удалённую гиперплоскость.

**УПРАЖНЕНИЕ 13.3.** Покажите, что все квадрики (13-7) с центром в данной точке  $c \in \mathbb{C}^n$  и произвольными  $r \in \mathbb{C}$  образуют пучок комплексных проективных квадрик, натянутый на двойную бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0^2 = 0$  и простой конус  $(x - c, x - c) = 0$  с вершиной  $c$  над абсолютной квадрикой (13-9), причём все остальные квадрики пучка, за исключением этих двух, являются гладкими.

<sup>1</sup>Возможно, совпадающее с первым.

ПРИМЕР 13.3 (ПРОСТРАНСТВО ПСЕВДОСФЕР)

Все квадратичные формы (13-7) с вещественными  $c \in V \simeq \mathbb{R}^n$  и  $r > 0$  лежат в вещественном векторном подпространстве  $\Sigma \subset S^2W^*$  размерности  $n + 2$ , состоящем из всех однородных вещественных квадратичных форм вида

$$q = \alpha \cdot (x, x) - 2x_0(x, c) + \beta \cdot x_0^2, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, c \in V. \quad (13-11)$$

Проективизация  $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\Sigma)$  называется пространством  $(n - 1)$ -мерных псевдосфер в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом,  $\mathbb{S} \simeq \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$  представляет собою вещественное проективное пространство размерности  $n + 1$ . Стандартная аффинная карта  $U_\alpha \subset \mathbb{S}$  состоит из псевдосфер, которые можно записать приведённым уравнением

$$(x - x_0 c / \alpha, x - x_0 c / \alpha) - x_0^2 ((c, c) - \alpha \beta) / \alpha^2 = 0. \quad (13-12)$$

При  $(c, c) - \alpha \beta > 0$  такая квадратика является сферой с квадратом радиуса

$$r^2 = ((c, c) - \alpha \beta) / \alpha^2,$$

при  $(c, c) - \alpha \beta = 0$  — простым конусом с вершиной  $c$  над абсолютной квадратикой (13-9), который виден в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , а при  $(c, c) - \alpha \beta < 0$  псевдосфера (13-12) является гладкой проективной квадратикой без вещественных точек, которую мы будем называть *мнимой сферой*. На векторном пространстве  $\Sigma$  имеется каноническая квадратичная форма

$$\varrho(q) \stackrel{\text{def}}{=} (c, c) - \alpha \beta, \quad (13-13)$$

пропорциональная квадрату радиуса сферы и имеющая сигнатуру  $(n + 1, 1)$ . Задаваемая этой формой проективная квадратика  $R = V(\varrho)$  выглядит в аффинной карте  $U_\alpha$  как сферический параболоид  $(c, c) = \beta$ , состоящий из сфер нулевого радиуса. Внутренность  $(c, c) < \beta$  этого параболоида состоит из мнимых сфер, а внешность  $(c, c) > \beta$  — из настоящих сфер радиуса  $r = \sqrt{(c, c) - \beta}$ . Бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty = \mathbb{P}(\text{Ann } \alpha)$  карты  $U_\alpha$  состоит из псевдосфер (13-11), имеющих  $\alpha = 0$  и распадающихся в объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $2(x, c) = \beta x_0$ , которая совпадает с бесконечно удалённой гиперплоскостью если и только если  $c = 0$ . Псевдосфера  $x_0^2 = 0$ , в которой бесконечно удалённая гиперплоскость  $L_\infty$  касается параболоида  $R$ , обозначается  $\infty \in \mathbb{S}$ .

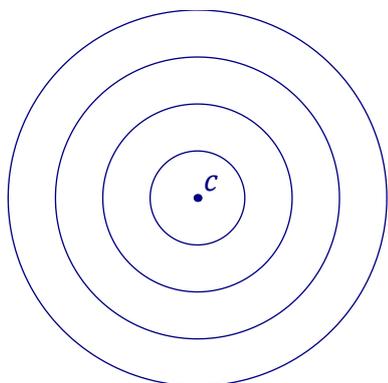


Рис. 13◊3. Пучок концентрических сфер.

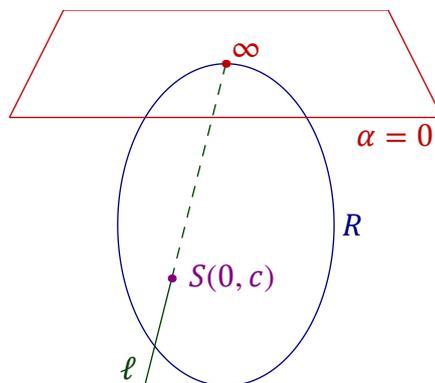


Рис. 13◊4. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

Пример 13.4 (пучки сфер)

Из предыдущего прим. 13.3 вытекает, что все вещественные квадрики из пучка комплексных проективных квадратик, порождённого двумя настоящими сферами  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  в  $\mathbb{R}^n$ , образуют прямую  $\ell$  в пространстве псевдосфер  $\mathbb{S}$ . Эта прямая пересекает бесконечно удалённую гиперплоскость  $L_\infty \subset \mathbb{S}$  ровно в одной точке вида  $\xi x_0$ , где  $\xi \in W^*$  — однородная вещественная линейная форма от  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Если  $\xi = x_0$ , точка  $\ell \cap L_\infty = \infty = R \cap L_\infty$  является бесконечной точкой параболоида  $R$ , и прямая  $\ell$  пересекает параболоид  $R$  ещё ровно в одной, отличной от  $\infty$  точке, как на рис. 13◊4. Вторая точка пересечения отвечает псевдосфере  $S(0, c)$  с уравнением  $(x - c, x - c) = 0$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ . Согласно упр. 13.3, такой пучок  $\ell$  является пучком концентрических сфер с центром в  $c$ , см. рис. 13◊3.

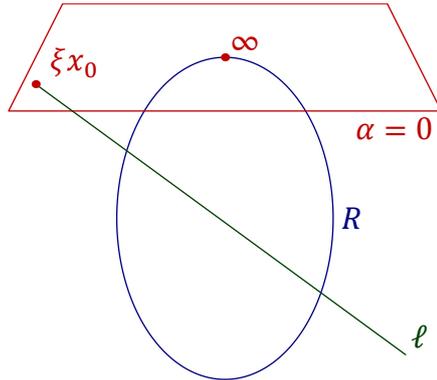


Рис. 13◊5. Пучок без простых конусов.

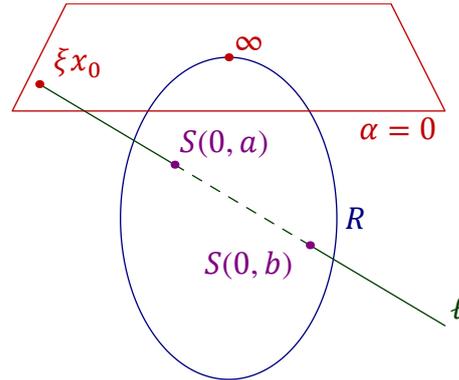


Рис. 13◊6. Пучок с двумя простыми конусами.

Если  $\ell \cap L_\infty \neq \infty$ , то в пучке  $\ell$  содержится ровно одна распавшаяся квадрика — объединение бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  и гиперплоскости  $\Pi = \text{Ann } \xi$ , которая является вторым, отличным от бесконечно удалённого, общим гиперплоским сечением всех сфер пучка и, тем самым, видна в аффинном пространстве  $A^n = A(V)$  как радикальная гиперплоскость любой пары сфер в пучке  $\ell$ . При этом пучок  $\ell$  может содержать либо ни одного, либо один, либо два простых конуса, отвечающих точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$ , как на рис. 13◊5, рис. 13◊9 и рис. 13◊6 соответственно.

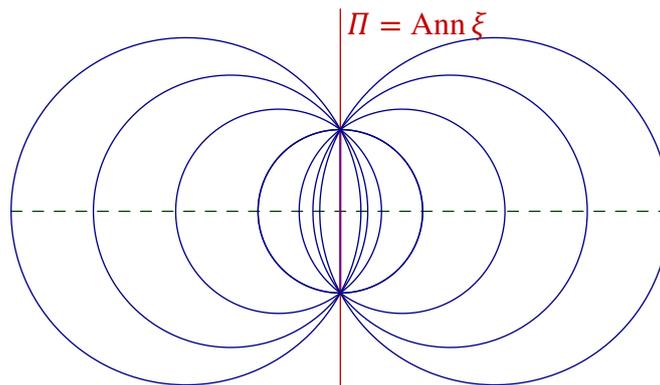


Рис. 13◊7. Пучок пересекающихся сфер.

В первом случае прямая  $\ell$  не пересекает  $R$  и состоит из всех сфер, пересекающих радикальную ось  $\Pi = \text{Ann } \xi$  порождающих пучок сфер  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  по фиксированной  $(n - 2)$ -мерной

сфере  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ . Такой пучок называется *пучком пересекающихся сфер*. Сферы  $S(r_1, c_1)$  и  $S(r_2, c_2)$  порождают пучок пересекающихся сфер если и только если  $r_1 + r_2 > |c_2 - c_1|$ . Базисное множество пучка пересекающихся сфер является объединением абсолютной квадрики и вещественной сферы  $S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

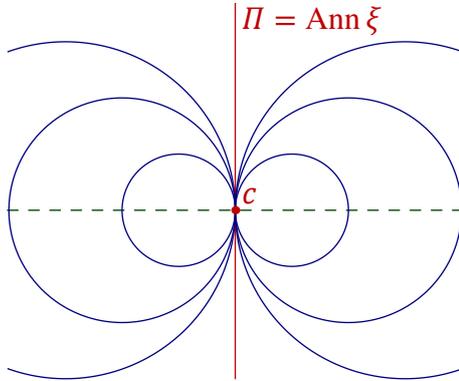


Рис. 13♦8. Пучок соприкасающихся сфер.

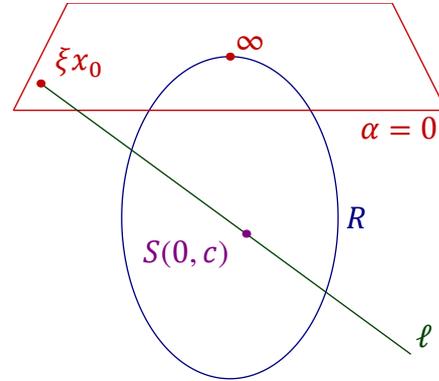


Рис. 13♦9. Соответствующая прямая в  $\mathbb{S}$ .

Второй случай является вырождением первого: при  $|c_2 - c_1| = r_1 + r_2$  базисная сфера пучка  $\ell$  вырождается в одну точку  $c = \Pi \cap (c_1 c_2)$ . Все сферы такого пучка касаются друг друга в этой точке  $c$ , имеют центры на прямой  $(c_1 c_2)$  и при  $r \rightarrow \infty$  стремятся к гиперплоскости  $\Pi$ , которая проходит через точку  $c$  перпендикулярно прямой  $(c_1 c_2)$ , см. рис. 13♦8. Отвечающая этому пучку прямая  $\ell$  касается параболоида  $R$  в псевдосфере  $S(0, c)$ , видимой в  $\mathbb{R}^n$  как двойная точка  $c$ , см. рис. 13♦9. Такой пучок  $\ell$  называется *пучком соприкасающихся сфер*.

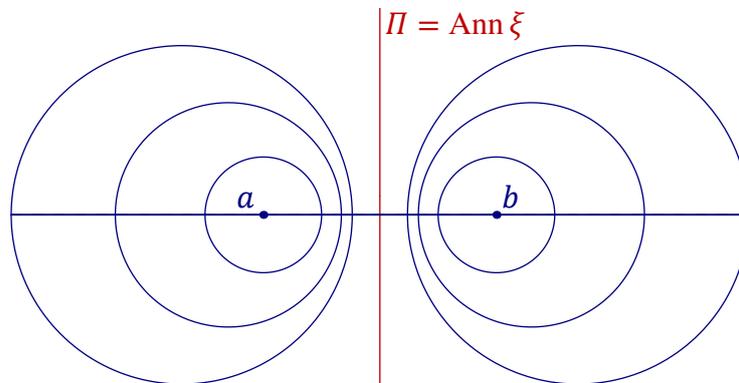


Рис. 13♦10. Пучок непересекающихся сфер.

Третий случай равносителен неравенству  $r_1 + r_2 < |c_2 - c_1|$  и отвечает прямой  $\ell$ , которая пересекает параболоид  $R$  в двух различных точках  $S(0, a), S(0, b)$ , видимых в  $\mathbb{R}^n$  как две различные двойные точки  $a, b \in (c_1, c_2)$ , см. рис. 13♦6. Такой пучок называется *пучком непересекающихся сфер*: никакие две сферы пучка не пересекаются<sup>1</sup>, но при этом любые две сферы имеют одну и ту же радикальную ось  $\Pi$ , к которой все сферы пучка стремятся при  $r \rightarrow \infty$ , см. рис. 13♦10. При подходе к точкам пересечения прямой  $\ell$  с параболоидом  $R$  радиусы сфер стремятся к нулю, а

<sup>1</sup>Вернее, пересекаются по двум мнимым сферам: абсолютной сфере  $I$  из форм. (13-9) на стр. 163 и радикальному гиперплосковому сечению  $\Pi \cap S(r_1, c_1) = \Pi \cap S(r_2, c_2) = S(r_1, c_1) \cap S(r_2, c_2)$ .

сами сферы вырождаются в двойные точки  $a$  и  $b$ . Если двигать прямую  $\ell$  в пространстве  $\mathbb{P}(\Sigma)$  так, чтобы две точки её пересечения с параболоидом  $R$  слились в одну точку касания, двойные точки  $a$  и  $b$  сольются в одну точку  $c$ , и мы вновь получим пучок соприкасающихся сфер.

**13.2. Инверсии.** Так как поляризация однородной квадратичной формы (13-7) имеет вид

$$\tilde{q}(x, y) = (x - x_0c, y - y_0c) - r^2x_0y_0,$$

полярное преобразование<sup>1</sup> относительно сферы  $S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  переводит центр  $c$  в бесконечно удалённую гиперплоскость  $x_0 = 0$ , а каждую отличную от центра точку  $p \in \mathbb{R}^n$  — в полярную ей аффинную гиперплоскость

$$\Pi_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - c, p - c) = r^2\}, \quad (13-14)$$

перпендикулярную прямой  $(pc)$  и находящуюся на расстоянии  $r^2 / |p - c|$  от центра сферы по ту же сторону, что и точка  $p$ . Сопряжённая точке  $p$  на прямой  $(pc)$  точка  $p' = (pc) \cap \Pi_p$  обозначается  $\sigma_{r,c}(p)$  и называется *инверсной* точке  $p$  относительно сферы  $S(r, c)$ . Она однозначно характеризуется тем, что  $(p' - c, p - c) = r^2$ , и явно выражается через  $p$  по формуле

$$\sigma_{r,c}(p) = c + \frac{r^2(p - c)}{(p - c, p - c)}. \quad (13-15)$$

Инверсия задаёт на каждой проходящей через  $c$  проективной прямой инволюцию с неподвижными точками  $\ell \cap S(r, c)$ . Эта инволюция переставляет центр сферы с бесконечностью и естественно продолжается на одноточечную компактификацию  $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \infty$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  до инволютивного гомеоморфизма  $\sigma_{r,c}: \hat{\mathbb{R}}^n \simeq \hat{\mathbb{R}}^n$ , который переставляет друг с другом сопряжённые относительно сферы точки на каждой проходящей через центр сферы прямой, в частности, оставляет каждую точку сферы на месте и переставляет точки  $c$  и  $\infty$ . Таким образом, любая проходящая через центр сферы прямая переводится инверсией в себя с сохранением двойного отношения, и две точки такой прямой инверсны друг другу если и только если они гармоничны точкам пересечения этой прямой со сферой<sup>2</sup>. В частности, каждое проходящее через центр сферы аффинное подпространство  $\Pi$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в себя, и ограничение инверсии на такое подпространство является в нём инверсией относительно сферы  $\Pi \cap S(r, c)$ .

**Предложение 13.1**

Инверсия  $\sigma_{r,c}$  переводит каждую не проходящую через  $c$  гиперплоскость  $\Pi$  в сферу с диаметром  $[p, c]$ , где  $p$  — полюс гиперплоскости  $\Pi$  относительно сферы  $S(r, c)$ , а каждую проходящую через  $c$  сферу  $Q$  — в гиперплоскость, полярную второму концу выпущенного из  $c$  диаметра сферы  $Q$ .

**Доказательство.** В силу того, что инверсия обратна самой себе, достаточно доказать только первое утверждение. Поскольку поляр  $\Pi_x$  любой точки  $x \in \Pi$  проходит через полюс  $p$  этой гиперплоскости, отрезок  $[p, c]$  виден из инверсной к  $x$  точки  $x' = (cx) \cap \Pi_x$  под прямым углом, см. рис. 13♦11.  $\square$

**Упражнение 13.4.** Проверьте прямым вычислением, что отображение (13-15) переводит гиперплоскость  $(x - c, p - c) = r^2$  и сферу  $(x - c, x - p) = 0$  друг в друга.

<sup>1</sup>См. п.° 6.1 на стр. 69.

<sup>2</sup>См. предл. 6.1 на стр. 70.

## Предложение 13.2

Каждая не проходящая через центр инверсии сфера  $Q = S(t, p)$  переводится инверсией  $\sigma_{r,c}$  в сферу  $Q'$ , гомотетичную сфере  $Q$  относительно центра инверсии  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$ , где  $s_{t,p}(c) = (c - p, c - p) - t^2$  означает степень<sup>1</sup> центра инверсии  $c$  относительно сферы  $Q$ , см. рис. 13◊12. В частности, сфера  $Q$  переводится инверсией в себя если и только если она перпендикулярна сфере  $S(r, c)$ .

Доказательство. По теореме о степени точки относительно сферы<sup>2</sup> на каждой проходящей через  $c$  прямой, пересекающей сферу  $Q$  в точках  $x_1, x_2$ , выполняется равенство  $(x_1 - c, x_2 - c) = s_{t,p}(c)$ . Поэтому для гомотетичных точкам  $x_1, x_2$  относительно  $c$  с коэффициентом  $r^2/s_{t,p}(c)$  точек  $x'_1, x'_2$  справедливы равенства  $(x_1 - c, x'_2 - c) = r^2 = (x'_1 - c, x_2 - c)$ , означающие, что  $\sigma_{r,c}(x_1) = x'_2$ , а  $\sigma_{r,c}(x_2) = x'_1$ . Это доказывает первое утверждение. Равенство  $\sigma_{r,c}Q = Q$  равносильно тому, что коэффициент гомотетии  $r^2/s_{t,p}(c) = 1$ , что можно переписать как  $(p - c, p - c) = r^2 + t^2$ . Последнее означает, что расстояние между центрами сфер равно сумме квадратов их радиусов, т. е. что отрезок  $[c, p]$  виден из каждой точки пересечения сфер под прямым углом.  $\square$

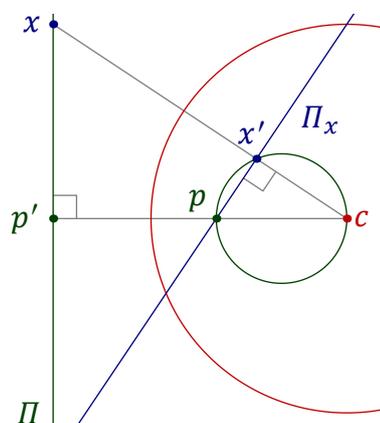


Рис. 13◊11. Инверсная сфера и гиперплоскость.

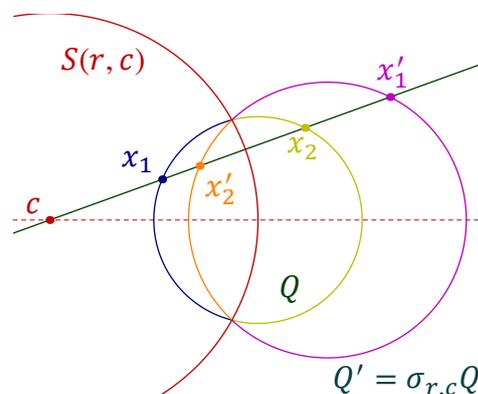


Рис. 13◊12. Инверсные сферы.

Предостережение 13.1. Центр сферы  $Q$  не обязан переходить при инверсии  $\sigma_{r,c}$  в центр сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$ . Например, если сфера  $Q = S(t, p)$  перпендикулярна сфере  $S = S(r, c)$ , то её центр перейдет в точку пересечения радикальной гиперплоскости с линией центров.

Упражнение 13.5. Убедитесь в этом и докажите, что прообразом центра сферы  $Q' = \sigma_{r,c}(Q)$  является точка  $c'$ , инверсная точке  $c$  относительно сферы  $Q$ .

## Следствие 13.1

Две различные точки тогда и только тогда инверсны относительно сферы  $S$  (соотв. симметричны относительно гиперплоскости  $\Pi$ ), когда все проходящие через них сферы и гиперплоскости перпендикулярны сфере  $S$  (соотв. гиперплоскости  $\Pi$ ), см. рис. 13◊13 (соотв. рис. 13◊14).

<sup>1</sup>См. п° 13.1.2 на стр. 162.

<sup>2</sup>См. формулу (13-5) на стр. 162.

Доказательство [сл. 13.1](#). Если точки  $a$  и  $b$  инверсны относительно сферы, то любая проходящая через них сфера  $Q$  и инверсная ей сфера  $Q'$  обе пересекают сферу  $S$  по одной и той же неподвижной относительно инверсии  $(n - 2)$ -мерной сфере  $S \cap Q = S \cap Q'$  и, стало быть, лежат в одном пучке пересекающихся сфер<sup>1</sup>, откуда  $Q = Q'$ , так как в любом пучке есть ровно одна квадрика, проходящая через заданную не базисную точку. Значит,  $Q$  и  $S$  перпендикулярны по [предл. 13.2](#). Каждая проходящая через  $a$  и  $b$  гиперплоскость походит и через лежащий на прямой  $(ab)$  центр сферы и, тем самым, тоже перпендикулярна сфере. Наоборот, поскольку для любой точки  $x \neq a, b$  существует сфера или гиперплоскость, проходящая через  $a$  и  $b$ , но не проходящая через  $x$ , двухточечное множество  $\{a, b\}$  является пересечением всех содержащих его сфер и гиперплоскостей. Если каждая из них переводится инверсией в себя, то и множество  $\{a, b\}$  переходит в себя.  $\square$

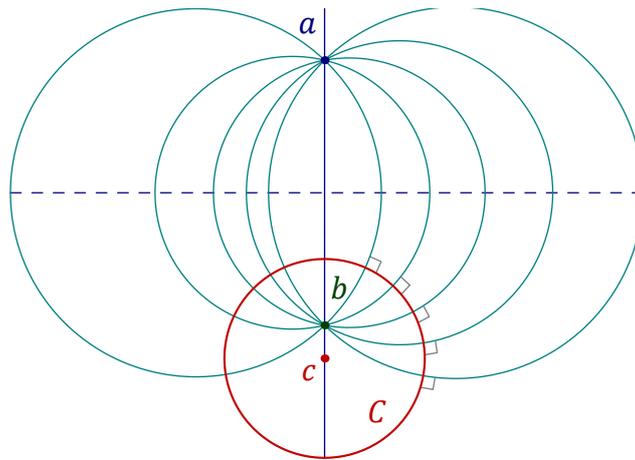


Рис. 13◊13. Отражение в сфере.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. Докажите [сл. 13.1](#) для отражения в гиперплоскости, см. [рис. 13◊14](#).

