

## §8. Конформная геометрия вещественных коник

**8.1. Комплексная проективизация вещественной плоскости.** Рассмотрим вещественную координатную плоскость  $V = \mathbb{R}^2$  со стандартными координатами  $(x_1, x_2)$  как множество вещественных точек комплексной координатной плоскости  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ , вложенной в качестве стандартной аффинной карты  $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$  в комплексную проективную плоскость  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$ . Бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  этой карты обозначим через  $\ell_{\infty}$  и будем называть *бесконечностью*. Она естественно отождествляется с проективизацией  $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ , и её точки являются *направлениями*<sup>1</sup> лежащих в карте  $U_0$  аффинных прямых в том смысле, что проходящая через точку  $p \in U_0$  вдоль вектора  $v \in V_{\mathbb{C}}$  аффинная прямая  $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$  является видимой в карте  $U_0$  аффинной частью проективной прямой  $(pv) \subset \mathbb{P}_2$ , где  $v \in V$  рассматривается как точка бесконечно удалённой прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ .

На комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  имеется  $\mathbb{C}$ -антилинейная<sup>2</sup> инволюция *комплексного сопряжения*  $\sigma : (x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$ . Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники и сохраняет стандартную аффинную карту  $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ , действуя на ней комплексно полуаффинным<sup>3</sup> вещественно аффинным преобразованием. Точки, прямые и коники, которые переводятся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая  $x_0 = 0$  и коника  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  вещественны. Обратите внимание, что вещественная фигура запросто может не иметь ни одной вещественной точки.

Поскольку линейное уравнение, задающее прямую, и квадратичное уравнение, задающее гладкую конику, однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число определяются этими геометрическими фигурами, вещественность прямой или коники означает, что каждый коэффициент  $a$  её уравнения удовлетворяют соотношению  $a = \lambda \bar{a}$  с одним и тем же для всех коэффициентов  $a$  ненулевым множителем  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Так как  $|\bar{a}_i| = |a_i|$ , мы заключаем, что  $|\lambda| = 1$ . Полагая  $\lambda = \vartheta^2$ , видим, что  $\vartheta a_i \in \mathbb{R}$ . Таким образом, вещественность прямой или коники на  $\mathbb{P}_2$  равносильна тому, что в стандартных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  эти фигуры можно задать уравнениями с вещественными коэффициентами.

**8.1.1. Конформная структура.** Евклидово скалярное произведение на  $V = \mathbb{R}^2$ , рассматриваемое с точностью до умножения на ненулевую константу, называется *конформной структурой* на вещественной плоскости  $V$ . Конформная структура не позволяет определить длину вектора, но позволяет определить угол  $\vartheta = \angle(u, w) \in [0, \pi/2]$  между прямыми с направляющими векторами  $u, w \in V$  по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|(u, w)|}{\sqrt{(u, u)(w, w)}}, \quad (8-1)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее слово *направление* используется как синоним словосочетания «ненулевой вектор из пространства  $V_{\mathbb{C}}$ , рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы» и означает точку на прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ .

<sup>2</sup>Т. е.  $\sigma(u + w) = \sigma(u) + \sigma(w)$  для всех  $u, w \in \mathbb{C}^3$ , но  $\sigma(zv) = \bar{z}\sigma(v)$  для всех  $z \in \mathbb{C}$  и  $v \in \mathbb{C}^3$ .

<sup>3</sup>Напомню, что отображение  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. При  $\dim V \geq 2$  любое полуаффинное отображение  $f : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  действует по правилу  $x \mapsto f(a) + df(\bar{a}x)$ , где  $a \in \mathbb{A}(V)$  — произвольно выбранная «начальная» точка, а  $df : V \rightarrow V$  — *полулинейный* оператор, удовлетворяющий для всех  $u, w \in V$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  равенству  $df(\lambda u + \mu w) = \varphi(\lambda) df(u) + \varphi(\mu) df(w)$ , где  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  — некоторый автоморфизм основного поля. Подробнее об этом см. в лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/1617/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_02.pdf), раздел 2.5 на стр. 29.