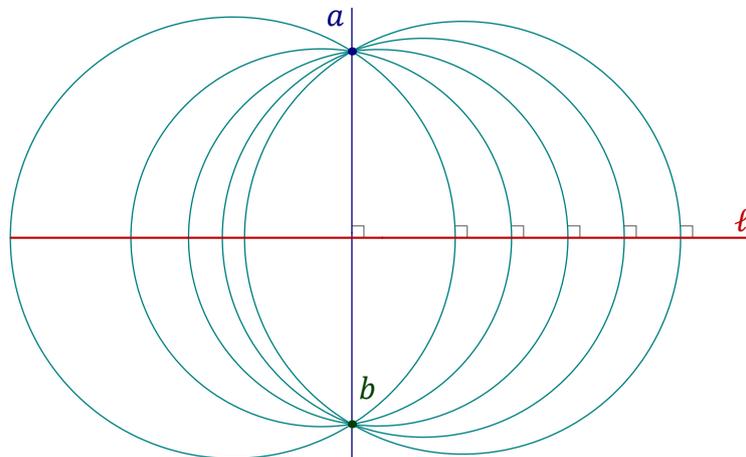


Рис. 13◊14. Отражение в гиперплоскости.

Соглашение 13.1. Имея в виду [сл. 13.1](#) мы, допуская известную вольность, будем иногда называть инверсии относительно сферы  $S$  *отражениями в сфере*  $S$ .

<sup>1</sup>См. [прим. 13.4](#) на стр. 165.

**13.2.1. Конформность.** Будем называть *касательным векторным пространством* к аффинной гиперплоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \Pi$  направляющее векторное подпространство этой гиперплоскости, а *касательным векторным пространством* к сфере  $S = S(r, c) \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $p \in \Pi$  — векторное подпространство  $(p - c)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ , ассоциированное с аффинной касательной гиперплоскостью  $T_p S = p + (p - c)^\perp$ . Под углом между пересекающимися фигурами  $\Phi$  и  $\Psi$ , каждая из которых является сферой или гиперплоскостью, мы понимаем евклидов угол между касательными векторными пространствами к этим фигурам в любой точке  $p \in \Phi \cap \Psi$ , т. е. наименьший из двух смежных углов между перпендикулярными этим касательным пространствам одномерными векторными подпространствами в  $\mathbb{R}^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.7. Убедитесь, что этот угол не зависит от выбора точки  $p \in \Phi \cap \Psi$ .

#### Предложение 13.3

Каждое отражение в сфере или гиперплоскости сохраняет углы между сферами и гиперплоскостями.

*Доказательство.* Случай отражения в гиперплоскости очевиден, поскольку такое отражение является ортогональным линейным преобразованием. Рассмотрим инверсию  $\sigma_{r,c}$ . Пусть точка  $a \neq c$  не лежит на сфере  $S(r, c)$ , и  $b = \sigma_{r,c}(a)$ . Сферы, касающиеся заданной гиперплоскости  $\Pi$  в точке  $a$  образуют пучок  $\ell_\Pi$  соприкасающихся сфер и пересекают любую проходящую через  $a$  сферу или гиперплоскость под одним и тем же углом. Инверсия переводит пучок  $\ell_\Pi$  в пучок соприкасающихся сфер, касающихся касательной гиперплоскости  $T_b \sigma_{r,c}(\Pi)$  фигуры<sup>1</sup>  $\sigma_{r,c}(\Pi)$  в точке  $b$  и также образующих одинаковые углы с каждой проходящей через  $b$  сферой или гиперплоскостью. В пучке  $\ell_\Pi$  существует единственная сфера  $Q$ , проходящая через точки  $a$  и  $b$ . Как мы видели в доказательстве сл. 13.1, эта сфера переводится в себя инверсией  $\sigma_{r,c}$ , а также отражением в срединном перпендикуляре к отрезку  $[a, b]$ . Поэтому две проходящие через  $a$  и  $b$  сферы с касательными гиперплоскостями  $T_a Q_1 = \Pi_1$  и  $T_a Q_2 = \Pi_2$  имеют в точке  $b$  касательные гиперплоскости  $T_b Q_1 = \Pi'_1$  и  $T_b Q_2 = \Pi'_2$ , симметричные гиперплоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  относительно срединного перпендикуляра к отрезку  $[a, b]$  и, стало быть, пересекающиеся под тем же углом.

Если точка  $z \in S(r, c)$ , то углы между сферами и плоскостями, проходящими через  $z$  сохраняются при инверсии  $\sigma_{r,c}$ , поскольку последняя является композицией инверсии  $\sigma_{r/2,c}$  относительно не проходящей через  $z$  сферы  $S(r/2, c)$  и гомотетии с центром  $c$  и коэффициентом 4.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 13.8. Убедитесь в справедливости последнего утверждения и докажите, что угол между любыми двумя проходящими через центр инверсии сферами равен углу между гиперплоскостями, инверсными этим сферам.

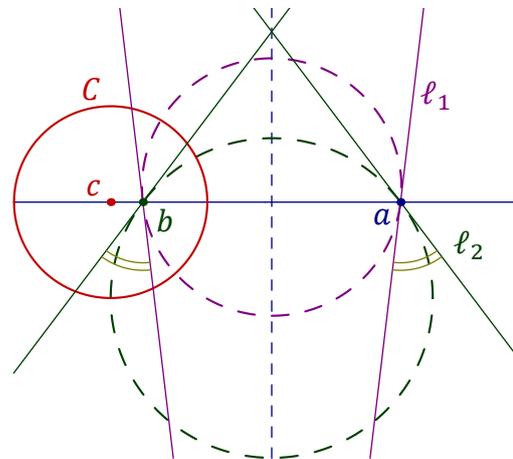


Рис. 13.15. Сохранение углов.

<sup>1</sup> Согласно предыдущему, эта фигура является сферой или гиперплоскостью.

Следствие 13.2

Пусть каждая из двух фигур  $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^n$  является сферой или гиперплоскостью. Обозначим через  $\sigma_\Phi, \sigma_\Psi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  соответствующие отражения или инверсии. Тогда  $\sigma_\Phi \sigma_\Psi \sigma_\Phi^{-1} = \sigma_{\sigma_\Phi(\Psi)}$ , т. е. любые две симметричные относительно  $\Psi$  точки переводятся отражением  $\sigma_\Phi$  в две точки, симметричные относительно  $\sigma_\Phi(\Psi)$ .

Доказательство. Согласно сл. 13.1 на стр. 168 симметричность точек  $a$  и  $b$  относительно  $\Psi$  означает, что все проходящие через  $a$  и  $b$  сферы и гиперплоскости перпендикулярны  $\Psi$ . Сохраняющее углы отражение  $\sigma_\Phi$  биективно отображает множество таких сфер и гиперплоскостей в множество перпендикулярных  $\Phi(\Psi)$  сфер и гиперплоскостей, проходящих через точки  $\Phi(a)$  и  $\Phi(b)$ .  $\square$

Определение 13.1 (конформные отображения)

Непрерывно дифференцируемое отображение  $f : U \rightarrow W$  между двумя открытыми подмножествами  $U, W$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *конформным*, если в каждой точке  $p \in U$  производное линейное отображение  $D_p f : T_p U \rightarrow T_{f(p)} W$  является композицией скалярного растяжения<sup>1</sup> и ортогонального линейного отображения, сохраняющего евклидово скалярное произведение на касательных пространствах  $T_p U \simeq T_{f(p)} W \simeq \mathbb{R}^n$ .

Упражнение 13.9. Убедитесь, что инверсия  $\sigma_{r,c} : \mathbb{R}^n \setminus c \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus c$  является конформным отображением, причём её производное отображение в произвольной точке  $p \neq c$  является композицией отражения в гиперплоскости  $(p - c)^\perp$  и скалярного растяжения с коэффициентом  $r^2 / (p - c, p - c)$ .

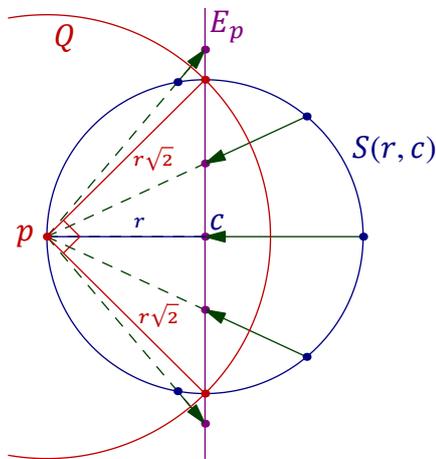


Рис. 13♦16. Стереографическая проекция.

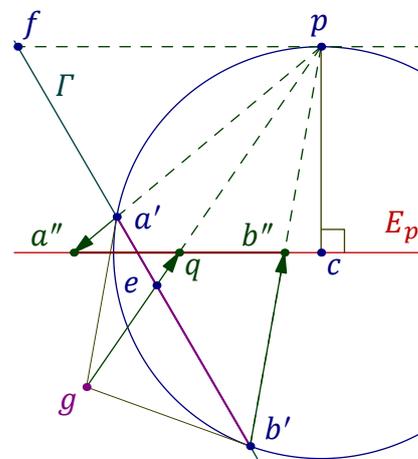


Рис. 13♦17. Соответственные сферы.

**13.3. Стереографическая проекция и инверсии на сфере.** Стереографическая проекция сферы  $S = S(r, c)$  из лежащей на ней точки  $p$  на проходящую через центр сферы перпендикулярно вектору  $p - c$  экваториальную гиперплоскость  $E_p = \{x \mid (x - c, p - c) = 0\}$

$$\pi_p : S(r, c) \setminus p \rightarrow E_p \tag{13-16}$$

<sup>1</sup>Коэффициент которого может зависеть от точки  $p \in U$ .

является ограничением на сферу  $S$  инверсии  $\sigma_Q$  относительно перпендикулярной сферу  $S$  по её экватору  $E_p \cap S$  сферы  $Q$  радиуса  $r\sqrt{2}$  с центром в точке  $p$ , см. рис. 13◊16. Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую лежащую на  $S$  сферу  $S' = \Gamma \cap S$ , высекаемую из  $S$  какой-либо гиперплоскостью  $\Gamma$ , в лежащую в гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость или сферу, высекаемую из  $E_p$  образом  $\sigma_Q(\Gamma)$  гиперплоскости  $\Gamma$  при инверсии  $\sigma_Q$ , который является гиперплоскостью или сферой: первое происходит если гиперплоскость  $\Gamma$  проходит через точку  $p$ , а второе — если не проходит, и во втором случае полюс  $g$  гиперплоскости  $\Gamma$  относительно сферы  $S$  спроектируется из точки  $p$  в центр сферы  $\pi_p(S') = \sigma_Q(\Gamma) \cap E_p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.10. Убедитесь в этом (см. рис. 13◊17).

Наоборот, каждая гиперплоскость  $\Gamma' \subset E_p$  является стереографической проекцией сферы, высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , проходящей через  $\Gamma'$  и  $p$ , а каждая сфера  $S'' = S(t, q) \subset E_p$ , пересекающая прямую  $(qc)$  в точках  $a' = \pi_p(a)$  и  $b' = \pi_p(b)$ , как на рис. 13◊17, является стереографической проекцией сферы  $S' = \Gamma \cap S$  с диаметром  $[a, b]$ , высекаемой из  $S$  гиперплоскостью  $\Gamma$ , полюс  $g$  которой проектируется из точки  $p$  в центр  $q$  сферы  $S'$  и которая является прообразом сферы с диаметром  $[a', b']$  при инверсии  $\sigma_Q$ .

При этом углы между лежащими на  $S$  сферами равны углам между их образами в гиперплоскости  $E_p$  и наоборот.

Каждая точка  $q$ , лежащая снаружи от ограничиваемого сферой  $S = S(r, c)$  шара, задаёт на сфере  $S$  инволюцию  $\sigma_q : S \rightarrow S$ , переставляющую между собою точки пересечения сферы  $S$  с проходящими через  $q$  прямыми<sup>1</sup>. Эта инволюция тождественно действует на сфере  $S \cap \Pi_q$ , высекаемой из сферы  $S$  полярной гиперплоскостью  $\Pi_q$  точки  $q$ , и совпадает с ограничением на сферу  $S$  инверсии относительно сферы  $Q = S(t, q)$ , которая перпендикулярно пересекает сферу  $S$  по неподвижной относительно  $\sigma_q$  сфере  $S \cap \Pi_q$ , имеет центр в точке  $q$  и квадрат радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q) = |q-c|^2 - r^2$ , равный степени точки  $q$  относительно сферы  $S$ , см. рис. 13◊18.

Инволюция  $\sigma_q$  называется *инверсией сферы  $S$* , а точка  $q$  — *центром инверсии  $\sigma_q$* .

Дополним стереографическую проекцию (13-16) до гомеоморфизма

$$\pi_p : S(r, c) \simeq \hat{E}_p, \quad p \mapsto \infty, \quad x \mapsto (px) \cap E_p \text{ при } x \neq p, \quad (13-17)$$

где  $\hat{E}_p = E_p \sqcup \infty$  — одноточечная компактификация экваториальной гиперплоскости  $E_p$ , и будем рассматривать отражения в лежащих внутри  $E_p$  гиперплоскостях как оставляющие на месте точку  $\infty$  инволюции пространства  $\hat{E}_p$ .

Предложение 13.4

Полненная стереографическая проекция (13-17) устанавливает биекцию между инверсиями сферы  $S = S(r, c)$  и отражениями пополненного евклидова пространства  $\hat{E}_p$  в лежащих в нём сферах и гиперплоскостях, переводя каждую инверсию  $\sigma_q : S \simeq S$  в композицию

$$\pi_p \sigma_q \pi_p^{-1} : \hat{E}_p \simeq \hat{E}_p, \quad (13-18)$$

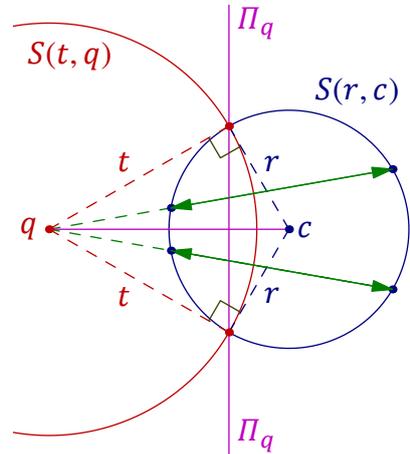


Рис. 13◊18. Инверсия  $\sigma_q : S(p, r) \rightarrow S(p, r)$ .

<sup>1</sup>Ср. с прим. 5.6 на стр. 66.

которая является отражением в стереографическом образе лежащей на  $S$  сферы  $P_q \cap S$ , высекаемой полярной гиперплоскостью  $P_q$  точки  $q$  относительно сферы  $S$ .

Доказательство. Композиция (13-18) оставляет на месте каждую точку фигуры  $\Phi = \pi_p(P_q \cap S)$  и действует на точки экваториальной гиперплоскости  $E_p$  как композиция инверсий

$$\sigma_{r\sqrt{2},p} \sigma_{t,q} \sigma_{r\sqrt{2},p}^{-1} = \sigma_\Psi,$$

которая по сл. 13.2 на стр. 170 представляет собою отражение в фигуре  $\Psi = \sigma_{r\sqrt{2},p}(Q)$ , где  $Q = S(t, q)$  — сфера с центром  $q$  и квадратом радиуса  $t^2 = s_{r,c}(q)$ , как на рис. 13♦18 выше. Фигура  $\Psi$  является сферой, если  $p \in P_q$ , или гиперплоскостью, если  $p \notin P_q$ , и  $\Psi \cap E_p = \Phi$ . Поскольку инверсия  $\sigma_\Psi$  переводит гиперплоскость  $E_p$  в себя, сфера или гиперплоскость  $\Psi$  автоматически перпендикулярна гиперплоскости  $E_p$ , и отражение  $\sigma_\Psi$  действует на  $E_p$  как отражение  $\sigma_\Phi$ .  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 13.11. Убедитесь напрямую, что инверсия  $\sigma_{r\sqrt{2},p}$  переводит сферу  $Q$  в перпендикулярную гиперплоскости  $E_p$  гиперплоскость, если  $p \in P_q$ , или в сферу с центром на гиперплоскости  $E_p$ , если  $p \notin P_q$ .

**13.4. Группы Мёбиуса.** Вложим евклидово пространство  $U = \mathbb{R}^{n-1}$  в евклидово пространство  $V = \mathbb{R}^n$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  в качестве гиперплоскости  $x_n = 0$  и обозначим через  $S = S(1, 0) \subset \mathbb{R}^n$  единичную сферу с центром в нуле. Рассмотрим пространство  $V = \mathbb{R}^n$  как аффинную карту  $x_0 = 0$  в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и обозначим через

$$s(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (13-19)$$

однородную квадратичную форму сигнатуры  $(n, 1)$  на пространстве  $W = \mathbb{R}^{n+1}$ , задающую проективное замыкание  $\bar{S} = V(s) \subset \mathbb{P}_n$  сферы  $S$ , которое совпадает с  $S$ , так как у сферы нет вещественных точек на бесконечности. Инволюция  $\sigma_q : S \rightarrow S$  действует на проективной квадрике  $S$  как отражение гиперплоскости  $q_S^\perp \subset W$ , ортогональной относительно формы  $s$  анизотропному вектору  $q$  с положительным скалярным квадратом  $s(q) > 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.12. Убедитесь, что такие отражения порождают группу  $O(n, 1) \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$  линейных преобразований  $W \rightarrow W$ , сохраняющих квадратичную форму (13-19).

Поскольку сфера  $S$  содержит  $n + 2$  точки, никакие  $n + 1$  из которых не лежат в одной гиперплоскости, каждый линейный проективный автоморфизм пространства  $\mathbb{P}_n$  однозначно задаётся своим действием на сферу. Мы заключаем, что порождённая отражениями  $\sigma_q$  группа преобразований проективной квадрики  $S$  изоморфна проективизации  $PO(n, 1)$  ортогональной группы квадратичной формы (13-19). Эта группа называется *сферической мёбиусовой группой*  $(n-1)$ -мерной сферы и обозначается  $M(S^{n-1})$ .

Согласно предл. 13.4, сферическая мёбиусова группа  $M(S^{n-1})$  изоморфна группе преобразований пополненного евклидова пространства  $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ , порождённой отражениями в сферах и гиперплоскостях. Эта группа называется *несобственной мёбиусовой группой* евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$  и обозначается  $M(\mathbb{R}^{n-1})$  или просто  $M_{n-1}$ . Её подгруппа  $SM_{n-1} \subset M_{n-1}$ , состоящая из всех преобразований, сохраняющих ориентацию пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ , называется *собственной мёбиусовой группой* или просто *группой Мёбиуса* пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13.13. Убедитесь, что композиция  $\sigma_{r_2,c} \circ \sigma_{r_1,c}$  отражений в двух концентрических сферах является гомотетией с центром  $c$  и коэффициентом  $r_2^2 / r_1^2$ .

Так как параллельные переносы и повороты являются композициями отражений в гиперплоскостях, мы заключаем, что мёбиусова группа  $M_n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  содержит все движения и подобия.

## §14. Эллиптическая геометрия

**14.1. Эллиптическое пространство.** Рассмотрим векторное пространство  $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  с евклидовым скалярным произведением  $(u, w)$ . Его проективизация  $\mathbb{E}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V)$  называется *эллиптическим пространством*. Пространство  $V$  можно воспринимать как множество вещественных векторов комплексного векторного пространства  $V_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus iV \simeq \mathbb{C}^{n+1}$  с симметричной комплексно билинейной формой  $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , продолжающей евклидово скалярное произведение  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  по правилу  $(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1, u_2) - (w_1, w_2) + i((u_1, w_2) + (w_1, u_2)) \in \mathbb{C}$ . Его проективизацию обозначим через  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ . Вещественное проективное пространство  $\mathbb{E}_n$  вложено в  $\mathbb{P}_n$  как множество точек, инвариантных относительно комплексного сопряжения  $p \mapsto \bar{p}$ . Изотропные векторы скалярного произведения образуют в комплексном пространстве  $\mathbb{P}_n$  гладкую проективную квадрику

$$G_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \mid (p, p) = 0\}, \quad (14-1)$$

которая называется *абсолютом* и не имеет вещественных точек.

**14.1.1. Эллиптическое расстояние.** Вещественные проективные прямые  $\ell = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{E}_n$  называются *геодезическими*. Каждая геодезическая пересекает абсолютом (14-1) по двум невещественным комплексно сопряжённым точкам. Если обозначить их через  $a_1, a_2$ , то скалярное произведение векторов  $u, w \in U$ , имеющих столбцы координат  $x, y \in \mathbb{C}^2$  в каком-либо базисе двумерного пространства  $U$  запишется как<sup>1</sup>

$$(u, w) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где  $c \in \mathbb{C}$  — некая константа. Для любых двух вещественных точек  $p_1, p_2 \in \ell$  отношение

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \frac{(\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2) + \det(p_2, a_1) \det(p_1, a_2))^2}{\det(p_1, a_1) \det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1) \det(p_2, a_2)} = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2] + 2 + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}) = \\ &= \left( \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} \ln [p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (14-2)$$

не меняется при замене векторов, представляющих точки  $p_1, p_2$  на пропорциональные, а также при умножении скалярного произведения в  $V$  на любую ненулевую константу. Кроме того, число  $\vartheta$  в самой нижней строке формулы (15-3) чисто мнимо и имеет вид  $\vartheta = it$ , где  $t \in [0, \pi/2]$ . В самом деле, двойное отношение  $[p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}$  сопряжено своему обратному:

$$\overline{[p_1, p_2, a_1, a_2]} = [p_1, p_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = [p_1, p_2, a_2, a_1] = [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1},$$

и, стало быть, лежит на единичной окружности  $|z| = 1$  в  $\mathbb{C}$ . Тем самым, либо само это двойное отношение, либо обратное к нему имеет вид  $e^{i\varphi}$ , где  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и является квадратом числа  $e^{it}$ , где  $t = \varphi/2$ . Таким образом, квадрат в последней строке формулы (15-3) является квадратом

<sup>1</sup>Ср. с упр. 6.5 на стр. 70.

косинуса вещественного числа  $t = \frac{1}{2} |\text{Arg}[p_1, p_2, a_1, a_2]| \in [0, \pi / 2]$ . Это число называется *эллиптическим расстоянием* между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{E}_n$  и обозначается  $|p_1, p_2|$ . Его можно вычислять по любой из формул

$$\begin{aligned} \cos |p_1, p_2| &= \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}}, \\ |p_1, p_2| &= \left| \frac{\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]}{2i} \right| = \frac{|\text{Arg}[p_1, p_2, a_1, a_2]|}{2}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами  $v_1, v_2 \in V$  единичной евклидовой длины, то первая из этих формул упрощается до

$$\cos |p_1, p_2| = |(v_1, v_2)|.$$

На геометрическом языке, эллиптическое расстояние  $|p_1, p_2|$  между точками проективной прямой  $\ell = \mathbb{P}(U)$  равно длине кратчайшей из дуг, отсекаемых прямыми  $p_1, p_2 \subset U$  на единичной окружности  $S^1 = \{u \in U \mid (u, u) = 1\}$  в  $U$ , см. рис. 14◊1.

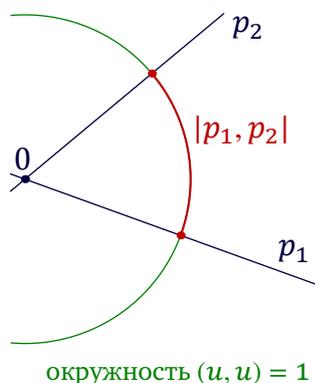


Рис. 14◊1. Эллиптическое расстояние.

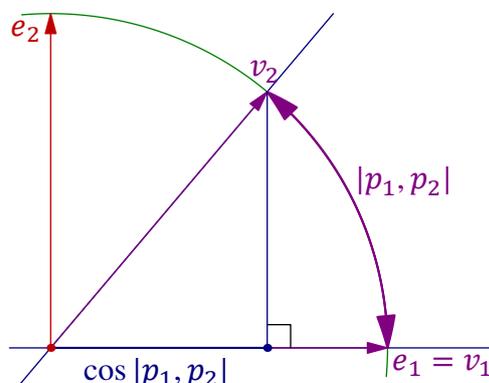


Рис. 14◊2.  $\cos |p_1, p_2| = |(v_1, v_2)|$ .

В самом деле, меняя, если надо, номера точек  $p_1, p_2$  и направления представляющих эти точки единичных векторов  $v_1, v_2$ , мы можем выбрать в  $U$  ортонормальный базис  $e_1, e_2$  так, чтобы  $v_1 = e_1$ , а вектор  $v_2$  лежал в первом координатном квадранте, как на рис. 14◊2, где косинус дуги  $[v_1, v_2]$  как раз и равен  $(v_1, v_2)$ .

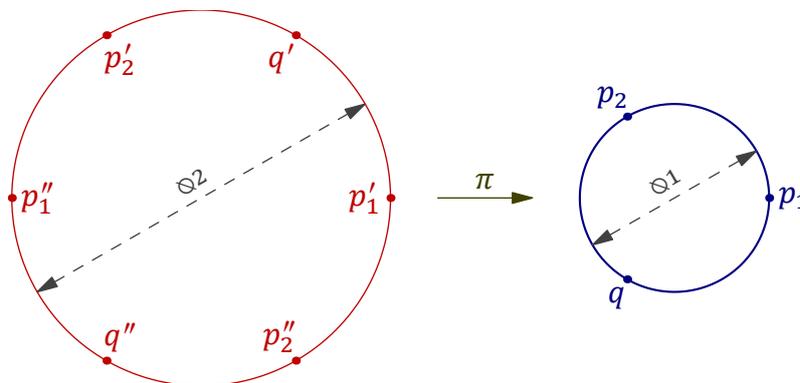


Рис. 14◊3. Факторизация единичной окружности до эллиптической геодезической.

Окружность  $S^1$  является метрическим пространством с расстоянием между точками, равным длине кратчайшей из двух соединяющих эти точки дуг. Проективная прямая  $(p_1 p_2) \subset \mathbb{E}_2$  является образом окружности  $S^1$  при отображении факторизации  $\pi : S^1 \rightarrow (p_1 p_2)$ , склеивающем противоположные векторы в одну точку, как на рис. 14◊3. Это отображение является локальной изометрией в том смысле, что любая дуга длины не более  $\pi/2$  на  $S^1$  отображается на отрезок прямой  $(p_1 p_2)$  так, что расстояние между точками на  $S^1$  равно эллиптическому расстоянию между их образами на  $(p_1 p_2)$ . Ограничение  $\pi$  на любую полуокружность в  $S^1$  сюръективно отображает эту полуокружность на геодезическую  $(p_1 p_2)$ . Покрывая полуокружность двумя дугами длины  $\pi/2$ , мы заключаем, что каждая геодезическая на эллиптической плоскости изометрически гомеоморфна окружности длины  $\pi$ , и эллиптическое расстояние между точками  $p_1, p_2$  на окружности  $(p_1 p_2)$  равно длине кратчайшей из двух дуг, на которые окружность  $(p_1 p_2)$  разбивается точками  $p_1, p_2$ . Сама эта кратчайшая дуга характеризуется как ГМТ  $p \in (p_1 p_2)$ , удовлетворяющих соотношению  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ , см. рис. 14◊4. Она обозначается  $[p_1, p_2]$  и называется геодезическим отрезком с концами  $p_1, p_2$ . Обратите внимание, что при  $|p_1, p_2| < \pi/2$  геодезический отрезок единствен, а при  $|p_1, p_2| = \pi/2$  имеются два различных геодезических отрезка  $[p_1, p_2]$ , см. рис. 14◊5.

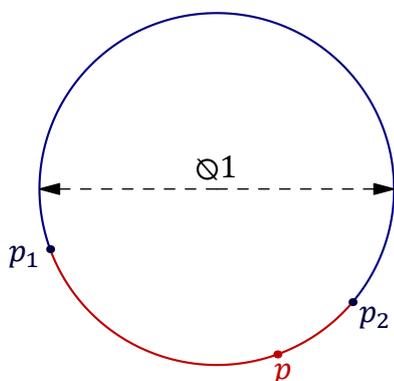


Рис. 14◊4. ГМТ  $p$ :  
 $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

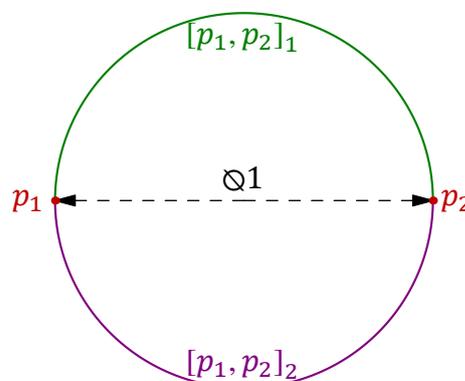


Рис. 14◊5. Два геодезических отрезка  $[p_1, p_2]$  при  $|p_1, p_2| = \pi/2$ .

#### ТЕОРЕМА 14.1

Геодезическое расстояние (14-3) задаёт на эллиптическом пространстве  $\mathbb{E}_n$  метрику. Геодезические отрезки  $[p_1, p_2] \subset \mathbb{E}_n$  суть ГМТ  $p \in \mathbb{E}_n$ , для которых  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

Доказательство. Положительность и симметричность расстояния (14-3) очевидны. Неравенство треугольника вытекает из того, что определитель Грама, составленный из евклидовых скалярных произведений ненулевых векторов  $p_1, p_2, p_3$  единичной длины неотрицателен и обращается в нуль если и только если эти векторы линейно зависимы, т. е. лежат на одной геодезической. В самом деле, полагая  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ , мы получаем неравенство

$$\det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0. \quad (14-4)$$

В силу монотонного убывания функции  $\cos x$  на  $[0, \pi]$ , неравенство треугольника

$$|p_1, p_2| + |p_2, p_3| \geq |p_1, p_3| \quad (14-5)$$

равносильно неравенству  $\cos(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \leq \cos |p_1, p_3|$ , которое переписывается как

$$\cos |p_1, p_2| \cdot \cos |p_2, p_3| - \cos |p_1, p_3| \leq \sin |p_1, p_2| \cdot \sin |p_2, p_3|.$$

Поскольку правая часть неотрицательна, при отрицательной левой части неравенство треугольника выполняется строго. Если левая часть неотрицательна, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Вспомня, что  $\cos^2 |p_i, p_j| = (p_i, p_j)^2 = g_{ij}^2$ , получаем

$$g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12} g_{23} g_{13} \leq (1 - g_{12}^2)(1 - g_{13}^2),$$

что превращается в (14-4) после раскрытия скобок и переноса левой части направо. Равенство в (14-5) влечёт равенство в (14-4), а значит, линейную зависимость точек  $p_i$ . Это доказывает неравенство треугольника, а также то, что равенство в нём возможно только при  $p_2 \in (p_1 p_3)$ . С другой стороны, мы уже видели выше, что ГМТ  $p \in (p_1 p_2)$ , удовлетворяющих соотношению  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ , представляет собою геодезический отрезок  $[p_1, p_2]$ , см. рис. 14◊4.  $\square$

**14.1.2. Касательные векторы и углы.** Каждая точка  $p \in \mathbb{E}_n = \mathbb{P}(V)$  обладает канонической аффинной окрестностью. А именно, с каждым ненулевым вектором  $w \in p$  связан ковектор

$$w^* : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto (v, w)/(w, w), \quad (14-6)$$

сопоставляющий вектору  $v \in V$  координату его ортогональной проекции на одномерное анизотропное подпространство  $p \subset V$  в базисе  $w$  этого подпространства. Этот ковектор задаёт на  $\mathbb{P}(V)$  аффинную карту<sup>1</sup>  $U_{w^*} = \{v \in V \mid (v, w) = (w, w)\} = w + p^\perp$ , которая содержит точку  $p$  и представляет собою проходящее через конец вектора  $w$  аффинное пространство в  $\mathbb{A}(V)$  с направляющим векторным пространством  $\text{Ann } w^* = p^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0\}$ .

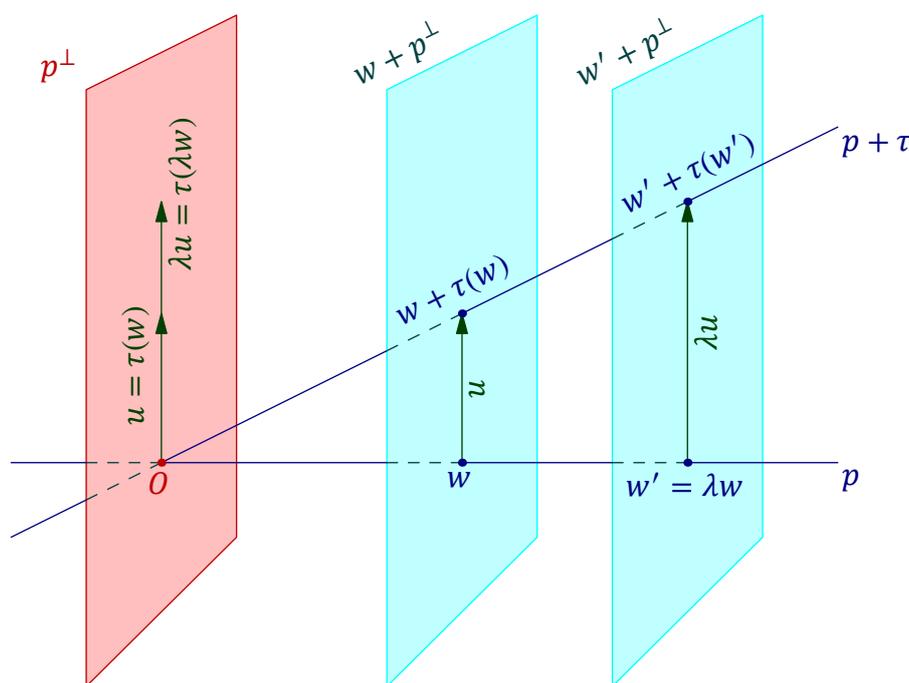


Рис. 14◊6. Сдвиг точки  $p \in \mathbb{P}(V)$  на касательный вектор  $\tau : p \rightarrow p^\perp$ .

<sup>1</sup>См. п.° 4.1 на стр. 37.

Все карты  $U_{w^*}$  с различными  $w \in p$  имеют одно и то же направляющее векторное пространство и покрывают одно и то же множество точек в  $\mathbb{P}_n$ . При сдвиге точки  $p$  в пределах этого множества, ко всем векторам  $w \in p$  добавляются коллинеарные друг другу векторы  $\tau(w) \in p^\perp$ , линейно зависящие от  $w \in p$  в том смысле, что  $\tau(\lambda w) = \lambda \tau(w)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , см. рис. 14-6. Таким образом, одномерные подпространства  $p' \subset V$ , которые покрываются семейством параллельных друг другу карт  $U_{w^*}$ , представляют собою графики линейных отображений

$$\tau : p \rightarrow p^\perp \quad (14-7)$$

и образуют аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $\text{Hom}(p, p^\perp)$  всех линейных отображений (14-7). Это векторное пространство обозначается  $T_p \mathbb{E}_n$  и называется *касательным векторным пространством* к эллиптическому пространству  $\mathbb{E}_n$  в точке  $p$ . Сами линейные отображения (14-7) называются *касательными векторами* к  $\mathbb{E}_n$  в точке  $p$ .

Скалярное произведение на  $V$  задаёт на каждом касательном векторном пространстве  $T_p \mathbb{E}_n$  евклидово скалярное произведение по формуле

$$(\tau_1, \tau_2)_p = (\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w), \quad (14-8)$$

где  $\tau_1, \tau_2 : p \rightarrow p^\perp$  суть касательные векторы, а  $w \in p$  — произвольный ненулевой вектор.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что правая часть в (14-8) не зависит от выбора  $w \in p$ .

Если выбрать вектор  $w \in p$  так, чтобы  $(w, w) = 1$ , то касательные векторы  $\tau_1, \tau_2$  будут однозначно задаваться своими значениями  $u_i = \tau_i(w) \in w^\perp$ , а их скалярное произведение будет равно евклидову скалярному произведению  $(u_1, u_2)$ . Длина  $|\tau|$  касательного вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$  и угол  $\sphericalangle(\tau_1, \tau_2)$  между касательными векторами  $\tau_1, \tau_2 \in T_p \mathbb{E}_n$  определяются по стандартным формулам

$$|\tau| = \sqrt{(\tau, \tau)} \quad \text{и} \quad \cos \sphericalangle(\tau_1, \tau_2) = \frac{(\tau_1, \tau_2)}{|\tau_1| \cdot |\tau_2|} \quad (14-9)$$

Через любую точку  $p \in \mathbb{E}_n$  в направлении любого касательного вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$  выходит геодезическая  $\ell_\tau$  — проективизация двумерного векторного подпространства в  $V$ , порождённого одномерными подпространствами  $p$  и  $\tau(p) \subset p^\perp$ . Поскольку каждая проходящая через  $p$  прямая пересекает  $\mathbb{P}(p^\perp)$  в некоторой точке, отвечающей одномерному подпространству  $q \subset p^\perp$ , и существует единственный с точностью до пропорциональности изоморфизм одномерных подпространств  $\tau : p \simeq q$ , каждая проходящая через  $p$  геодезическая имеет вид  $\ell_\tau$  для некоторого вектора  $\tau \in T_p \mathbb{E}_n$ , который определяется геодезической однозначно с точностью до пропорциональности и называется *вектором скорости* геодезической. Угол между геодезическими определяется как евклидов угол между их векторами скорости, вычисленный по формуле (14-9).

Как и в евклидовом пространстве, через любые две различные точки эллиптического пространства проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по геодезическому отрезку этой прямой. Однако геометрия взаимного расположения прямых в эллиптическом пространстве во многом отличается от евклидовой.

**14.1.3. Неевклидовы явления в эллиптической геометрии.** В отличие от евклидова пространства эллиптическое пространство компактно. На эллиптической плоскости нет параллельных прямых: любые две прямые пересекаются ровно в одной точке. При этом никакая прямая не разбивает эллиптическую плоскость на две компоненты: любые две точки не лежащие на прямой  $\ell$  можно соединить не пересекающим прямую  $\ell$  отрезком геодезической. Оси любого

ортогонального базиса в  $\mathbb{R}^3$  образуют на эллиптической плоскости  $\mathbb{E}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  правильный треугольник с тремя прямыми углами, как на рис. 14◊7.

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что прямые, соединяющие противоположные вершины икосаэдра с центром в нуле евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , образуют на эллиптической плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  конфигурацию из шести попарно равноудалённых друг от друга точек.

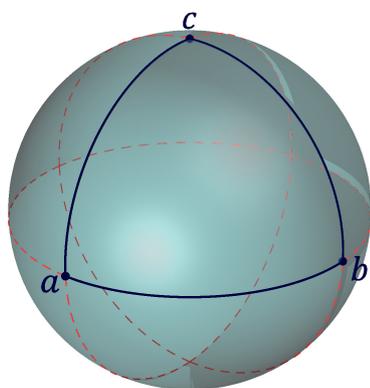


Рис. 14◊7. Правильный прямоугольный треугольник.

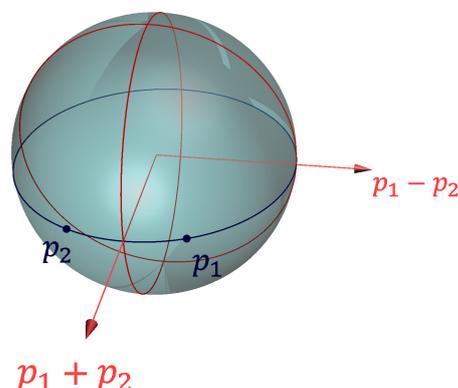


Рис. 14◊8. Медиаторы точек  $p_1$  и  $p_2$ .

#### ПРИМЕР 14.1 (МЕДИАТОРЫ)

Равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами единичной длины, выражается равенством  $|(p_1, q_1)| = |(p_2, q_2)|$ , которое выполняется в двух случаях: когда  $(p_1 - p_2, q) = 0$  или когда  $(p_1 + p_2, q) = 0$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , является объединением двух гиперплоскостей, которые называются медиаторами точек  $p_1, p_2$  и ортогональны векторам  $p_1 - p_2$  и  $p_1 + p_2$  соответственно, см. рис. 14◊8. Обратите внимание, что если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами одинаковой длины, то точка, представленная вектором  $p_1 + p_2$ , лежит на одном медиаторе, а вектором  $p_1 - p_2$  — на другом, и эти две точки различны.

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Покажите, что медиаторные гиперплоскости ортогональны друг другу и пересекаются по ГМТ  $q \in \mathbb{P}_n$  с  $|p_1, q| = |p_2, q| = \pi/2$ .

**14.2. Изометрии эллиптического пространства.** Для любого вектора  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$  отражение<sup>1</sup>  $\sigma_e: V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(v, e)e$ , в гиперплоскости  $e^\perp$  задаёт инволютивный линейный проективный автоморфизм, который мы по-прежнему будем называть *отражением в гиперплоскости*  $\mathbb{P}(e^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$  и обозначать  $\sigma_e: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ . Он оставляет на месте каждую точку гиперплоскости  $\mathbb{P}(e^\perp)$  и её полюс  $e$  относительно абсолюта. Поскольку отражение сохраняет скалярное произведение на  $V$ , оно является изометрическим преобразованием эллиптического пространства. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$  существуют ровно два отражения, переставляющие эти точки друг с другом, и эти отражения происходят в медиаторах точек  $p_1, p_2$ . В самом деле, если точка  $q$  принадлежит зеркалу такого отражения, то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , и значит, точка  $q$  принадлежит медиатору. С другой стороны, отражения  $\sigma_{(p_1 - p_2)^\perp}: V \rightarrow V$  и  $\sigma_{(p_1 + p_2)^\perp}: V \rightarrow V$  переводят вектор  $p_1 \in V$  в векторы  $p_2$  и  $-p_2$  соответственно.

<sup>1</sup>См. п.° 2.2 на стр. 18.

## ТЕОРЕМА 14.2

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$  эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  является линейным проективным автоморфизмом, индуцированным некоторым ортогональным линейным преобразованием  $G : V \xrightarrow{\simeq} V$ , которое определяется по  $g$  однозначно с точностью до знака<sup>1</sup>. Иначе говоря, группа изометрических преобразований  $n$ -мерного эллиптического пространства изоморфна *проективной ортогональной группе*

$$\mathrm{PO}_{n+1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PO}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{O}(V) / \{\pm \mathrm{Id}_V\}.$$

**Доказательство.** Очевидно, что все преобразования из группы  $\mathrm{PO}(V)$  являются изометрическими, и что группа  $\mathrm{PO}(V)$  транзитивно действует на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Зафиксируем какой-либо вектор  $e \in V$  с  $(e, e) = 1$ . Беря композицию  $g$  с ортогональным преобразованием, переводящим  $g(e)$  в  $e$ , мы без ограничения общности можем и будем считать, что  $g(e) = e$ . Рассмотрим на  $\mathbb{P}_n$  аффинную карту  $U_e = \{v \in V \mid (v, e) = 1\}$ . Как аффинная гиперплоскость в  $\mathbb{A}(V)$  она параллельна векторной гиперплоскости  $e^\perp \subset V$  и проходит через конец вектора  $e$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_e = \mathbb{P}(e^\perp)$  представляет собою ГМТ  $p \in \mathbb{P}_n$ , находящихся на расстоянии  $\pi/2$  от точки  $p$ . Поэтому преобразование  $g$  переводит и карту  $U$  и её бесконечно удалённую гиперплоскость  $e^\perp$  в себя. Поскольку преобразование  $g$  сохраняет расстояние между точками, оно, в силу [теор. 14.1](#), переводит отрезки геодезических в отрезки геодезических, а значит, проективные прямые — в проективные прямые. Поэтому ограничение  $g|_{U_e} : U_e \rightarrow U_e$  является аффинным преобразованием<sup>2</sup>. В доказательстве [предл. 9.2](#) на стр. 108 мы видели, что такое аффинное преобразование является ограничением на карту  $U_e$  единственного линейного проективного автоморфизма  $\bar{h} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$ , причём задающий его линейный оператор  $h : V \rightarrow V$  однозначно с точностью до пропорциональности определяется преобразованием  $g$ . Поскольку оба преобразования  $g, \bar{h} : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$  непрерывны и совпадают на открытом всюду плотном подмножестве  $U_e$  компактного метрического пространства  $\mathbb{P}_n$ , они совпадают вообще всюду на  $\mathbb{P}_n$ , т. е.  $g = \bar{h}$ .