правая часть которой не меняется ни при замене скалярного произведения на пропорциональное, ни при умножении векторов на ненулевые константы. Геометрически, это наименьший из двух смежных углов между прямыми, параллельными векторам  $u$  и  $w$ .

С токи зрения комплексной проективной плоскости  $\mathbb{P}_2$  конформная структура представляет собою гладкую вещественную квадрику  $I = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid (v, v) = 0\}$  на бесконечно удалённой прямой  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ , где  $(*, *) : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  означает продолжение евклидова скалярного произведения на  $V$  до комплексной билинейной формы на  $V_{\mathbb{C}}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Убедитесь, что такое продолжение существует и единственно.

Поскольку евклидово скалярное произведение анизотропно над  $\mathbb{R}$ , квадрика  $I$  не имеет вещественных точек и состоит из двух различных комплексно сопряжённых точек. Мы будем называть квадрику  $I$  *абсолют* конформной структуры. Всюду далее мы предполагаем, что стандартный базис в  $\mathbb{R}^2$  является ортонормальным для евклидова скалярного произведения. В этом случае абсолют  $I$  задаётся в стандартных однородных координатах  $(x_1 : x_2)$  на  $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$  уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  и состоит из двух точек

$$\iota_+ = (i : 1) = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (-i : 1) = (1 : i), \quad (8-2)$$

которые мы будем называть *абсолютными направлениями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1 (ЕВКЛИДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ)

Сопоставление направлению  $v$  евклидово перпендикулярного направления  $v^{\perp}$  задаёт на прямой  $\ell_{\infty}$  комплексно линейную инволюцию с неподвижными точками  $\iota_{\pm}$ , которая называется *перпендикулярностью*. Таким образом, равенство  $(u, w) = 0$  в  $V_{\mathbb{C}}$  равносильно гармоничности направлений  $u, w \in \ell_{\infty}$  абсолютным направлениям (8-2).

ПРИМЕР 8.1 (УГОЛ КАК ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ)

Любые два вещественных направления  $u, w \in \ell_{\infty}$  однозначно записываются в виде

$$u = \iota_+ + \lambda \iota_-, \quad w = \iota_+ + \mu \iota_-$$

с ненулевыми  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Так как  $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$ , а  $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$ , угол  $\vartheta = \angle(u, w)$  согласно формуле (8-1) удовлетворяет соотношению

$$\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Поскольку  $\mu/\lambda = [u, w, \iota_+, \iota_-]$  по упр. 5.4 на стр. 61, и для вещественных  $u, w$

$$\overline{[u, w, \iota_+, \iota_-]} = [\bar{u}, \bar{w}, \bar{\iota}_+, \bar{\iota}_-] = [u, w, \iota_-, \iota_+] = [u, w, \iota_+, \iota_-]^{-1},$$

мы заключаем, что двойное отношение  $[u, w, \iota_+, \iota_-] \in \mathbb{C}$  лежит на единичной окружности и равно  $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu/\lambda = e^{2i\vartheta}$ . Таким образом, евклидов угол  $\vartheta \in [0, \pi/2]$  между вещественными направлениями  $u, w \in \ell_{\infty}$  равен половине абсолютной величины аргумента их двойного отношения с абсолютными направлениями:  $\vartheta = \frac{1}{2} |\text{Arg}[u, w, \iota_+, \iota_-]| = \frac{1}{2} |i \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]|$ .

**8.2. Гладкие непустые вещественные коники.** Гладкая непустая вещественная коника  $C \subset \mathbb{P}_2$  называется *параболой*, если она касается прямой  $\ell_\infty$ , и называется *гиперболой* или *эллипсом*, если она пересекает прямую  $\ell_\infty$  по двум различным, соответственно, вещественным или комплексно сопряжённым друг другу точкам. Точки пересечения  $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$  называются *асимптотическими направлениями* коники  $C$ . Таким образом, парабола имеет ровно одно, автоматически вещественное асимптотическое направление, которое также называют *направлением оси параболы*. Это же направление является полюсом прямой  $\ell_\infty$  относительно параболы, см. рис. 8◊1. Гипербола имеет два различных вещественных асимптотических направления, а эллипс — два различных комплексно сопряжённых друг другу асимптотических направления, см. рис. 8◊2.