**Упражнение 14.4.** Докажите это.

Умножим оператор  $h$  на такую ненулевую константу, чтобы  $h(e) = e$ , и дополним вектор  $e$  до ортонормального базиса  $e, e_1, e_2, \dots, e_n$  пространства  $V$ . Поскольку оператор  $h$  сохраняет углы между одномерными подпространствами, векторы  $h(e_i)$  составляют вместе с вектором  $e$  ортогональный базис пространства  $V$ .

**Упражнение 14.5.** Убедитесь, что этот ортогональный базис на самом деле ортонормален, т. е. для каждого  $i$  выполняется равенство  $(h(e_i), h(e_i)) = 1$ .

Таким образом, преобразование  $h$  ортогонально. Остаётся заметить, что два ортогональных линейных преобразования евклидова векторного пространства пропорциональны тогда и только тогда, когда коэффициент пропорциональности между ними равен  $\pm 1$ .  $\square$

**Упражнение 14.6.** Убедитесь в справедливости последнего утверждения.

## СЛЕДСТВИЕ 14.1

Всякое изометрическое преобразование эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  является композицией не более, чем  $(n+1)$  отражений в гиперплоскостях.

<sup>1</sup>Т. е. с точностью до композиции с центральной симметрией  $-\mathrm{Id}_V : v \mapsto -v$ .

<sup>2</sup>Всякое преобразование вещественного аффинного пространства размерности  $\geq 2$ , которое переводит в прямые, является аффинным преобразованием, см. раздел 2.5 на стр. 29 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_02.pdf).

Доказательство. Это вытекает из теор. 2.2 на стр. 18. □

**Предостережение 14.1.** В отличие от евклидовой геометрии, изометрия эллиптического пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  не определяется однозначно своим действием на произвольные  $(n + 1)$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Например, если эти точки отвечают ортонормальному базису  $e_0, e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ , то имеется ровно  $2^n$  различных преобразований из группы  $PO_{n+1}(\mathbb{R})$ , оставляющих каждую из точек на месте. Все они действуют на базис по правилу  $e_i \mapsto \pm e_i$  с точностью до общего для всех  $i$  знака. При  $n = 2$  эти четыре преобразования суть Id и три отражения  $\sigma_i = \sigma_{e_i}$  в сторонах правильного прямоугольного треугольника  $e_0e_1e_2$ , см. рис. 14◊9. Они транзитивно действуют на четырёх связных компонентах дополнения  $\mathbb{P}_2 \setminus \bigcup_{i \neq j} (e_i e_j)$  к трём координатным прямым  $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_2$  и оставляют на месте каждую из точек  $e_i \in \mathbb{P}_2$ .

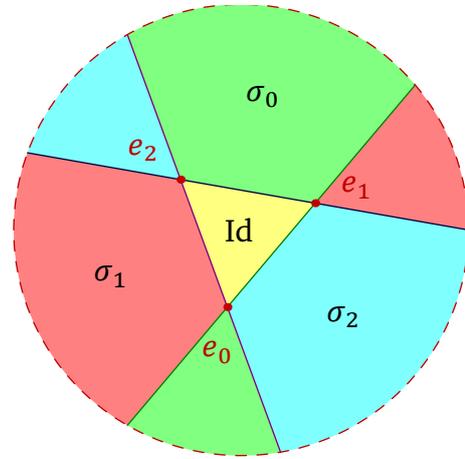


Рис. 14◊9. Образы правильного прямоугольного  $\Delta e_0e_1e_2$  при отражениях в его сторонах.

**Определение 14.1** (дифференциал эллиптической изометрии)

Ортогональный линейный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт в каждой точке  $p \in \mathbb{P}(V)$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{P}(V) \simeq T_{g(p)} \mathbb{P}(V), \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-10}$$

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-10) называется *дифференциалом* изометрического преобразования  $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

**14.3. Треугольники.** Фигура, образованная тремя геодезическими отрезками<sup>2</sup>

$$\Delta abc \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$$

пересекающихся в неколлинеарных точках  $a, b, c$  геодезических  $(ab), (bc), (ca)$  эллиптического пространства, называется *эллиптическим треугольником*. Всякий эллиптический треугольник лежит в эллиптической плоскости, порождённой его вершинами. Имеется два геометрически разных типа треугольников, представленные на рис. 14◊10 и рис. 14◊10 ниже. Образы лежащих на единичной сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  сферических треугольников со сторонами не длиннее  $\pi/2$  при отображении факторизации  $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ , отождествляющем противоположные точки сферы, называются эллиптическими треугольниками *первого рода*. Граница такого треугольника разбивает эллиптическую плоскость на две связные компоненты, и её можно обойти по кругу

<sup>1</sup> Отражение  $\sigma_i : \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  меняет знак у вектора  $e_i \in \mathbb{R}^3$  и тождественно действует на остальные два базисных вектора.

<sup>2</sup> См. ?? на стр. ??.

так, что треугольник всё время находится по левую руку. Кроме того её можно непрерывно стянуть внутри  $\mathbb{E}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Постройте такое непрерывное отображение единичного квадрата в  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad (x, t) \mapsto h(x, t) \in \mathbb{P}_2,$$

что кривая  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 0)$ , является параметризацией границы треугольника  $abc$  первого рода, а кривая  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 1)$ , отображает весь отрезок  $[0, 1]$  в точку  $(a + b + c)/3 \in \mathbb{P}_2$ .

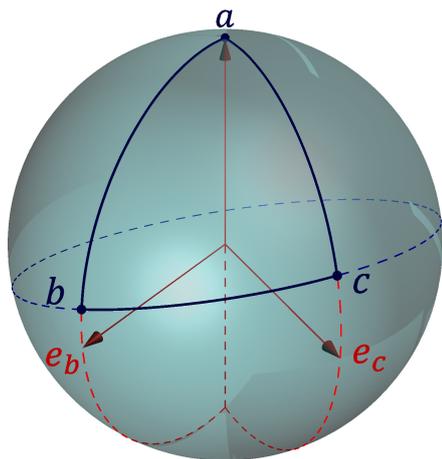


Рис. 14◊10. Треугольник первого рода.

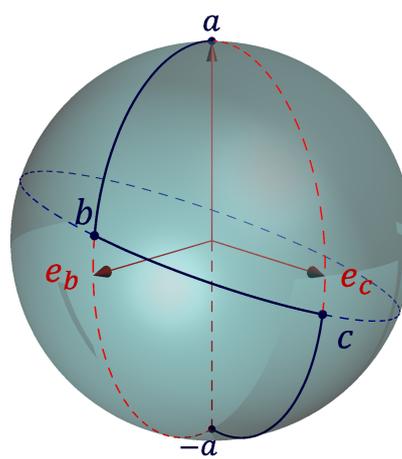


Рис. 14◊11. Треугольник второго рода.

Вершины треугольника первого рода представляются такими векторами  $a, b, c$  единичной длины, что  $b = \cos |a, b| \cdot a + \sin |a, b| \cdot e_b$  и  $c = \cos |a, c| \cdot a + \sin |a, c| \cdot e_c$ , где векторы  $e_b$  и  $e_c$  дополняют вектор  $a$  до ортонормальных базисов в плоскостях  $ab$  и  $ac$  соответственно, см. рис. 14◊10. Угол  $\alpha(bac)$  при вершине  $a$  в сферическом  $\Delta abc$  равен евклидову углу между плоскостями  $ab$  и  $ac$  в  $\mathbb{R}^3$ . Он имеет  $\cos \alpha(bac) = (e_b, e_c)$ . Вычисляя скалярное произведение  $(b, c) = \cos |b, c|$ , получаем для эллиптического  $\Delta abc$  первого рода *сферическую теорему косинусов*<sup>1</sup>

$$\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \alpha(bac). \quad (14-11)$$

Эллиптические треугольники, не являющиеся треугольниками первого рода, называются *треугольниками второго рода*. Граница треугольника второго рода поднимается на единичную сферу  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  в *незамкнутую* ломаную, соединяющую диаметрально противоположные точки сферы. Дополнение до границы треугольника второго рода связно: любые две не лежащие на границе точки можно соединить нигде не пересекающей границу треугольника ломаной, составленной из отрезков геодезических. Поскольку на  $\mathbb{P}_2$  имеются геодезические, трансверсально пересекающие границу треугольника второго рода ровно по одной точке, и такой характер пересечения устойчив к малым шевелениям как геодезической, так и треугольника, границу треугольника второго рода<sup>2</sup> нельзя непрерывно продеформировать внутри  $\mathbb{E}_2$  в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Докажите для треугольников второго рода формулу

$$-\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \alpha(bac), \quad (14-12)$$

<sup>1</sup>Также известную как *основная формула сферической тригонометрии*.

<sup>2</sup>Также как и любую геодезическую.

левая часть которой отличается от левой части (14-11) знаком.

Таким образом, величина  $\cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac)$  положительна для треугольников первого рода и отрицательна для треугольников второго рода.

**14.4. Сферическая форма объёма.** Если зафиксировать в пространстве  $V$  ортонормальный базис  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ , то с каждым ненулевым вектором  $w \in V$  можно связать кососимметричную полилинейную форму  $\omega_w : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  от  $n = \dim V - 1$  аргументов, значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (14-13)$$

и равно определителю  $\det C$  матрицы координат<sup>1</sup> векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$  в базисе  $e$ . При выборе другого ортонормального базиса в  $V$  форма  $\omega_w$  не изменится, если новый базис имеет ту же ориентацию, что и базис  $e$ , и умножится на  $-1$ , если ориентация у нового базиса противоположна. Квадрат значения формы  $\omega_w$  на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\omega^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det^2 C = \det(C^t E C) = \det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n}$$

равен определителю Грама векторов  $w, v_1, v_2, \dots, v_n$ . Если векторы  $v_1, v_2, \dots, v_n \in w^\perp$ , то

$$\det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n} = (w, w) \cdot \det G_{v_1, v_2, \dots, v_n}.$$

Таким образом, абсолютная величина значения формы  $\omega_w$  на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна  $n$ -мерному евклидову объёму этого параллелепипеда, умноженному на  $|w|$ , и не зависит от выбора ортонормального базиса в  $V$ . Когда вектор  $w$  лежит на единичной сфере

$$S^n = \{v \in V \mid (v, v) = 1\} \subset \mathbb{A}(V),$$

векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством аффинной касательной гиперплоскости  $T_w S^n = w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$  к сфере  $S^n$  в точке  $w \in S^n$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём.

В дифференциальном исчислении гладко зависящую от точки  $x \in \mathbb{A}(V)$  кососимметричную полилинейную форму  $\alpha(x) : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  от  $n$  аргументов принято называть *дифференциальной  $n$ -формой* и записывать в виде

$$\alpha(x) = \sum_{v=0}^n a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}(x) \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-14)$$

где крышка означает пропуск того, что под ней стоит, а каждый коэффициент  $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}$  представляет собою гладкую функцию  $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , значение которой в точке  $x \in \mathbb{A}(V)$  по определению равно значению кососимметричной формы  $\alpha(x)$  на наборе  $e_0, \dots, e_{v-1}, e_{v+1}, \dots, e_n$  базисных векторов пространства  $V$ . Форма (14-13)

$$\omega(x) : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-15)$$

записывается в виде (14-14) следующим образом:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>Т. е. такой матрицы  $C$ , что  $(w, v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ .

**14.4.1. Объёмы фигур.** Пусть некоторая область  $\Phi \subset S^n$  единичной сферы  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  является образом области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  при биективном гладком отображении  $f: \Omega \rightarrow \Phi$ . Тогда в каждой точке  $z \in \Omega$  дифференциал  $df$  отображения  $f$  линейно отображает векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ , воспринимаемое как касательное пространство к области  $\Omega$  в точке  $z$ , в направляющее векторное пространство  $f(z)^\perp \subset V$  аффинной касательной гиперплоскости к сфере  $S^n$  в точке  $f(z)$ . Дифференциал  $df$  переводит параллелепипеды  $P \subset \mathbb{R}^n$  в параллелепипеды  $df(P) \subset f(z)^\perp$  так, что отношение евклидова объёма параллелепипеда  $df(P)$  в касательном пространстве к  $S^n$  в точке  $f(z)$  к евклидову объёму параллелепипеда  $P$  в  $\mathbb{R}^n$  одинаково для всех  $P$  и равно  $\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|$ , где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, функция  $\varrho(z)$  задаёт «коэффициент растяжения» евклидова объёма при линейном отображении касательных пространств  $df: T_z\Omega \rightarrow T_{f(z)}\Phi$  в каждой точке  $z \in \Omega$ . Интеграл от неё по области  $\Omega$  естественно называть *объёмом сферической области*  $\Phi = f(\Omega) \subset S^n$ :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Возникающая при этом на области  $\Omega$  дифференциальная форма

$$\omega(z) : (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))$$

называется *подъёмом* имеющейся на сфере  $S^n \subset \mathbb{A}(V)$  дифференциальной формы (14-15) относительно гладкого отображения  $f: \Omega \rightarrow S^n$  и обычно обозначается  $f^*\omega$ .

**ПРИМЕР 14.2 (ПЛОЩАДЬ ПОЛУСФЕРЫ)**

Полусфера  $\Pi$ , высекаемая из единичной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  полупространством  $x_0 \geq 0$ , является образом лежащего в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(\varphi, \psi)$  квадрата  $\Omega = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leq \psi, \varphi \leq \pi/2\}$  при отображении Эйлера  $f: \Omega \rightarrow \Pi, (\varphi, \psi) \mapsto (x_0, x_1, x_2)$ , где

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \psi \cos \varphi \\ x_1 &= \cos \psi \sin \varphi \\ x_2 &= \sin \psi, \end{aligned} \quad (14-17)$$

см. рис. 14◊12. Дифференцируя эти равенства по  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем

$$\begin{aligned} dx_0 &= -\sin \psi \cos \varphi d\psi - \cos \psi \sin \varphi d\varphi & dx_1 \wedge dx_2 &= \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_1 &= -\sin \psi \sin \varphi d\psi + \cos \psi \cos \varphi d\varphi & dx_0 \wedge dx_2 &= -\cos^2 \psi \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_2 &= \cos \psi d\psi, & dx_0 \wedge dx_1 &= \cos \psi \sin \psi d\varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальную форму

$$\omega(x) = x_0 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_0 \wedge dx_2 + x_2 dx_0 \wedge dx_1,$$

после многочисленных сокращений заключаем, что её подъём со сферы  $S^2$  на евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $(\varphi, \psi)$  имеет вид  $f^*\omega(\varphi, \psi) = \cos \psi d\varphi \wedge d\psi$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 14.10.** Убедитесь в этом!

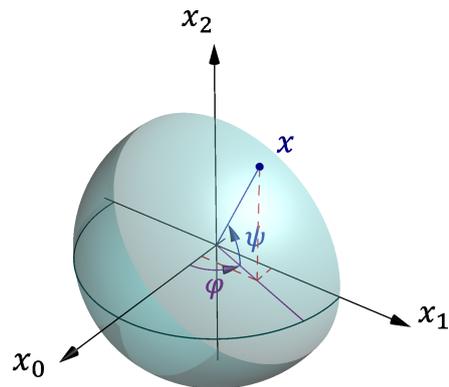


Рис. 14◊12. Эйлеровы углы.

Таким образом,  $\varrho(\varphi, \psi) = \cos \psi$  и площадь полусферы

$$S(\Pi) = \int_{\Omega} \varrho(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = 2\pi.$$

ТЕОРЕМА 14.3

Площадь сферического треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . В частности, сумма углов сферического треугольника всегда строго больше  $\pi$ .

Доказательство. Площадь сферической луночки, заключённой между двумя проходящими через центр сферы плоскостями, пропорциональна углу  $\alpha$  между этими плоскостями и относится к площади полусферы как  $\alpha : \pi$ , см. рис. 14◊13. Поэтому площадь такой лунки равна  $2\alpha$ . Сферический треугольник на рис. 14◊14 высекается из полусферы двумя луночками с углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Дополнение к этим луночкам и треугольник вместе составляют две части сферической луночки с раствором  $\gamma$ . Поэтому сумма площадей трёх сферических лунок с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  отличается от площади полусферы тем, что интересующий нас треугольник учтён в ней трижды. Поэтому площадь  $S$  этого треугольника удовлетворяет равенству  $2S + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$ .  $\square$

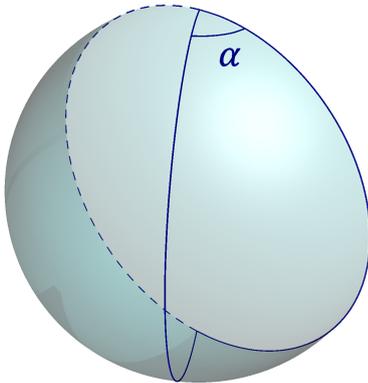


Рис. 14◊13. Площадь сферической лунки с углом  $\alpha$  равна  $2\alpha$ .

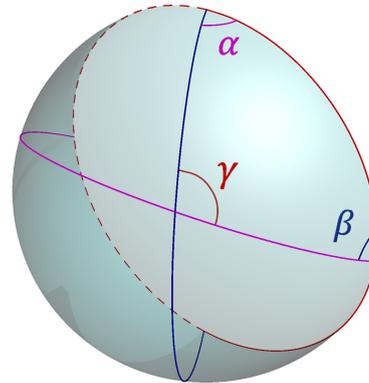


Рис. 14◊14. Лунки с углами  $\alpha$  и  $\beta$  и две части от лунки с углом  $\gamma$ .

**14.4.2. Инвариантная форма объёма на эллиптическом пространстве.** Сферическая форма объёма на касательных пространствах к единичной сфере в  $\mathbb{R}^{n+1}$  индуцирует форму объёма  $\text{Vol}_p$  на касательных пространствах  $T_p \mathbb{P}_n$  к эллиптическому пространству  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  во всех его точках  $p \in \mathbb{P}_n$  по правилу

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}. \quad (14-18)$$

Правая часть этой формулы не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и обладает тем свойством, что для любого ортогонального линейного отображения  $g : V \simeq V$  выполняется равенство  $\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , где  $dg : T_p \mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{P}(V)$  обозначает дифференциал<sup>1</sup> изометрического проективного преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 14.11. Убедитесь в этом.

<sup>1</sup>См. опр. 14.1 на стр. 182.

При  $(w, w) = 1$  и  $\tau_i(w) = u_i$  формула (14-18) упрощается до

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n)| \quad (14-19)$$

и равна абсолютной величине формы объёма (14-16) на единичной сфере.

## §15. Гиперболическая геометрия

**15.1. Пространство Лобачевского.** Снабдим вещественное векторное пространство  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  скалярным произведением Лоренца:

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n. \quad (15-1)$$

сигнатуры  $(1, n)$  и будем называть *лоренцевыми* такие ортогональные базисы пространства  $V$ , в которых скалярное произведение задаётся формулой (15-1). Изотропная проективная квадратика  $G = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid (v, v) = 0\}$  непуста и разбивает проективное пространство  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  на два непересекающихся подмножества, состоящие из анизотропных векторов с положительным и с отрицательным скалярным квадратом. Первое из них, являющееся проективизацией внутренности конуса  $G_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$ , называется *n-мерным пространством Лобачевского* или *гиперболическим пространством* и обозначается  $\mathbb{L}_n$ . Изотропная квадратика  $G$  является асимптотической квадратикой аффинного двуполостного гиперboloида

$$H^n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, v) = 1\},$$

состоящего из векторов лоренцевой длины 1. Сопоставляя каждому одномерному векторному подпространству из  $G_+$  точку его пересечения с *положительной полой*

$$H_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in V \mid (v, v) = 1 \ \& \ x_0 > 0\} \quad (15-2)$$

гиперboloида  $H^n$ , мы получаем гомеоморфизм пространства Лобачевского с  $H_+^n$ , см. рис. 15◊1.

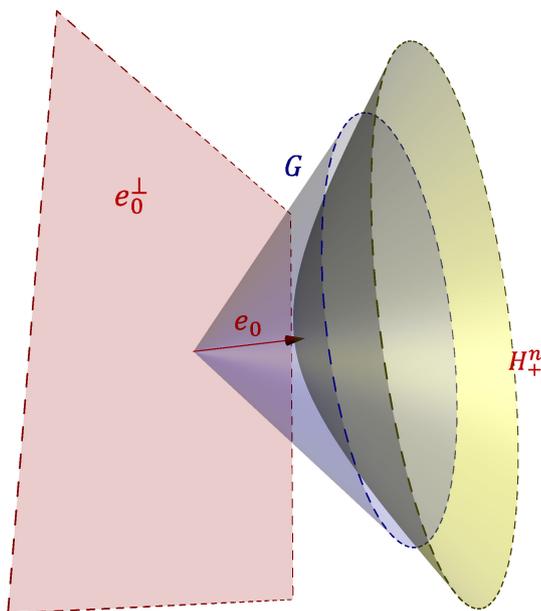


Рис. 15◊1. Вектор  $e_0$  с  $(e_0, e_0) = 1$ , абсолютная  $G = \{v \in V \mid (v, v) = 0\}$  и положительная пола  $H_+^n = H \cap x_0^+$  гиперboloида  $H = \{v \in V \mid (v, v) = 1\}$ .

Таким образом<sup>1</sup>, *n*-мерное пространство Лобачевского гомеоморфно пространству  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup>См. предл. 9.4 на стр. 115.

**15.1.1. Гиперболическое расстояние.** Пересечения вещественных проективных прямых  $\ell = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  с пространством Лобачевского  $\mathbb{L}_n$  называются *геодезическими*. Ограничение лоренцева скалярного произведения на двумерное векторное подпространство  $U \subset V$ , содержащее вектор  $p$  с положительным квадратом, имеет сигнатуру  $(1, 1)$ , поскольку подпространство  $U$  имеет одномерное пересечение с трансверсальной к  $p$  гиперплоскостью  $p^\perp$ , на которой лоренцево скалярное произведение отрицательно определено. Таким образом, каждая геодезическая  $(p_1 p_2)$  является проективизацией гиперболической плоскости и пересекает абсолют по двум различным вещественным точкам. Обозначая их через  $a_1, a_2$ , мы можем записать лоренцево скалярное произведение векторов  $u, w \in U$ , имеющих столбцы координат  $x, y \in \mathbb{R}^2$  в каком-либо базисе пространства  $U$  той же самой формулой, что и в н° 14.1.1 на стр. 175

$$(u, w) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где  $c \in \mathbb{R}$  — некая константа. Дословно та же выкладка, что и в форм. (15-3) на стр. 189, показывает, что любых двух точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  отношение

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2]^{1/2} + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1/2})^2 = \\ &= \left( \frac{e^\vartheta + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} |\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]| \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (15-3)$$

не меняется при замене векторов, представляющих точки  $p_1, p_2$  на пропорциональные и при умножении лоренцева скалярного произведения на любую ненулевую константу. Однако, в отличие от эллиптического случая, число  $\vartheta$  теперь вещественно, и квадрат в последней строке формулы (15-3) является квадратом гиперболического косинуса однозначно определённого вещественного числа  $\vartheta \in [0, \infty)$ . Это число называется *гиперболическим расстоянием* между точками  $p_1, p_2 \in \mathbb{E}_n$  и обозначается  $|p_1, p_2|$ . Его можно вычислять по любой из формул

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}}, \quad |p_1, p_2| = \frac{|\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]|}{2}. \quad (15-4)$$

Если точки  $p_1, p_2$  представлены векторами  $w_1, w_2 \in H_+^n$ , лежащими на положительной полуре (15-2), то первая из этих формул упрощается до

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = (w_1, w_2).$$

Модуль в формуле (15-4) исчезает, поскольку  $(w_1, w_2) > 0$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Убедитесь, что  $(u, w) \geq 0$  для любых  $u, w \in H_+^n$ .

**15.1.2. Касательные векторы и углы.** Как и в евклидовом случае, лоренцево скалярное произведение на пространстве  $V$  задаёт для каждой точки  $p \in \mathbb{L}_n$  стандартную аффинную окрестность, ассоциированную с векторным пространством  $T_p \mathbb{L}_n = \operatorname{Hom}(p, p^\perp)$ , которое называется *касательным пространством* к  $\mathbb{L}_n$  в точке  $p$ . Эта окрестность состоит из всех одномерных подпространств  $q \subset \mathbb{P}(V)$ , являющихся графиками ненулевых линейных отображений  $\tau : p \rightarrow p^\perp$ , см. рис. 14◊6 на стр. 178. Сопоставляя такому отображению  $\tau$  его значение

$$u_\tau = \tau(w) \in p^\perp$$

на единственном лежащем на  $H_+^n$  векторе  $w \in p$ , мы можем отождествить  $T_p \mathbb{L}_n$  с векторным пространством  $p^\perp$ , которое является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости  $T_w H_+^n$  к гиперблоиду (15-2) в точке  $w = p \cap H_+^n$ . Если  $p \in \mathbb{L}_n$ , то лоренцево скалярное произведение (15-1) ограничивается на векторное пространство  $p^\perp$  в анизотропную отрицательно определённую форму. Поэтому на каждом касательном пространстве  $T_p \mathbb{L}_n$  имеется естественная евклидова структура, в которой скалярное произведение касательных векторов  $\tau_1, \tau_2 : p \rightarrow p^\perp$  равно

$$(\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w), \quad (15-5)$$

где в правой части всюду используется лоренцево скалярное произведение на  $V$ . При отождествлении  $T_p \mathbb{L}_n$  с векторным пространством  $p^\perp$ , скалярное произведение (15-5) превращается во взятое с противоположным знаком ограничение лоренцева скалярного произведения с  $V$  на  $p^\perp$ :  $(\tau_1, \tau_2)_p = -(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_2})$ . При этом длины касательных векторов и углы между ними вычисляются по формулам

$$|\tau| = \sqrt{-(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)}, \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = \frac{-(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_2})}{\sqrt{(\mathbf{u}_{\tau_1}, \mathbf{u}_{\tau_1})(\mathbf{u}_{\tau_2}, \mathbf{u}_{\tau_2})}}. \quad (15-6)$$

Определённые таким образом длины касательных векторов согласуются с геодезическим расстоянием (15-4) между точками в следующем смысле. Рассмотрим зависящую от времени точку  $w(t)$ , гладко движущуюся по отрезку геодезической  $[p_1, p_2]$  из  $p_1$  в  $p_2$ . Тогда в каждый момент времени вектор скорости этой точки  $\tau(t) = \dot{w}(t)$  находится в касательном пространстве  $T_{w(t)}$  и интеграл от его длины  $|\tau(t)|$ , вычисленной по формуле (15-6), по промежутку времени, за который точка  $w(t)$  пройдёт из  $p_1$  в  $p_2$ , равен гиперболическому расстоянию  $|p_1, p_2|$ , вычисленному по формуле (15-4). Действительно, выберем в линейной оболочке векторов  $w_1, w_2 \in H_+^n$ , представляющих точки  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$ , такой лоренцев базис  $e_1, e_2$ , чтобы  $e_1 = \pm w_1$  и обе координаты вектора  $w_2$  были положительны, как на рис. 15◊2. Гладкое отображение

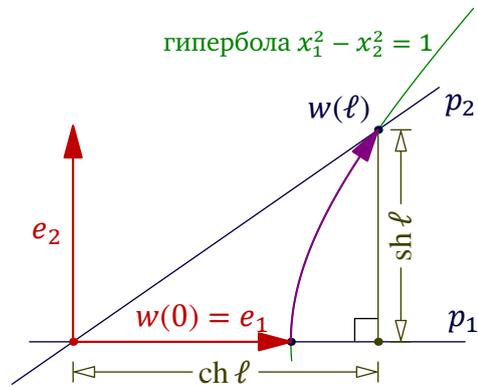


Рис. 15◊2. Геодезический отрезок.

представляющих точки  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$ , такой лоренцев базис  $e_1, e_2$ , чтобы  $e_1 = \pm w_1$  и обе координаты вектора  $w_2$  были положительны, как на рис. 15◊2. Гладкое отображение

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}_n, \quad t \mapsto \mathbb{R}(e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t) \subset V, \quad (15-7)$$

задаёт в пространстве Лобачевского кривую, выходящую из точки  $p_1$  при  $t = 0$  и приходящую в точку  $p_2$  при  $t = \ell = |p_1, p_2|$ , см. рис. 15◊2.

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Убедитесь в этом

Вектор  $w(t) = e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t$ , представляющий точку этой кривой, в каждый момент времени имеет лоренцеву длину 1. Поэтому его производная  $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \text{sh } t + e_2 \cdot \text{ch } t \in w(t)^\perp$  в каждый момент времени лоренцево ортогональна вектору  $w(t)$ , т. е. лежит в касательном пространстве  $T_{w(t)} \mathbb{L}_n = w(t)^\perp$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Убедитесь в этом.

Согласно формуле (15-5), касательный вектор  $\dot{w}(t) \in T_w \mathbb{L}_n$  имеет длину  $|\dot{w}(t)| = 1$ . Поэтому длина кривой (15-7), понимаемая как интеграл от абсолютной величины скорости, равна

$$\int_0^{|p_1, p_2|} |\dot{w}(t)| dt = |p_1, p_2|.$$

Образ отрезка  $[0, \ell]$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$ , при отображении (15-7) называется *геодезическим отрезком* и обозначается  $[p_1, p_2]$ . Геодезический отрезок можно воспринимать как заключённую между прямыми  $p_1$  и  $p_2$  дугу ветви единичной гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , которую пробегает вектор  $w(t) = e_1 \cdot \text{ch } t + e_2 \cdot \text{sh } t$  при  $t \in [0, \ell]$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$ . Однако евклидова длина этой дуги на аффинной плоскости  $\mathbb{A}(U)$  с евклидовой структурой, для которой векторы  $e_0, e_1$  образуют ортонормальный базис, отличается от гиперболического расстояния  $|p_1, p_2|$ , поскольку евклидова длина вектора  $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \text{sh } t + e_2 \cdot \text{ch } t \in w(t)^\perp$  отличается от гиперболической длины, вычисленной по формуле (15-6), и равна  $\text{sh}^2 t + \text{ch}^2 t = 2 \text{ch}^2 t - 1$ , а интеграл от неё

$$\int_0^{|p_1, p_2|} (2 \text{ch}^2 t - 1) dt = \text{ch } |p_1, p_2| \cdot \text{sh } |p_1, p_2|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.4. Убедитесь, что гиперболическое расстояние  $|p_1, p_2|$  равно удвоенной евклидовой площади криволинейного треугольника, образованного прямыми  $p_1, p_2$  и отрезком заключённой между ними ветви гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ , см. рис. 15◊3.

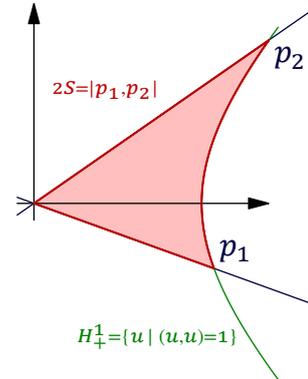


Рис. 15◊3. Гиперболическое расстояние как евклидова площадь.

ТЕОРЕМА 15.1

Геодезическое расстояние (15-4) задаёт на пространстве  $\mathbb{L}_n$  метрику. Каждый геодезический отрезок  $[p_1, p_2] \subset \mathbb{L}_n$  является ГМТ  $p \in \mathbb{L}_n$ , для которых  $|p_1, p| + |p, p_2| = |p_1, p_2|$ .

Доказательство. Любые три линейно независимых вектора  $p_1, p_2, p_3$  с концами на  $H_+^n$  порождают в  $\mathbb{P}(V)$  плоскость, не касающуюся абсолютной квадрики  $G$ . Поэтому ограничение лоренцева скалярного произведения на линейную оболочку этих векторов невырождено и имеет сигнатуру (1, 2). Таким образом, определитель Грама, составленный из попарных лоренцевых скалярных произведений  $g_{ij} = (p_i, p_j)$ , как и в эллиптическом пространстве<sup>1</sup>, неотрицателен:

$$\Gamma_{p_1 p_2 p_3} = \det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0 \quad (15-8)$$

и обращается в нуль если и только если  $p_2 \in (p_1 p_3)$ . В силу монотонного возрастания функции  $\text{ch } x$  на  $[0, \infty)$ , неравенство треугольника для точек  $p_1, p_2, p_3$  равносильно неравенству  $\text{ch}(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \geq \text{ch } |p_1, p_3|$ , которое можно переписать как

$$\text{sh } |p_1, p_2| \cdot \text{sh } |p_2, p_3| \geq \text{ch } |p_1, p_3| - \text{ch } |p_1, p_2| \cdot \text{ch } |p_2, p_3|. \quad (15-9)$$

Поскольку левая часть здесь неотрицательна, при отрицательной правой части неравенство треугольника выполняется строго. Если же правая часть неотрицательна, возводя обе части неравенства в квадрат и пользуясь тем, что  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ , получаем

$$(g_{12}^2 - 1)(g_{13}^2 - 1) \geq g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13},$$

что превращается в (15-8) после раскрытия скобок и переноса правой части налево. Равенство в (15-9) влечёт равенство в (15-8). В этом случае все три точки лежат на одной геодезической, и равенство  $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$  равносильно тому, что  $p_2 \in [p_1, p_3]$ , см. рис. 15◊3 и рис. 15◊2.  $\square$

<sup>1</sup>Ср. с доказательством теор. 14.1 на стр. 177.

**15.2. Модель  $B_1^n$ .** Гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$  целиком наблюдаемо в стандартной аффинной карте  $U_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$  проективного пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  в виде внутренности единичного шара  $B_1^n = G_+ \cap U_0$ :

$$B_1^n = \{(1, x_1, \dots, x_n) \in U_0 \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

При этом геодезические пространства  $\mathbb{L}_n$  видны в  $B_1^n$  в виде прямых, через любые две различные точки проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по отрезку этой прямой. Та же картина имеет место в евклидовом пространстве  $U_0$  с евклидовой структурой, задаваемой взятым с противоположным знаком ограничением лоренцева скалярного произведения с  $V$  на направляющее подпространство  $e_0^\perp = \text{Ann } x_0$  карты  $U_0$ . Однако и расстояния, и углы в  $\mathbb{L}_n$  отличаются от расстояний и углов в евклидовом пространстве  $U_0$ . Так, точка  $w = \text{ch } \ell \cdot e_0 + \text{sh } \ell \cdot e_1 \in \mathbb{L}_n$ , находящаяся на гиперболическом расстоянии  $\ell$  от точки  $e_0$ , видна в аффинной карте  $U_0 = e_0 + e_0^\perp$  как точка  $u = e_0 + \text{th } \ell \cdot e_1$ , см. рис. 15◊4, удалённая от  $e_0$  на евклидово расстояние

$$\ell_{\text{ЕВК}} = \text{th } \ell, \tag{15-10}$$

и при  $\ell_{\text{ЕВК}} \rightarrow 1$ , когда точка  $u$  приближается к абсолюту, гиперболическое расстояние  $\ell \rightarrow \infty$ .

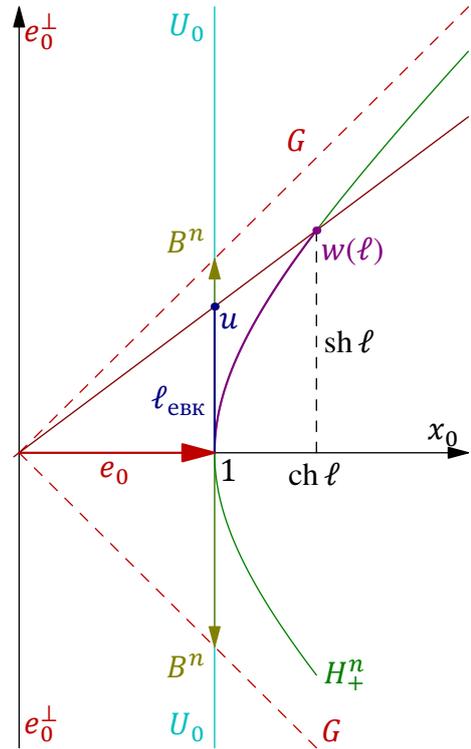


Рис. 15◊4.  $\ell_{\text{ЕВК}} : 1 = \text{sh } \ell : \text{ch } \ell$ .

**Пример 15.1 (ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ)**

Плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$ , как и евклидова плоскость, разбивается каждой лежащей в ней прямой на две связные компоненты. Однако через любую точку  $a$ , не лежащую на произвольно заданной прямой  $\ell$ , проходит континуальное семейство прямых, не пересекающих прямую  $\ell$ , см. рис. 15◊5.

**Пример 15.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ)**

Рассмотрим три линейно независимых вектора  $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{L}_2$  с концами на  $H_+^2$ . Дополним вектор  $w_0$  до лоренцева базиса в линейной оболочке векторов  $w_0, w_1$  вектором  $u_1$  так, чтобы вектор  $w_1$  имел в этом базисе положительные координаты, и рассмотрим аналогичный лоренцев базис  $w_0, u_2$  в линейной оболочке векторов  $w_0, w_2$ . Тогда угол  $\alpha_0$  при вершине  $w_0$  в  $\Delta w_0 w_1 w_2$  имеет  $\cos \alpha_0 = -(u_1, u_2)$ , а векторы  $w_1, w_2$  выражаются через базисные по формулам<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{ch } |w_0, w_1| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_1| \cdot u_1 \\ w_2 &= \text{ch } |w_0, w_2| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_2| \cdot u_2. \end{aligned} \tag{15-11}$$

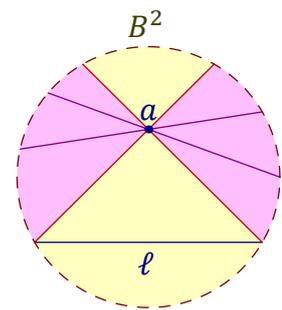


Рис. 15◊5.

Подставляя это в лоренцево произведение  $(w_1, w_2) = \text{ch } |w_1, w_2|$ , получаем гиперболическую теорему косинусов

<sup>1</sup>Ср. с доказательством форм. (14-11) на стр. 183.

$$\operatorname{ch} |w_1, w_2| = \operatorname{ch} |w_0, w_1| \cdot \operatorname{ch} |w_0, w_2| - \operatorname{sh} |w_0, w_1| \cdot \operatorname{sh} |w_0, w_2| \cdot \cos \alpha_0. \quad (15-12)$$

Из (15-11) вытекает также, что определитель матрицы координат векторов  $w_0, w_1, w_2$  в произвольно зафиксированном лоренцевом базисе  $e$  пространства  $V = \mathbb{R}^3$  равен

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \operatorname{sh} |w_0, w_1| \operatorname{sh} |w_0, w_2| \det(w_0, u_1, u_2).$$

Так как квадрат последнего определителя равен определителю Грама<sup>1</sup> векторов  $w_0, u_1, u_2$ :

$$\det^2(w_0, u_1, u_2) = \Gamma_{w_0, u_1, u_2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \alpha_0 \\ 0 & -\cos \alpha_0 & -1 \end{pmatrix} = \sin^2 \alpha_0,$$

в любом  $\Delta w_0 w_1 w_2$  с гиперболическими углами  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и длинами сторон  $\ell_i = |w_j, w_k|$  для всех циклических перестановок  $i, j, k$  номеров 0, 1, 2 выполнена *гиперболическая теорема синусов*

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \operatorname{sh} \ell_i \operatorname{sh} \ell_j \sin \alpha_k, \quad (15-13)$$

где векторы  $w_i$ , представляющие вершины треугольника, предполагаются лежащими на единичном гиперboloиде  $H_+^2$ . Из формулы (15-13) вытекает равенство

$$\frac{\operatorname{sh} \ell_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\operatorname{sh} \ell_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\operatorname{sh} \ell_2}{\sin \alpha_2}, \quad (15-14)$$

также известное как *гиперболическая теорема синусов*.

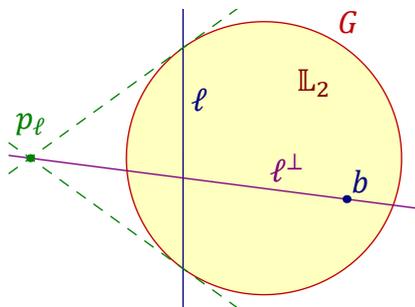


Рис. 15◊6. Перпендикуляр  $\ell^\perp$ , опущенный из точки  $b$  на прямую  $\ell$ .

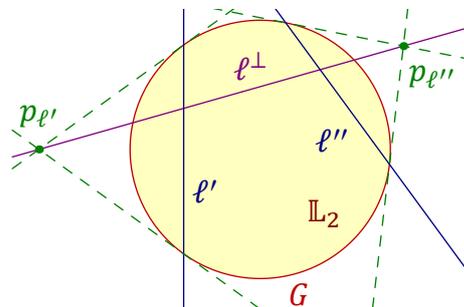


Рис. 15◊7. Общий перпендикуляр  $\ell^\perp$  к двум не пересекающимся прямым  $\ell', \ell''$ .

### Пример 15.3 (перпендикуляры к прямым)

Прямая  $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  пересекает плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{P}_2$  если и только если её полюс  $p_\ell$  относительно абсолютной коники  $G \subset \mathbb{P}_2$  не лежит в  $\mathbb{L}_2$ , см. рис. 15◊6. Две такие прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно  $G$ , т. е. проходят через полюсы друг друга. В частности, через каждую точку  $b \in \mathbb{L}_2 \setminus \ell$  проходит единственная прямая,

<sup>1</sup>Согласно форм. (1-2) на стр. 6, определитель Грама любого набора векторов равен произведению определителя Грама лоренцева базиса на квадрат определителя матрицы координат рассматриваемых векторов в этом лоренцевом базисе.

перпендикулярная прямой  $\ell$ , а именно — прямая  $(bp_\ell)$ . В точке пересечения  $a = (bp_\ell) \cap \ell$  достигается строгий абсолютный минимум гиперболического расстояния от точки  $b$  точек прямой  $\ell$ , поскольку для любой отличной от  $b$  точки  $c \in \ell$  в силу формулы (14-11) выполняется неравенство  $\operatorname{ch} |b, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |a, c| > \operatorname{ch} |a, b|$ , ибо  $\operatorname{ch} |a, c| > 1$ . В отличие от евклидовой плоскости, у любых двух пересекающихся  $\mathbb{L}_2$  но не пересекающихся внутри  $\mathbb{L}_2$  прямых  $\ell', \ell'' \subset \mathbb{P}_2$  имеется единственный общий перпендикуляр, а именно — поляр  $\ell^\perp = (p_{\ell'}, p_{\ell''})$  точки  $\ell' \cap \ell''$  относительно абсолютной коники  $G$ . При этом точки пересечения  $a' = \ell' \cap \ell^\perp$  и  $a'' = \ell'' \cap \ell^\perp$  образуют единственную пару точек, на которой достигается строгий абсолютный минимум расстояний между точками прямых  $\ell'$  и  $\ell''$  в том смысле, что  $|c', c''| > |a', a''|$  для всех  $c' \in \ell' \setminus a', c'' \in \ell'' \setminus a''$ .

ПРИМЕР 15.4 (МЕДИАТОР)

В гиперболическом пространстве  $\mathbb{L}_n$  равноудалённость точки  $q$  от двух заданных различных точек  $p_1, p_2$ , где все три точки представлены векторами с концами на  $H_+^n$ , выражается равенством<sup>1</sup>  $(p_1, q) = (p_2, q)$ , означающем, что  $q \in (p_1 - p_2)^\perp$ . Таким образом, ГМТ  $q \in \mathbb{L}_n$ , равноудалённых от двух заданных точек  $p_1 \neq p_2$ , высекается из  $\mathbb{L}_n$  проективной гиперплоскостью  $(p_1 - p_2)^\perp$ , полярной к точке  $p_1 - p_2$ , которая лежит вне  $\mathbb{L}_n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.5. Покажите, что разность любых двух различных векторов  $u, w \in H_+^n$  лежит вне  $\mathbb{L}_n$ .

Как и в евклидовой геометрии, эта гиперплоскость перпендикулярна прямой  $(p_1 p_2)$  и проходит через точку  $(p_1 + p_2)/2 \in \mathbb{L}_n$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1

Если  $(n + 1)$  точек  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{L}_n$  не лежат в гиперплоскости, а точки  $a, b \in \mathbb{L}_n$  таковы, что  $|a, p_i| = |b, p_i|$  для всех  $0 \leq i \leq n$ , то  $a = b$ .

Доказательство. Если  $a \neq b$ , то согласно прим. 15.4 все точки  $p_i \in (a - b)^\perp$ . □

**15.3. Группа изометрий.** Гиперплоскость  $u^\perp \subset \mathbb{P}(V)$ , лоренцево ортогональная вектору  $u \in V$ , пересекает гиперболическое пространство  $\mathbb{L}_n$  если и только если  $(u, u) < 0$ . Отражение в такой гиперплоскости  $\sigma_u : V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(u, e) \cdot u$  задаёт линейную проективную инволюцию  $\sigma_u : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , оставляющую на месте точку  $u$  и все точки гиперплоскости  $u^\perp$ . Она переводит в себя абсолютную квадрику  $G \subset \mathbb{P}(V)$  и пространство Лобачевского  $\mathbb{L}_n$ . Возникающее таким образом изометрическое преобразование  $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  отправляет точку  $p \in \mathbb{L}_n$  в такую точку  $\sigma_u(p) \in (pu)$ , что точки  $p$  и  $\sigma_u(p)$  гармоничны на прямой  $(pu)$  точкам  $u$  и  $u^* = (pu) \cap u^\perp$ , вторая из которых сопряжена точке  $u$  относительно абсолюта. Для любых двух различных точек  $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$  существует единственная гиперплоскость, отражение в которой переводит эти точки друг в друга. Это в точности медиаторная гиперплоскость  $(p_1^+ - p_2^+)^\perp$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.6. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 15.2

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  задаётся лоренцево ортогональным линейным оператором  $g : V \simeq V$ , который определяется преобразованием  $g$  однозначно с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Каждое изометрическое преобразование является композицией не более  $n + 1$  отражений в гиперплоскостях. Для любых двух наборов из  $n + 1$  не содержащихся

<sup>1</sup>Обратите внимание, что в отличие от прим. 14.1 на стр. 180 в этом равенстве нет модулей.

в гиперплоскости точек  $p_i, q_i, 0 \leq i \leq n$ , таких что  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$ , существует единственное изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \simeq \mathbb{L}_n$ , переводящее точку  $p_i$  в точку  $q_i$  для каждого  $i$ .

Доказательство. Представим все точки векторами с концами на  $H_+^n$ . Тогда равенства  $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$  для всех  $i, j$  означают равенство матриц Грама этих наборов векторов. Поэтому существует линейный лоренцево ортогональный оператор  $g : V \rightarrow V$ , переводящий векторы  $p_i$  в векторы  $q_i$ . Согласно предл. 15.1, каждая точка  $z \in \mathbb{L}_n$  однозначно определяется своими расстояниями как до точек  $p_i$ , так и до точек  $q_i$ . Поэтому всякое изометрическое преобразование  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , переводящее точки  $p_i$  в точки  $q_i$ , совпадает с задаваемым оператором  $g$  преобразованием  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ . Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы. Единственность оператора  $g$  с точностью до знака проверяется той же выкладкой, что и в упр. 14.6 на стр. 181, а его разложение в композицию не более  $n + 1$  отражений — теми же рассуждениями, что и в теор. 2.2 на стр. 18, но с использованием упр. 15.6.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 15.7. Аккуратно проделайте все эти рассуждения.

Следствие 15.1

Всякое изометрическое преобразование  $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$  однозначно продолжается на абсолют до непрерывного преобразования  $g : \bar{\mathbb{L}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{L}}_n$ , где  $\bar{\mathbb{L}}_n$  означает замыкание  $\mathbb{L}_n$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , и однозначно восстанавливается по своему действию на абсолют.  $\square$

Пример 15.5 (Гиперболические сферы)

Гиперболическая сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  определяется как ГМТ  $x \in \mathbb{L}_n$  с  $|p, x| = r$ . Это гладкая вещественная проективная квадратика с уравнением<sup>1</sup>

$$(p, x)^2 - (x, x) \cdot (p, p) \cdot \text{ch}^2 r = 0. \quad (15-15)$$

Все такие квадратки лежат в пучке  $S_\lambda = P_p^2 - \lambda G$ , натянутом на двойную полярю  $P_p = p^\perp$  точки  $p$  относительно абсолюта — вырожденную квадратку ранга 1, задаваемую квадратичной формой  $q_0(x) = (p, x)^2$ , и абсолютную квадратку  $G$ , задаваемую квадратичной формой  $q_\infty(x) = (x, x)$ . Поляризация квадратичной формы  $q_\lambda = q_0 + \lambda q_\infty$ , задающей произвольную квадратку  $S_\lambda = P_p - \lambda G$  из этого пучка, имеет вид  $\tilde{q}_\lambda(x, y) = (p, x)(p, y) - \lambda(x, y)$ . Полярная линейная форма точки  $p$  относительно такой квадратки равна

$$\tilde{q}_\lambda(p, y) = (p, p)(p, y) - \lambda(p, y) = (p, y) \cdot ((p, p) - \lambda)$$

и тождественно зануляется при  $\lambda = (p, p)$ . Поэтому сфера нулевого радиуса  $S_{(p,p)} = P_p - (p, p) \cdot G$  особа в точке  $p$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.8. Убедитесь, что в комплексном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$  квадратка  $S_{(p,p)}$  представляет собою простой конус с вершиной в  $p$ , образованный всеми (комплексными) касательными прямыми, опущенными из  $p$  на  $G$ .

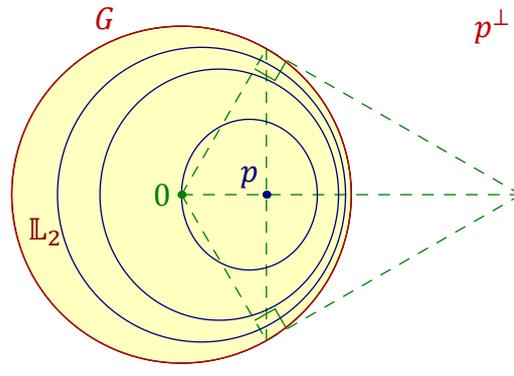


Рис. 15.8. Пучок окружностей с центром  $p$ .

<sup>1</sup>См. первую из форм. (15-4) на стр. 189.

Группа  $\Gamma_p$  всех изометрических преобразований  $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ , оставляющих точку  $p$  на месте, переводит в себя каждую из трёх квадрик  $S_{(p,p)}$ ,  $S_0 = P_p$ ,  $S_\infty = G$ , а значит, и каждую квадрику из натянутого на них пучка. Поскольку группа  $\Gamma_p$  транзитивно действует на проходящих через точку  $p$  прямых, каждая гиперболическая сфера  $S_\lambda = P_p - \lambda G$  представляет собою одну орбиту группы  $\Gamma_p$ . Гиперболический радиус  $r$  сферы  $S_\lambda$  связан с параметром пучка  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = (p, p) \cdot \text{ch}^2 r. \quad (15-16)$$

В частности, множество вещественных точек сферы  $S_\lambda$  непусто при  $\lambda \geq (p, p)$ , и при  $\lambda = (p, p)$  гиперболическая сфера вырождается в одну двойную точку  $p$ . Если отождествить плоскость Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  с единичным кругом в аффинной карте  $U_0$  и ввести в нём декартовы координаты  $(x, y)$  так, чтобы  $p = (c, 0)$ , то лоренцев скалярный квадрат точки  $p$  будет равен  $(p, p) = 1 - c^2$ , а пучок гиперболических окружностей с центром в  $p$  будет выглядеть как пучок эллипсов<sup>1</sup> с уравнениями  $(cx - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ , см. рис. 15◊8.

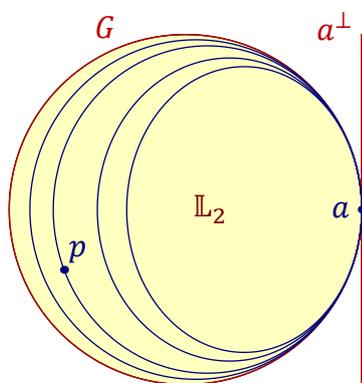


Рис. 15◊9. Пучок орициклов с полюсом в точке  $a$  на абсолютном.

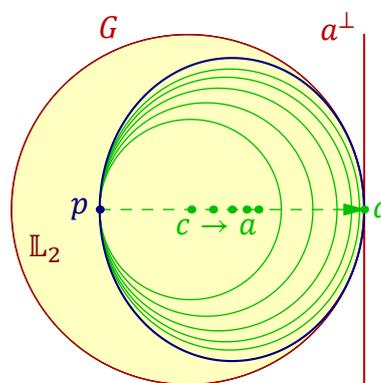


Рис. 15◊10. Орицикл как предел проходящих через  $p$  окружностей неограниченного радиуса.

#### ПРИМЕР 15.6 (Орициклы)

Квадрики из пучка, порождённого абсолютном  $G$  и двойной касательной плоскостью  $T_a G$  в некоторой точке  $a \in G$  на абсолютном, называются *орициклами* с полюсом  $a$ . Через любую точку  $p \in \mathbb{L}_n$  и любую точку  $a \in G$  проходит единственный орицикл с полюсом в  $a$ , см. рис. 15◊9. Его можно воспринимать как предел проходящих через точку  $p$  сфер, центры  $c$  которых удаляются от точки  $p$  в направлении  $a$ , а радиусы<sup>2</sup> неограниченно возрастают, см. рис. 15◊10. В отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского такие сферы не «уплощаются» в пределе до перпендикулярной к прямой  $(pa)$  гиперплоскости, проходящей через точку  $p$ , а стремятся к гладкой квадрике — орициклу с полюсом в  $a$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.9. Покажите, что каждый орицикл с полюсом  $a$  пересекает в  $\mathbb{L}_n$  все проходящие через  $a$  геодезические под прямым углом.

<sup>1</sup>На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$  это пучок коник с двумя базисными точками и двумя особыми кониками, как на рис. 7◊3 на стр. 85.

<sup>2</sup>Т. е. гиперболические расстояния  $|p, c|$ , где  $c$  это центр соответствующей сферы.

**15.3.1. Дифференциал гиперболической изометрии.** Как и в эллиптическом случае, ортогональный оператор  $g : V \simeq V$  задаёт для каждой точки  $p \in \mathbb{L}_n$  ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{L}_n \simeq T_{g(p)} \mathbb{L}_n, \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \quad (15-17)$$

переводящее касательный вектор  $\tau : p \mapsto p^\perp$  в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-10) называется *дифференциалом* изометрического преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$  в точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ .

**15.4. Гиперболическая форма объёма.** Точно также, как и в н° 15.4 на стр. 197, с каждым ненулевым вектором  $w$  из пространства  $V$  с лоренцевым скалярным произведением связана кососимметричная  $n$ -линейная форма на  $V$ , значение которой на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (15-18)$$

где векторы  $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  составляют лоренцев базис<sup>1</sup> пространства  $V$ . С точностью до знака, форма (15-18) не зависит от выбора лоренцева базиса, и абсолютная величина её значения на параллелепипеде из подпространства  $w^\perp \subset V$  равна умноженному на  $|w|$  евклидову  $n$ -мерному объёму этого параллелепипеда вне зависимости от выбора лоренцева базиса в  $V$ . Если вектор  $w$  лежит на<sup>2</sup>  $H_+^n$  векторное подпространство  $w^\perp$  является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости  $T_w H_+^n \subset \mathbb{A}(V)$ , и ограничение на него формы  $|\omega_w|$  задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём. В координатах относительно лоренцева базиса  $e$  задаваемая равенством (15-18) дифференциальная форма

$$\omega(x) : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (15-19)$$

записывается в точности также, как и на эллиптическом пространстве<sup>3</sup>:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (15-20)$$

Если задана гладкая биекция  $f : \Omega \rightarrow \Phi$  некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  на область  $\Phi \subset H_+^n$ , то подъём  $f^* \omega$  формы  $\omega$  с  $H_+^n$  на  $\mathbb{R}^n$  в каждой точке  $z \in \Omega$  пропорционален форме евклидова объёма на  $\mathbb{R}^n$ . Абсолютная величина коэффициента пропорциональности является неотрицательной функцией на области  $\Omega$

$$\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|,$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  — произвольный ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ , и интеграл от этой функции называется *объёмом гиперболической области*  $\Phi = f(\Omega) \subset H_+^n$ :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

<sup>1</sup>См. н° 15.1 на стр. 188.

<sup>2</sup>См. формулу (15-2) на стр. 188.

<sup>3</sup>См. формулу (14-16) на стр. 184.

Как и в н° 14.4.2 на стр. 186, форму (15-20) можно по однородности распространить до *инвариантной формы объёма* на касательном пространстве  $T_p \mathbb{L}_n$  в точке  $p \in \mathbb{L}_n$  правилом

$$\text{Vol}_p : (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}, \quad (15-21)$$

которое не зависит от выбора ненулевого представителя  $w \in p$  и при  $w \in H_+^n$  и  $u_i = \tau_i(w)$  превращается в форму (15-19)

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Как и в эллиптическом случае, форма (15-21) обладает тем свойством, что для любого лоренцево ортогонального линейного оператора  $g : V \simeq V$  выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где  $dg : T_p \mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{P}(V)$  это дифференциал<sup>1</sup> преобразования  $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ .

Пример 15.7 (подъём гиперболического объёма на евклидов шар  $B_1^n \subset U_0$ )

Обозначим через  $t_i = x_i/x_0$  стандартные координаты в аффинной карте  $U_0 \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ , которую мы будем рассматривать как евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, w)_0 \stackrel{\text{def}}{=} -(u, w) = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n,$$

противоположным по знаку к ограничению лоренцева скалярного произведения с  $\mathbb{R}^{n+1}$  на  $e_0^\perp$ . Лежащий на единичном гиперboloиде вектор  $x(t) \in H_+^n$ , который представляет ту же самую точку пространства  $\mathbb{L}_n$ , что и вектор  $t \in B^n \subset U_0$ , имеет вид  $x(t) = x_0 \cdot (e_0 + t)$  и лоренцев скалярный квадрат  $1 = (x(t), x(t)) = x_0^2 \cdot (1 + (t, t))$ , откуда  $x_0 = (1 + (t, t))^{-\frac{1}{2}}$ . Так как  $x_i = t_i x_0$ , дифференциал  $dx_i = x_0 dt_i + t_i dx_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^n dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n, \\ dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^{n-1} dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n. \end{aligned}$$

Подставляя это в форму объёма (15-20), заключаем, что её подъём с гиперboloида  $H_+^n$  на евклидов шар  $B^n \subset U_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t) &= x_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= x_0^{n+1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n = \frac{dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n}{(1 - (t, t)_0)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>См. н° 15.3.1 на стр. 197.

Таким образом, коэффициент растяжения гиперболического объёма по отношению к евклидову в точке  $t \in B^n$  зависит только от евклидовой нормы  $|t|^2 = (t, t)_0$  вектора  $t$  и равен

$$\varrho(t) = (1 - |t|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{15-22}$$

ПРИМЕР 15.8 (ПЛОЩАДЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА)

Рассмотрим на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  прямоугольный  $\Delta abc$  с прямым углом в вершине  $c$  и гиперболическими углами  $\alpha$  и  $\beta$  в вершинах  $a$  и  $b$ . Поместим в вершину  $a$  начальный вектор лоренцева базиса в  $\mathbb{R}^3$  и обозначим через  $u$  и  $w$  изображения вершин  $b$  и  $c$  в проходящей через конец вектора  $a \in \mathbb{R}^3$  стандартной аффинной карте  $U_0 = a + a^\perp$  на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ , см. рис. 15◊11. Поскольку прямые  $(bc)$  и  $(ac)$  сопряжены в  $\mathbb{P}_2$  относительно абсолютной коники  $G$ , их изображения  $(aw)$  и  $(uw)$  в карте  $U_0$  перпендикулярны друг другу в евклидовой структуре на  $a^\perp$ , а так как гиперболические углы между касательными векторами к  $\mathbb{P}_2$  в точке  $a$  совпадают с евклидовыми углами в пространстве  $a^\perp$ , евклидов угол между прямыми  $(au)$  и  $(aw)$  равен гиперболическому углу  $\alpha$  в  $\Delta abc$ . Обозначим через  $\ell$  евклидову длину катета  $[a, w]$  евклидова  $\Delta auw$ . По форм. (15-10) на стр. 192 она выражается через гиперболическую длину  $|a, c|$  соответствующего катета в  $\Delta abc$  как  $\ell = \text{th } |a, c|$ . Гиперболическая площадь  $\Delta abc$  равна интегралу от функции (15-22) по  $\Delta auw$ :

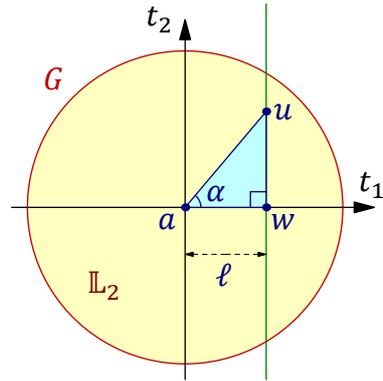


Рис. 15◊11. Изображение гиперболического  $\Delta abc$  в карте  $U_0 = a + a^\perp$ , где  $\ell = \text{th } |a, c|$ .

$$S(\Delta abc) = \int_{\Delta auw} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} dt_1 dt_2,$$

где  $(t_1, t_2)$  — декартовы координаты в карте  $U_0$ , а  $r^2 = t_1^2 + t_2^2$  — квадрат евклидова расстояния до нуля. Переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} t_1 &= r \cos \varphi & dt_1 &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ t_2 &= r \sin \varphi & dt_2 &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ dt_1 \wedge dt_2 &= r dr \wedge d\varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} S(\Delta acb) &= \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{\frac{\ell}{\cos \varphi}} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr = \int_0^\alpha ((1 - \ell^2 / \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - 1) d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \ell^2 - \sin^2 \varphi}} - \alpha = \arcsin \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} \right) - \alpha. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.10. Убедитесь, что  $\sin \alpha / \sqrt{1 - \ell^2} = \cos \beta$ .

Итак, гиперболическая площадь прямоугольного треугольника с углами  $\alpha, \beta$  равна

$$S(\Delta acb) = \arcsin(\cos \beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.$$

Разрезая произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника высотой, заключаем, что гиперболическая площадь треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  равна  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ . В частности, сумма углов треугольника в гиперболической геометрии всегда строго меньше  $\pi$ . Из соображений непрерывности, формула для площади остаётся справедливой и для треугольников с вершинами на абсолюте, не имеющих никаких других точек на абсолюте, кроме вершин.

**15.5. Конформные модели гиперболического пространства.** Так называют изображения пространства Лобачевского точками евклидова пространства, в которых евклидовы углы между геодезическими равны гиперболическим углам, однако сами геодезические изображаются не в виде евклидовых прямых, как это было в рассмотренной выше *линейной модели*  $B^n \subset U_0$ , а в виде некоторых коник и прямых специального вида. Одна из таких моделей получается из изображения пространства Лобачевского  $\mathbb{L}_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  внутренностью единичного шара  $B^n \subset U_0$  представленным на рис. 15◊12 на стр. 200 биективным квадратичным преобразованием  $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$  этого шара в точно такой же единичный шар

$$B_0^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{A}(e_0^\perp), \quad (15-23)$$

но лежащий в проходящей через нуль гиперплоскости  $e_0^\perp$ , параллельной карте  $U_0$ . Преобразование  $\kappa$  осуществляется в два шага. Сначала параллельно спроектируем шар  $B^n$  в направлении вектора  $-e_0$  на положительную полушферу  $x_0 \geq 0$  единичной *евклидовой* сферы

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}. \quad (15-24)$$

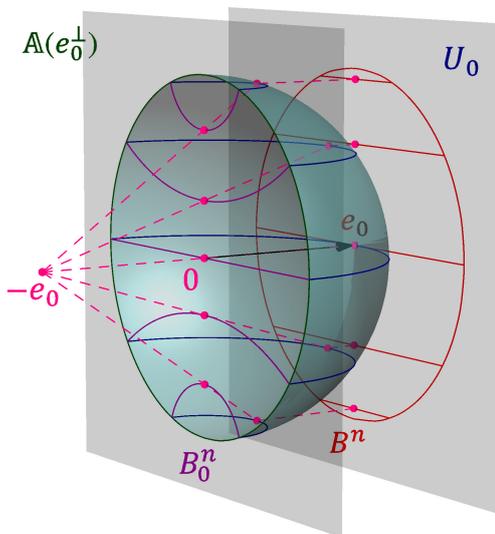


Рис. 15◊12. Квадратичное преобразование  $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$ .

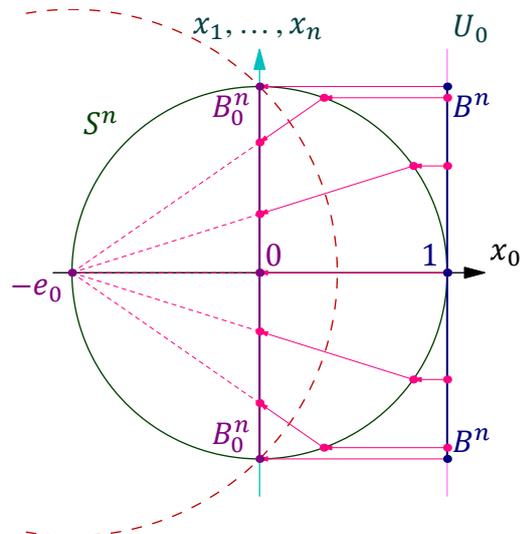


Рис. 15◊13. Вид сбоку на рис. 15◊12.

Затем отобразим эту полушферу на параллельную карте  $U_0$  экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  стереографической проекцией из диаметрально противоположной к  $e_0$  точки  $-e_0 \in S^n$ . На первом шаге лежащие в шаре  $B^n$  отрезки прямых из  $U_0$  переходят в дуги окружностей, пересекающих экваториальную плоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  под прямым углом, как на рис. 15◊12. Как мы видели в п° 13.3 на стр. 171, следующая далее стереографическая проекция является ограничением на

сферу  $S^n$  инверсии  $\sigma_{\sqrt{2}, -e_0}$  относительно большей сферы, изображённой на рис. 15◊13 красным пунктиром. Она имеет центр в точке  $-e_0$  и пересекает аффинную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  по той же самой  $(n - 1)$ -мерной единичной сфере с центром в нуле

$$S^{n-1} = S^n \cap \mathbb{A}(e_0^\perp) = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in e_0^\perp \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad (15-25)$$

что и сфера (15-24). Поскольку стереографическая проекция сохраняет углы и переводит окружности в окружности или прямые, геодезические пространства  $\mathbb{L}_n$  изобразятся в шаре  $B_0^n$  в виде его диаметров, а также всевозможных дуг окружностей, пересекающих граничную сферу  $S^{n-1}$  под прямым углом. При этом прямыми изобразятся в точности те геодезические, что проходят через точку  $e_0 \in \mathbb{L}_n$ , которая переводится преобразованием  $\kappa$  в центр шара  $B_0^n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.11. Обозначим через  $\varrho$  и  $\varrho_0$  евклидовы расстояния от центров шаров  $B^n$  и  $B_0^n$  до точек  $w \in B^n$  и  $w_0 = \kappa(w) \in B_0^n$  соответственно. Покажите, что они связаны соотношениями  $\varrho = 2\varrho_0 / (1 + \varrho_0^2)$  и  $\varrho_0 = (1 - \sqrt{1 - \varrho^2}) / \varrho$ .

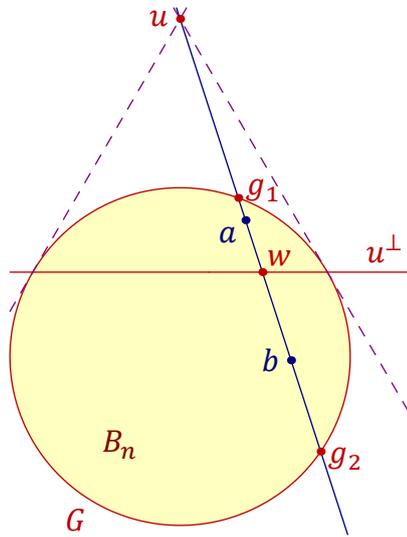


Рис. 15◊14.

$[a, b, u, w] = -1 = [g_1, g_2, u, w]$  на прямой  $(ab)$  при отражении  $\sigma_u$ .

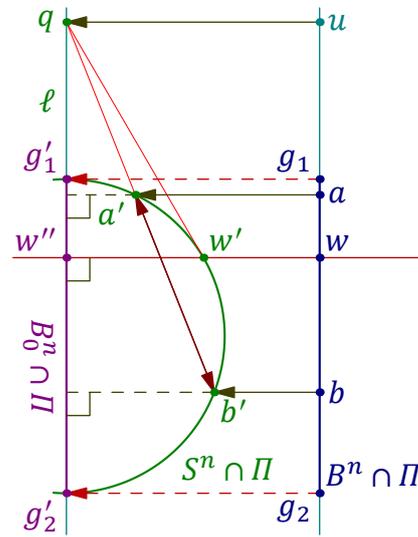


Рис. 15◊15. Параллельная проекция точек  $a, b, u, w$  на полуокружность  $S^n \cap \Pi$ .

ЛЕММА 15.1

Отражение  $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n, w \mapsto w - 2(w, u) \cdot u / (u, u)$ , в ортогональной гиперплоскости  $u^\perp \subset V$  к вектору  $u$  с концом в карте  $U_0$  и отрицательным лоренцевым квадратом  $(u, u) < 0$  действует в модели  $B_0^n$  как инверсия  $\sigma_{q,d} : B_0^n \rightarrow B_0^n$  в пространстве  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  относительно перпендикулярной границе этого шара  $(n - 1)$ -мерной сферы с центром в точке  $q = u - (u, e_0) \cdot e_0$ , которая является параллельной проекцией точки  $u$  на  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  вдоль вектора  $-e_0$ .

Доказательство. Отражение  $\sigma_u : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$  переводит в себя каждую проходящую через  $u$  прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  и действует на ней как линейная инволюция с неподвижными точками  $u$  и  $w = \ell \cap u^\perp$ . Поэтому точки  $a, b \in B^n$  переводятся друг друга отражением  $\sigma_u$  если и только если проективная прямая  $(ab)$  проходит через точку  $u$  и на этой прямой точки  $a, b$  гармоничны точкам  $u$  и  $w = (ab) \cap u^\perp$ , см. рис. 15◊14, где изображён вид на аффинную гиперплоскость  $U_0$  вдоль

вектора  $-e_0$ . Параллельная проекция точек  $u$ ,  $a$  и  $b$  на полусферу  $x_0 \geq 0$  сферы  $S^n$  происходит внутри двумерной аффинной плоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , которая проходит через аффинную прямую  $(ab) \cap U_0$  параллельно вектору  $-e_0$ . Плоскость  $\Pi$  изображена на рис. 15♦15. Она пересекает сферу  $S^n$  по окружности с диаметром  $\ell = B_0^n \cap \Pi$ . Инволюция  $\sigma_u : (ab) \rightleftharpoons (ab)$  задаёт инволюцию  $\sigma : p^\times \rightarrow p^\times$  на пучке  $p^\times$  параллельных прямых, перпендикулярных прямой  $\ell$ . Центр  $p$  этого пучка является полюсом прямой  $\ell$  относительно окружности  $\Pi \cap S^n$  и лежит на бесконечности плоскости  $\Pi$  в направлении вектора  $e_0$ . Неподвижными точками инволюции являются проходящие через точки  $u$  и  $w$  прямые  $(pu) = (uq)$  и  $(pw)$ . Так как отражение  $\sigma_u : (ab) \rightleftharpoons (ab)$  переставляет между собою изотропные точки  $\{g_1, g_2\} = G \cap (ab)$  прямой  $(ab)$ , изображённые на рис. 15♦15 красным пунктиром прямые гармоничны в пучке  $p^\times$  неподвижным прямым  $(qu)$ ,  $(pw)$ . Поэтому  $[g_1, g_2, q, w''] = -1$ , т. е. точки  $q$  и  $w''$  сопряжены относительно  $S^n \cap \Pi$ , а прямая  $(w'w'')$  является полярной точки  $q$  относительно  $S^n \cap \Pi$ . Следовательно, прямая  $(qa')$  пересекает абсолютную сферу  $G$  и прямую  $(pb)$  по одной и той же точке  $b'$ , ибо эта точка вместе с точкой  $a'$  образует гармоническую пару с парой точек пересечения прямой  $(qa')$  с прямыми  $(pu)$  и  $(pw)$ . Таким образом, проекция шара  $B_n$  на положительную полусферу  $x_0 \geq 0$  единичной сферы  $S^n$  переводит зеркальные относительно  $u^\perp$  точки  $a$ ,  $b$  в точки  $a'$ ,  $b' \in S^n$ , коллинеарные точке  $q$ . Согласно н° 13.3 на стр. 171, стереографическая проекция сферы  $S^n$  из точки  $-e_0$  на экваториальную гиперплоскость  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  переводит инверсию сферы  $S^n$  с центром в точке  $q$  в инверсию гиперплоскости  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$  относительно  $(n-1)$ -мерной сферы с центром в  $q$  и радиусом, квадрат которого равен степени точки  $q$  относительно единичной сферы  $S^n$ .  $\square$

#### Следствие 15.2

Группа изометрических преобразований пространства  $\mathbb{L}_n$  в модели  $B_0^n$  это группа преобразований единичного шара  $B_0^n$ , порождённая всевозможными инверсиями объёмлющего евклидова пространства  $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ , имеющими центр вне шара  $B_0^n$  и переводящими этот шар в себя. В частности, изометрические преобразования сохраняют евклидовы углы между геодезическими.  $\square$

#### Следствие 15.3

Евклидовы углы между геодезическими в модели  $B_0^n$  равны гиперболическим углам.

Доказательство. Евклидовы углы между проходящими через точку  $e_0$  прямыми в карте  $U_0$  совпадают с гиперболическими углами между этими прямыми. Преобразование  $\mathcal{H} : B^n \rightarrow B_0^n$  переводит эти прямые в диаметры шара  $B_0^n$ , сохраняя евклидовы углы. Поскольку группа изометрий пространства  $\mathbb{L}_n$  позволяет перевести любую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины в любую другую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины с тем же самым гиперболическим углом между ними, эта группа транзитивно действует на парах геодезических, пересекающихся под заданным гиперболическим углом. Так как группа гиперболических изометрий действует на шаре  $B_0^n$  преобразованиями, сохраняющими евклидовы углы между геодезическими, и в центре шара гиперболические углы совпадают с евклидовыми, точно такое же совпадение имеет место и в любой другой точке.  $\square$

#### Пример 15.9 (гиперболические сферы в конформной модели $B_0^n$ )

Гиперболическая сфера<sup>1</sup> радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$ , где  $q \in e_0^\perp$ , состоит из

<sup>1</sup>См. прим. 15.5 на стр. 195.

точек  $x = e_0 + w \in B_n$ , где  $w \in e_0^\perp$ , удовлетворяющих уравнению<sup>1</sup>

$$(p, x)^2 - (p, p)(x, x) \operatorname{ch}^2 r = (1 - (q, w))^2 - (1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2) \operatorname{ch}^2 r = 0, \quad (15-26)$$

где  $\|u\|^2 = -(u, u)$  означает евклидов скалярный квадрат вектора  $u \in e_0^\perp$ . Параллельная проекция на единичную сферу  $S^n$  вдоль вектора  $-e_0$  отображает такую точку  $x = w + e_0$  в точку  $x' = w + e_0 \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2}$ , для которой в силу (15-26) выполняется равенство

$$(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x') = (q, w) - \sqrt{(1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2)} \operatorname{ch} r = 1.$$

Таким образом, проекция гиперболической сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $p = e_0 + q \in B^n$  на единичную сферу  $S^n$  представляет собою евклидову сферу, которая высекается из  $S^n$  гиперплоскостью с уравнением  $(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x) = 1$ . Поскольку стереографическая проекция переводит сферы в сферы, семейство гиперболических сфер с центром в данной точке  $a \in B_0^n$  выглядит в модели  $B_0^n$  как пучок евклидовых сфер, натянутый на двойную точку  $a$  и абсолютную сферу  $S^{n-1}$ .

ПРИМЕР 15.10 (ДИСК ПУАНКАРЕ)

Конформную модель плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$  в единичном круге  $B_0^2$  на евклидовой плоскости обычно называют *диск Пункаре*. Геодезические в этой модели изображаются диаметрами круга, а также дугами окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. Это ровно те окружности, инверсия относительно которых переводит диск в себя, и такие инверсии как раз и являются гиперболическими отражениями относительно геодезических. Гиперболические окружности с центром в точке  $a \in \mathbb{L}_2$  изображаются на диске Пуанкаре евклидовыми окружностями из пучка, натянутого на абсолют и двойную точку  $a$ . Каждая окружность этого пучка перпендикулярна всем проходящим через точку  $a$  геодезическим, т. е. проходящим через  $a$  евклидовым окружностям, перпендикулярным абсолюту. Орициклы также видны на диске Пуанкаре как окружности, касающиеся абсолютa. Любой треугольник с нулевыми углами и вершинами на абсолютe имеет площадь  $\pi$ , не смотря на то, что его стороны имеют бесконечную длину. Отражения в сторонах такого треугольника замащивают всю плоскость Лобачевского счётным множеством треугольников с попарно не пересекающимися внутренностями, конгруэнтных исходному треугольнику.

<sup>1</sup>См. формулу (15-15) на стр. 195.

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 1.5. В клетке  $(i, j)$  матрицы  $B_{e^*, e}^\wedge$  отображения  $\beta^\wedge : e_j \mapsto \beta(*, e_j)$  стоит  $i$ -тая координата линейной функции  $u \mapsto \beta(u, e_j)$  в базисе  $e^*$ , равная значению этой функции на базисном векторе  $e_i$ , т. е. скалярному произведению  $\beta(e_i, e_j)$ .
- Упр. 1.7. Линейная оболочка векторов  $e_\nu + ie_{n+\nu}$  с  $1 \leq \nu \leq n$ .
- Упр. 1.8. Если матрица  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  кососимметрична, то  $\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B$ .
- Упр. 1.9. Пусть  $v = \sum x_i e_i$ . Скалярно умножая  $v$  слева на  ${}^\vee e_i$ , получаем  $\beta({}^\vee e_i, v) = x_i$ . Скалярно умножая  $v$  справа на  $e_i^\vee$ , получаем  $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$ .
- Упр. 2.7. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп  $\mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^*$ ,  $x \mapsto x^2$ . Так как уравнение  $x^2 = 1$  имеет в поле  $\mathbb{F}_p$  ровно два корня  $x = \pm 1$ , ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка  $(p - 1)/2$ .
- Упр. 2.8. Если оператор  $f$  самосопряжён, то  $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$ . Если билинейная форма  $\beta_f$  симметрична, то  $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$ .
- Упр. 3.6. При чётном  $n$  центр алгебры  $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$  линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном  $n$  — мономами чётных степеней и старшим мономом  $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$ , степень которого нечётна.
- Упр. 3.7. Это сразу следует из равенства  $\det A = \det A^t$ .
- Упр. 3.9. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций). Перестановка между собою элементов из  $\nu$ -й пары меняет знак  $\text{sgn}(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n)$ , но одновременно заменяет матричный элемент  $a_{i_\nu j_\nu}$  элементом  $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$ .
- Упр. 4.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия  $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$ , а слева — количество ненулевых векторов в  $(n + 1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е.  $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ ; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования геометрической прогрессии.
- Упр. 4.4. Это следует из соотношения  $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$ .
- Упр. 4.5. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.
- Упр. 4.7. Пусть  $K = \mathbb{P}(W)$ . Векторное подпространство  $W \subset V$  имеет размерность  $k + 1$  и либо содержится в гиперплоскости  $\text{Ann}(\xi)$ , либо пересекается с нею по  $k$ -мерному векторному пространству  $W' = \text{Ann}(\xi|_W) \subset W$ . В первом случае  $K$  не пересекается с картой  $U_\xi$ , во втором случае пересечение  $K \cap U_\xi$  представляет собою аффинное пространство над векторным пространством  $W \cap \text{Ann} \xi = W'$ .
- Упр. 4.10. Если  $v = u + w$ , где  $u \in U$ ,  $w \in W$  и  $v \notin U \cup W$ , то  $u$  и  $w$  линейно независимы, и  $v \in (u, w)$ . Если отвечающая вектору  $v$  точка проективного пространства лежит на какой-то ещё прямой  $(ab)$  с  $a \in U$  и  $b \in W$ , то  $v = \lambda a + \mu b$  для некоторых ненулевых  $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ , причём  $\lambda a = u$  и  $\mu b = w$  в силу единственности разложения вектора  $v$ . Поэтому  $a$  и  $u$ , так же как  $b$  и  $w$ , суть совпадающие точки проективного пространства. В частности,  $(uw) = (ab)$ .
- Упр. 4.11. Для нульмерной квадрики на  $\mathbb{P}_1$  утверждение очевидно. Пусть при  $n \geq 2$  квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  содержится в гиперплоскости  $H \subset \mathbb{P}_n$  и имеет гладкую точку  $a \in Q$ . Тогда каждая проходящая через  $a$  и не содержащаяся в  $H$  прямая пересекает  $Q$  ровно в одной точке  $a$ , т. е. лежит

в  $T_p Q$ . Поэтому  $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$ . Если  $H = V(\xi)$ ,  $T_p Q = V(\eta)$  для каких-то ненулевых ковекторов  $\xi, \eta \in V^*$ , то квадратичная форма  $q(v) = \xi(v)\eta(v)$  тождественно зануляется на векторном пространстве  $V$ . Но тогда и оба сомножителя  $\xi, \eta$  должны быть нулевыми. Противоречие.

Упр. 4.12. Ответ:  $\binom{n+d}{d} - 1$ .

Упр. 4.13. Пусть  $a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1$ ,  $b = \lambda e_0 + \mu e_1$ , где  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{k}$  фиксированы, а отношение  $(\lambda : \mu)$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ . Тогда произведение  $ab = \lambda(\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1) + \mu(\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1)$  пробегает в  $\mathbb{P}(S^2 U)$  прямую, проходящую через точки  $\alpha_0 e_0^2 + \alpha_1 e_0 e_1$  и  $\alpha_1 e_1^2 + \alpha_0 e_0 e_1$ .

Упр. 5.2. Строим перекрёстную ось  $\ell$ , соединяющую точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ , и берём в качестве  $\varphi(x)$  точку пересечения прямой  $\ell_2$  с прямой, соединяющей точки  $b_1$  и  $\ell \cap (x, b_2)$ .

Упр. 5.3. Зафиксируем не проходящую через  $p_1, p_2$  прямую  $\ell$ . Отображения  $\pi_i : p_i^\times \rightarrow \ell$ ,  $i = 1, 2$ , переводящие прямую  $\ell' \in p_i^\times$  в точку  $\ell \cap \ell'$ , являются гомографиями, поскольку для любого базиса  $a, b$  прямой  $\ell$  переводят линейную форму  $\xi \in V^*$ , задающую прямую  $\ell'$ , в точку с однородными координатами  $(\xi(b) : -\xi(a))$ , линейно зависящими от  $\xi$ . Отображение  $\gamma : \ell \rightarrow \ell$ , являющееся композицией проекции  $p_1 : \ell \rightarrow C$  прямой  $\ell$  на конику  $C$  из точки  $p_1$  и проекции  $p_2 : C \rightarrow \ell$  коники  $C$  на прямую  $\ell$  из точки  $p_2$ , биективно и, согласно форм. (4-10) на стр. 47, задаётся в однородных координатах многочленами. По теор. 5.2 на стр. 57 оно является гомографией. Отображение  $C : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  является композицией  $\pi_2^{-1} \gamma \pi_1$ .

Упр. 5.4. При замене однородных координат все определители в правой части 5-6 на стр. 62 умножатся на определитель матрицы замены координат, что не поменяет правой дроби, ну а средняя дробь всегда равна правой в силу вычисления, предворявшего формулу 5-6. Последнее утверждение проверяется выкладкой

$$\frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \cdot \frac{(b, d)}{\det(b, c)} = \frac{\det(a, b + \gamma a)}{\det(a, b + \delta a)} \cdot \frac{(b, b + \delta a)}{\det(b, b + \gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 5.6. См. решение упр. 5.3

Упр. 5.7. Преобразование, переставляющее изотропные точки на проходящей через  $s$  прямой, это отражение в ортогональной гиперплоскости  $s^\perp$  к анизотропному вектору  $s \notin C$ , ср. с прим. 4.7 на стр. 46.

Упр. 5.8. Поскольку  $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$ , двойное отношение  $[a, b, c, d] = -1$ . Наоборот, если  $[a, b, c, d] = -1$ , то отображение, переводящее точку  $x \in \ell$  в единственную такую точку  $y \in \ell$ , что  $[x, y, c, d] = -1$ , является инволютивной гомографией и действует на  $a, b, c, d$  также, как  $\sigma_{c,d}$ .

Упр. 5.9. См. предл. 7.1.

Упр. 6.3. Возьмём произвольную точку  $p_0 \in Q$  и любую не проходящую через  $p_0$  гиперплоскость  $\Pi \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ , пересекающую  $Q$  по гладкой квадрике  $Q' = \Pi \cap Q$  (убедитесь, что при  $n \geq 2$  это возможно<sup>1</sup>). Выберем на  $Q'$  линейно независимые точки  $p_1, \dots, p_n$  и проведём через  $p_0$  прямую, пересекающую гиперплоскость  $\Pi$  вне квадрики  $Q'$  и  $n + 1$  плоскостей размерности  $n - 2$ , высекаемых из  $\Pi$  касательной гиперплоскостью  $T_{p_0} Q$  и  $n$  гиперплоскостями, натянутыми на

<sup>1</sup>См. предл. 6.4 на стр. 76.

точку  $p_0$  и все точки  $p_i$ , без какой-нибудь одной<sup>1</sup>. Эта прямая пересечёт квадрику  $Q$  в точке  $p_{n+1}$ , которая не лежит в одной гиперплоскости ни с какими  $n$  из точек  $p_0, \dots, p_n$ .

Упр. 6.4. Построим поляры<sup>2</sup> каких-нибудь двух точек  $a, b$ , лежащих на данной прямой  $\ell$  вне очерчиваемого окружностью круга. Точка их пересечения будет полюсом прямой  $(ab)$ . Поляра лежащей внутри круга точки — это прямая, проходящая через полюса произвольной пары прямых, пересекающихся в этой точке.

Упр. 6.5. Пересечение квадрики  $Q$  с прямой  $(cd)$  задаётся в однородных координатах  $(x_0 : x_1)$  относительно базиса  $c, d$  квадратичной формой  $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$ , поляризация которой

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)).$$

Условие сопряжённости  $\tilde{q}(a, b) = 0$  означает, что  $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ , т. е.  $[a, b, c, d] = -1$ .

Упр. 6.7. Если прямая  $\ell \subset Q$  не проходит через  $s$ , то порождённая прямой  $\ell$  и точкой  $s$  плоскость целиком лежит на квадрике  $Q$  и пересекает плоскость  $\Pi$  по прямой, что невозможно, так как гладкая коника  $Q \cap \Pi$  не содержит прямых.

Упр. 6.8. Базисом пространства  $T_{v \otimes \xi}$  являются операторы  $v \otimes \xi, u \otimes \xi$  и  $v \otimes \eta$ , где  $u \in U$  и  $\eta \in U^*$  суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные  $v$  и  $\xi$  соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору  $w \in \text{Ann } \xi$  даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный  $v$ . Поскольку операторы  $F : U \rightarrow U$  со свойством  $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$  тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с  $T_{v \otimes \xi}$ .

Упр. 6.11. Над  $\mathbb{C}$  устойчивый ответ — две, над  $\mathbb{R}$  — две или ни одной. При специальном расположении четырёх заданных прямых их могут пересекать ровно одна или бесконечно много прямых. Рассмотрите множество всех прямых, пересекающих первые три данные прямые, и выясните, как эта квадрика взаимодействует с четвёртой данной прямой.

Упр. 7.1. В доказательстве лем. 7.2 на стр. 85 мы видели, что коники, касающиеся прямой  $\ell$  в точке  $p \in \ell$ , образуют в пространстве коник  $\mathbb{P}_5$  подпространство коразмерности 2. Оно пересекается с двумя гиперплоскостями коник, проходящих через точки  $c, d$  по крайней мере по прямой. Если бы пересечение имело размерность хотя бы два, то через любые две точки на  $\mathbb{P}_2$  проходила бы коника, одновременно содержащая точки  $c, d$  и касающаяся прямой  $\ell$  в точке  $p$ , что не так: возьмём одну из точек на прямой  $(cd)$ , а другую — вне  $(cd) \cup \ell$ . Описание особых коник в этом пучке очевидно.

Упр. 7.2. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники, проходящие через точки  $a, b, c, d$ , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника  $abcd$ .

Упр. 7.4. По предл. 5.2 на стр. 59 коника  $C(\ell, L)$  распадается в объединение прямой  $\ell' = (s_L t_L)$  и ещё одной прямой если и только если гомография  $ts^{-1} : s_L^\times \simeq t_L^\times$  переводит прямую  $\ell'$  в

<sup>1</sup>Это можно сделать, поскольку произведение квадратичной формы, задающей квадрику  $Q'$ , и  $n + 1$  линейных форм, задающих гиперплоскости, является ненулевым многочленом от однородных координат в гиперплоскости  $\Pi$  и над бесконечным полем не может тождественно обращаться в нуль во всех точках этой гиперплоскости.

<sup>2</sup>См. рис. 5♦13 на стр. 68.

себя. Последнее означает, что в пучке  $L$  имеется коника  $C$ , относительно которой прямая  $\ell'$  одновременно является полярой и точки  $s$  и точки  $t$ . Но такое возможно только если  $C = \ell \cup \ell'$ , а в этом случае  $\ell$  проходит через особую точку  $\ell \cap \ell'$  коники  $C$ .

Упр. 7.6. Пучок распавшихся коник, являющихся объединением прямой, пробегающей пучок прямых, проходящих через некоторую точку  $p$ , и ещё одной прямой, не проходящей через  $p$ .

Упр. 8.1. Стандартный базис векторного пространства  $\mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{C}$  состоит из тех же самых векторов  $e_1 = (1, 0)$  и  $e_2 = (0, 1)$ , лежащих в  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ , что и базис векторного пространства  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{R}$ . Симметричная комплексно билинейная форма на  $\mathbb{C}^2$ , продолжающая евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^2$ , однозначно определяется тем, что имеет в этом базисе единичную матрицу Грама.

Упр. 8.2. Пусть  $a, b \in \ell_\infty$  и диаметры  $(ca)$ ,  $(cb)$  сопряжены. Тогда точки  $a, b$  сопряжены относительно  $C$ , т. е.  $a$  лежит на поляре точки  $b$ . Поскольку  $b$  лежит на поляре  $z_*$ , точка  $z_*$  тоже лежит на поляре  $b$ . Следовательно, диаметр  $(ca)$  является полярой точки  $b$ , и любая проходящая через  $b$  прямая  $\ell$  пересекает прямую  $(ca)$  по сопряжённой с  $b$  точке, которая по предл. 6.1 на стр. 70 является серединой отрезка, высекаемого коникой на прямой  $\ell$ .

Упр. 8.3. Это вытекает из сл. 7.2 на стр. 91, но без труда проверяется и прямым вычислением.

Упр. 8.4. Это частный случай сл. 6.1 на стр. 71.

Упр. 8.9. Поляра любой точки  $w \in \ell_\infty$  проходит через полюс  $y_*$  прямой  $\ell_\infty$ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую  $\ell \ni w$  по такой точке  $u$ , что сопряжённые относительно  $P$  точки  $u, w$  гармоничны точкам пересечения  $\ell \cap P$ , т. е.  $u$  является серединой хорды  $\ell \cap P$ .

Упр. 8.10. Прямая  $(f\iota_+)$ , где  $f = (1 : t : 0) = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$ , касается параболы если и только если матрица Грама векторов  $f, \iota_+$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at & ia \\ ia & -1 \end{pmatrix}$$

вырождена, откуда  $t = a/2$ . Полярное преобразование переводит вектор  $f = (1 : a/2 : 0)$  в прямую, однородное уравнение которой имеет коэффициенты

$$(1 : a/2 : 0) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (a^2/2 : a : 0) = (a/2 : 1 : 0).$$

Упр. 9.1. Если отображение  $D_{\varphi,p} : V \rightarrow V, \overline{p\bar{q}} \mapsto \overline{\varphi(p)\varphi(q)}$ , линейно для какой-нибудь точки  $p \in \mathbb{A}(V)$ , то для любой точки  $r \in \mathbb{A}(V)$  и любого вектора  $\overline{r\bar{q}} = \overline{p\bar{r}} - \overline{p\bar{q}} \in V$  выполняется равенство

$$D_{\varphi,p}(\overline{r\bar{q}}) = D_{\varphi,p}(\overline{p\bar{r}}) - D_{\varphi,p}(\overline{p\bar{q}}) = \overline{\varphi(p)\varphi(r)} - \overline{\varphi(p)\varphi(q)} = \overline{\varphi(r)\varphi(q)},$$

т. е. вектор  $\overline{\varphi(r)\varphi(q)} \in V$  линейно зависит от вектора  $\overline{r\bar{q}} \in V$ , причём эта зависимость не зависит от выбора начальной точки  $r \in \mathbb{A}(V)$ . Утверждение про дифференциал композиции очевидно:

$$\overline{\varphi\psi(p)\varphi\psi(q)} = D_{\varphi}(\overline{\psi(p)\psi(q)}) = D_{\varphi} \circ D_{\psi}(\overline{p\bar{q}}).$$

Упр. 9.2. Отображение  $D : \text{Aff}(V) \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $\varphi \mapsto D_\varphi$ , является сюръективным гомоморфизмом групп. Подгруппа сдвигов совпадает с его ядром. Поэтому она нормальна. Ограничение гомоморфизма  $D$  на стабилизатор произвольной точки  $p \in \mathbb{A}(V)$  изоморфно отображает  $\text{Stab}_{\text{Aff}(V)}(p)$  на  $\text{GL}(V)$ , так как никакой сдвиг кроме тождественного не оставляет точку  $p$  на месте. Отсюда всё следует.

Упр. 9.3. Модифицируйте решение упр. 6.3 на стр. 69.

Упр. 9.5. Если  $\dim \text{Sing } \bar{Q} = 0$ , то  $Q$  является конусом или цилиндром если и только если эта особая точка, соответственно, конечна или бесконечна. Если же  $\dim \text{Sing } \bar{Q} \geq 1$ , то проективное подпространство  $\text{Sing } \bar{L}$  всегда пересекается с гиперплоскостью  $L_\infty$ .

Упр. 9.6. Среди пространств вида  $\mathbb{R}^m \times S^{n-m}$ , где  $0 \leq m \leq n$ , несвязным является только  $\mathbb{R}^n \times S^0 = \mathbb{R}^m \sqcup \mathbb{R}^m$ .

Упр. 10.1. Согласно определениям правых корреляций и двойственного отображения, для всех  $u \in U$  и  $w \in W$  имеем:  $(u, \varepsilon_U^{-1} f^* \varepsilon_W w) = f^* \varepsilon_W w(u) = \varepsilon_W w(fu) = (fu, w)$ .

Упр. 10.2. Это вытекает из равенства  $(u, f^\times w) = (fu, w)$ , выполненного для всех  $u \in U$ ,  $w \in W$ .

Упр. 10.4.  $(u+v, u+v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$ ,  $(f(u+v), f(u+v)) = (fu, fu) + 2(fu, fv) + o(|u|)$ .

Упр. 10.5. Так как оператор  $ff^\times$  самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный такой самосопряжённый оператор  $s$  с положительными собственными значениями, что  $s^2 = ff^\times$ . Тогда  $f = sr$ , где  $r = s^{-1}f$  ортогонален, поскольку  $r^\times r = f^\times s^{-2} f = f^\times (ff^\times)^{-1} f = \text{Id}_V$ .

Упр. 10.7. Поскольку произведение двух компактов компактно, а функция  $\arccos$  непрерывна, функция  $\varphi = \arccos(u, w)$  достигает минимума на декартовом произведении единичных сфер в  $U_i$  и  $W_i$ .

Упр. 10.8. Пусть  $|u| = 1$ . Для любого вектора  $w \in W$  длины  $|w| = 1$  согласно предл. 1.4 на стр. 12 выполняется равенство  $\cos \angle(u, w) = (u, w) = (u_W, w)$ . В силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца  $(u_W, w) \leq |u_W| = \cos \angle(u, W)$ , где равенство достигается если и только если  $u_W = \lambda w$  для некоторого  $\lambda \geq 0$ , т. е. либо когда  $\lambda = u_W = 0$ , и в этом случае оно имеет место для всех  $w$ , либо когда  $u_W \neq 0$  и  $w$  сонаправлен с  $u_W$ .

Упр. 10.10. Пусть многочлены  $g, h \in \mathbb{K}[t]$  таковы, что  $g(F) = h(F) = f(F)$ . Тогда многочлен  $g - h$  аннулирует  $F$  и, стало быть, делится на минимальный многочлен оператора  $F$ .

Упр. 11.1. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$(\mu + \nu)^{-1}(\mu p + \nu q) = (\mu + \nu)^{-1} \left( \sum_i \mu_i p_i + \sum_j \nu_j q_j \right).$$

Второе — выкладкой

$$\sum_{i=1}^m y_i p_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} q_{ij} = \sum_{ij} z_{ij} q_{ij},$$

где  $z_{ij} = y_i x_{ij}$  и

$$\sum_{ij} z_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i = 1.$$

<sup>1</sup>Так как  $s$  и  $s^2$  диагонализуются в одном базисе, оператор  $s$  обязан действовать на каждом собственном подпространстве  $V_\lambda$  оператора  $s^2$  умножением на положительный  $\sqrt{\lambda}$ .

Упр. 11.7. Четырёхгранный конус в  $\mathbb{R}^3$ , порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами  $v_1$  и  $v_3$ .

Упр. 11.8. Конус  $-\sigma_{R^r}^\vee = \{v \in V \mid \forall \psi \in \sigma_{R^r} \langle \psi, v \rangle \leq 0\}$ . Для любых  $v \in \sigma_R$  и  $\psi \in \sigma_R^\vee$  неравенство  $\langle \psi, v \rangle \leq 0$  равносильно равенству  $\langle \psi, v \rangle = 0$ . Поэтому  $\sigma \cap -\sigma_{R^r}^\vee = \sigma \cap H_\Gamma = \Gamma$ .

Упр. 11.9. Если  $w = e_0 + v \in M$ , то  $\bar{a}_i(w) = a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$  при всех  $i$ , поэтому  $w \in \bar{M}$ , а с ним и  $[0, w) \subset \bar{M}$ . Наоборот, если  $w = \lambda e_0 + v \in \bar{M}$ , то при  $\lambda \neq 0$  из неравенств  $\bar{a}_i(w) = \lambda a_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$  вытекает, что точка  $[0, w) \cap U_\xi = \lambda^{-1}w = e_0 + \lambda^{-1}v \in M$ , а при  $\lambda = 0$  луч  $[0, v) \subset V$  является пределом при  $s \rightarrow +\infty$  пересекающих многогранник  $M$  лучей  $[0, w_s)$ , где  $w_s = w + sv$ , поскольку при всех  $s \geq 0$  точка  $w_s = w + sv \in M$ , коль скоро  $w \in M$  и  $\alpha_i(v) \geq 0$  при всех  $i$ , а луч  $[0, w_s)$  имеет при каждом  $s > 0$  ненулевой направляющий вектор  $v_s = s^{-1}w + v$ , стремящийся к  $v$  при  $s \rightarrow \infty$ . Для доказательства эквивалентности свойств (1)–(3) заметим, что если  $\alpha_i(v) < 0$  хотя бы для одного функционала  $\alpha_i$ , то для всех  $p \in \mathbb{A}(V)$  при всех  $\lambda \gg 0$  выполняется неравенство  $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) < 0$ , и ни одно из свойств (1)–(3) не имеет места. Напротив, если  $\alpha_i(v) \geq 0$  для всех  $i$ , то для любой точки  $p \in M$  при всех  $\lambda \geq 0$  выполняются неравенства  $a_i(p + \lambda v) = a_i(p) + \lambda \alpha_i(v) \geq a_i(p) \geq 0$ , а с ними и каждое из свойств (1)–(3).

Упр. 12.1. При  $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$  нормальные векторы  $e_i - e_j$  и  $e_k - e_m$  зеркал  $H_{ij}$  и  $H_{km}$  имеют нулевое скалярно произведение. Во втором случае нормальные векторы  $e_i - e_j$ ,  $e_j - e_k$ ,  $e_k - e_i$  зеркал  $H_{ij}$ ,  $H_{jk}$ ,  $H_{ki}$  являются сторонами правильного треугольника на двумерной евклидовой аффинной плоскости, проходящей через концы векторов  $e_i$ ,  $e_j$ ,  $e_k$ .

Упр. 12.2. Симплекс  $e$  описывается в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнением  $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$  и неравенствами  $1 \geq x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ . Согласно теор. 11.5 на стр. 143, его гиперграни высекаются гиперплоскостями  $x_{i-1} = x_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ .

Упр. 13.2. Пусть квадрики  $Q = V(q)$  и  $F = V(f)$  пересекают гиперплоскость  $\Pi = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  по одной и той же квадрике  $G = V(g) = Q \cap \Pi = F \cap \Pi$ . Поскольку при  $\xi = 0$  обе квадратичные формы  $q, f$  превращаются в квадратичную форму  $g$ , они имеют вид  $q = g + \xi\psi$ ,  $f = g + \xi\varphi$  для некоторых линейных форм  $\psi, \varphi$ . Но тогда ограничения форм  $q, f$  на гиперплоскость  $\text{Ann}(\psi - \varphi)$ , на которой  $\psi = \varphi$ , тоже совпадают друг с другом.

Упр. 13.3. Первое утверждение очевидно из 13-7 на стр. 163, второе вытекает из лем. 7.1 на стр. 83: простой конус и двойная плоскость имеют в любом пучке кратности  $\geq 1$  и  $\geq n$  соответственно, поэтому никаких других особых квадратик в рассматриваемом пучке больше нет.

Упр. 13.5. Первое проверяется прямым вычислением, второе вытекает из сл. 13.2 на стр. 170: инверсия  $\sigma$  относительно  $S$  переводит инверсные относительно  $Q$  точки  $c$  и  $c'$  в точки  $\infty$  и  $\sigma(c')$  инверсные относительно  $Q'$ .

Упр. 13.7. Группа движений пространства  $\mathbb{R}^n$ , переводящих каждую из фигур  $\Phi, \Psi$  в себя, транзитивно действует на пересечении  $\Phi \cap \Psi$  и переводит касательные пространства в касательные пространства, сохраняя углы.

Упр. 13.8. Первое утверждение вытекает прямо из определения инверсии и гомотетии. Второе утверждение очевидно из того, что гиперплоскость, в которую переходит сфера, проходящая через центр инверсии, параллельна касательному пространству к сфере в центре инверсии.

Упр. 13.9. По правилу дифференцирования дробей, производная от отображения (13-15)

$$p \mapsto c + \frac{r^2(p-c)}{(p-c, p-c)}$$

действует на касательный вектор  $w \in \mathbb{R}^n$  по правилу

$$\begin{aligned} w \mapsto \frac{r^2}{(p-c, p-c)^2} (w(p-c, p-c) - 2(p-c, w)(p-c)) = \\ = \frac{r^2}{(p-c, p-c)} \left( w - 2 \frac{(p-c, w)}{(p-c, p-c)} (p-c) \right) \end{aligned}$$

(ср. с упр. 10.4 на стр. 124 и н° 2.2 на стр. 18).

Упр. 13.10. На рис. 13♦17 на стр. 171 проекция прямой  $(a'b')$  на прямую  $(a''b'')$  из точки  $p$  сохраняет двойные отношения. Обозначим через  $e$  и  $f$  точки пересечения прямой  $(a'b')$  соответственно с прямой  $(pg) = (pq)$  и с касательной гиперплоскостью к сфере в точке  $p$ . Тогда  $[\infty, q, a'', b''] = [e, f, a', b'] = -1$ , поскольку точки  $e$  и  $f$  сопряжены относительно сферы  $S(r, c)$ . Таким образом, точка  $g$  спроектируется из  $p$  в середину отрезка  $[a, b]$ .

Упр. 14.3. Первое следует из того, что векторы  $p_1 + p_2$  и  $p_1 - p_2$ , ортогональные векторным подпространствам, проективизациями которых являются медиаторы, ортогональны (при условии, что  $(p_1, p_1) = (p_2, p_2) = 1$ ). Второе — из того, что одновременное выполнение равенств  $(p_1, q) = (p_2, q)$  и  $(p_1, q) = -(p_2, q)$  означает, что  $(p_1, q) = (p_2, q) = 0$ .

Упр. 14.4. Пусть  $p \notin U_e$ . Выберем последовательность Коши  $u : \mathbb{N} \rightarrow U_e$ , сходящуюся к  $p$ . Поскольку  $g$  сохраняет расстояния, последовательность  $g \circ u = \bar{h} \circ u$  также является последовательностью Коши и сходится в  $\mathbb{P}_n$ . В силу непрерывности отображений  $g$  и  $\bar{h}$  получаем  $g(p) = g(\lim u_n) = \lim g(u_n) = \lim \bar{h}(u_n) = \bar{h}(\lim u_n) = \bar{h}(p)$ .

Упр. 14.5. Пусть  $h(e_i) = \alpha f$ , где  $(f, f) = 1$ , и пусть  $p = e + e_i$ . Тогда  $h(p) = e + \alpha f$  и

$$\begin{aligned} \cos^2 |e, p| &= (e, p)^2 / (p, p) = 1/2 \\ \cos^2 |e, g(p)| &= (e, e + \alpha f)^2 / (e + \alpha f, e + \alpha f) = 1 / (1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Поскольку преобразование  $g$  изометрическое,  $\alpha^2 = 1$ . Поэтому  $(h(e_i), h(e_i)) = \alpha^2(f, f) = 1$ .

Упр. 14.6. Пусть  $g = \lambda f$ . Т.к.  $(v, v) = (gv, gv) = \lambda^2(fv, fv) = \lambda^2(v, v)$ , коэффициент  $\lambda = \pm 1$ .

Упр. 14.9. Согласно форм. (14-13) на стр. 184 для вектора  $w = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  значение

$$\omega_w(e_0, \dots, \hat{e}_v, \dots, e_n) = (-1)^v x_v.$$

Упр. 15.1. Можно считать, что  $u \neq w$ . В силу выпуклости сферического конуса  $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$  вектор  $u + w \in G_+$ , т.е. имеет  $(u + w, u + w) > 0$ . Так как векторы  $u + w$  и  $u - w$  ортогональны и порождают гиперболическую плоскость, скалярный квадрат  $(u - w, u - w) < 0$ . Поэтому  $2(u, w) > (u, u) + (w, w) \geq 0$ .

Упр. 15.3. Дифференцируя по  $t$  равенство  $1 = (w(t), w(t))$ , получаем  $0 = 2(w(t), \dot{w}(t))$ , ср. с упр. 10.4 на стр. 124.

Упр. 15.4. Без ограничения общности можно считать, что  $p_1 = e_1$ , а  $p_2 = e_1 \operatorname{ch} \ell + e_2 \operatorname{sh} \ell$ , где  $\ell = |p_1, p_2|$  — гиперболическое расстояние, как на рис. 15♦2 на стр. 190. Площадь искомого

криволинейного треугольника равна разности площади прямоугольного треугольника с гипотенузой  $[0, p_2]$  и катетами  $\operatorname{ch} \ell, \operatorname{sh} \ell$ , которая равна  $\operatorname{sh} \ell \operatorname{ch} \ell / 2$ , и площади под дугой гиперболы  $x_1^2 - x_2^2 = 1$  над отрезком  $[1, \operatorname{ch} \ell]$  оси  $[0x_1]$ . Эта дуга параметризуется по форм. (15-7) на стр. 190:  $x_1 = \operatorname{ch} t, x_2 = \operatorname{sh} t$ , где  $t \in [0, \ell]$ , и площадь под нею равна

$$\int_1^{\operatorname{ch} \ell} x_2 dx_1 = \int_0^{\ell} \operatorname{sh} t d \operatorname{ch} t = \int_0^{\ell} \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \ell \operatorname{ch} \ell - \ell),$$

ибо первообразная  $\int \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t)$ . Тем самым,  $S = \ell/2$ .

Упр. 15.5. В силу выпуклости сферического конуса  $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$  вектор  $u + w \in G_+$  имеет  $(u + w, u + w) > 0$ . Так как векторы  $u + w$  и  $u - w$  ортогональны и порождают гиперболическую плоскость, скалярный квадрат  $(u - w, u - w) < 0$ .

Упр. 15.6. Если точка  $q$  принадлежит зеркалу отражения, переставляющего точки  $p_1$  и  $p_2$ , то  $|p_1, q| = |p_2, q|$ , откуда  $q \in (p_1^+ - p_2^+)^{\perp}$ . С другой стороны, отражение  $\sigma_{p_1^+ - p_2^+}$  переводит векторы  $p_1^+$  и  $p_2^+$  друг в друга.

Упр. 15.8. Квадрика  $S_p$  проходит через базисное множество  $P_p \cap G$  пучка  $P_p - \lambda G$ , а каждая проходящая через особую точку  $p$  квадрики  $S_{(p,p)}$  прямая либо больше нигде не пересекает эту квадрику, либо лежит на ней целиком. Поэтому квадрика  $S_{(p,p)}$  является линейным соединением точки  $p$  и неособой квадрики  $P_p \cap G$  в дополнительной к точке  $p$  гиперплоскости  $p^{\perp}$  (ср. с доказательством теор. 4.1 на стр. 45).

Упр. 15.10. Из гиперболической теоремы косинусов<sup>1</sup> для прямоугольного  $\Delta acb$  вытекают равенства  $\operatorname{ch} |a, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |c, b| - \operatorname{sh} |a, b| \cdot \operatorname{sh} |c, b| \cdot \cos \beta$  и  $\operatorname{ch} |a, b| = \operatorname{ch} |a, c| \cdot \operatorname{ch} |c, b|$ . Подставляя второе из них в первое, заключаем, что  $\operatorname{ch} |a, c| = \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b| / \operatorname{sh} |c, b|$ , откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |a, c|}} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} |a, c| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b|}{\operatorname{sh} |c, b|} = \cos \beta$$

(последнее равенство вытекает из теоремы синусов<sup>2</sup> для  $\Delta acb$ ).

Упр. 15.11. Если обозначить через  $w'$  параллельную проекцию точки  $w$  на сферу  $S^n$ , а через  $\alpha$  — угол между единичными векторами  $w'$  и  $e_0$ , то  $\varrho = \sin \alpha$ , а  $\varrho_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , откуда сразу следуют обе формулы.

<sup>1</sup>См. формулу (15-12) на стр. 193.

<sup>2</sup>См. формулу (15-14) на стр. 193.