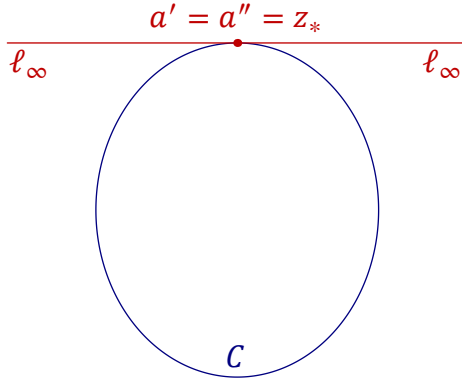


Рис. 8◊1. Парабола.

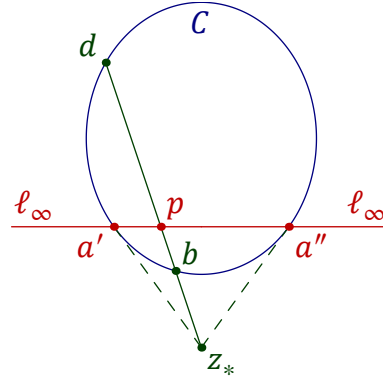


Рис. 8◊2. Центральная коника.

Полюс  $z_*$  прямой  $\ell_\infty$  относительно не являющейся параболой коники  $C$  называется *центром* коники  $C$ . Он лежит в евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  и является центром симметрии аффинной части коники, так как по предл. 6.1 на стр. 69 на любой проходящей через  $z_*$  прямой, пересекающей конику  $C$  в точках  $b, d$ , а прямую  $\ell_\infty$  — в точке  $p$ , двойное отношение  $[p, z_*, b, d] = -1$ , т. е.  $z_*$  является серединой отрезка  $[b, d]$  в аффинной карте, где  $p = \infty$ . По этой причине эллипсы и гиперболы в совокупности называются *центрными кониками*. Проходящие через центр прямые называются *диаметрами* центральной коники  $C$ . Касательные диаметры  $(z_*a')$  и  $(z_*a'')$ , идущие из центра в асимптотических направлениях, называются *асимптотами*. Гипербола имеет вещественные асимптоты, эллипс — невещественные комплексно сопряжённые.

**Упражнение 8.2.** Покажите, что любой диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные<sup>1</sup> сопряжённому диаметру.

Если коника  $C$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе в  $\mathbb{R}^2$  неоднородным уравнением

$$f(x_1, x_2) = \beta_{11}x_1^2 + 2\beta_{12}x_1x_2 + \beta_{22}x_2^2 + 2\beta_{01}x_1 + 2\beta_{02}x_2 + \beta_{00} = 0, \quad (8-3)$$

то её проективное замыкание<sup>2</sup> имеет в однородных координатах  $(x_0 : x_1 : x_2)$  на  $\mathbb{P}_2$  матрицу Грама

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} \\ \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (8-4)$$

<sup>1</sup>По определению, прямые *параллельные* данной  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  суть все прямые из пучка с центром в точке  $\ell \cap \ell_\infty$ , за исключением самих прямых  $\ell$  и  $\ell_\infty$ .

<sup>2</sup>См. п. 4.4.2 на стр. 48.

Невырожденность коники  $C$  означает, что  $\det B \neq 0$ , а непустота — что сигнатура отлична от  $(3, 0)$  и  $(0, 3)$ , т. е. что последовательность знаков главных нижних угловых миноров

$$\Delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{22}, \quad \Delta_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2, \quad \Delta_{012} \stackrel{\text{def}}{=} \det B$$

отлична от  $+++$  и  $+-$ . Асимптотические направления  $\{a', a''\} = C \cap \ell_\infty$  коники  $C$  суть корни однородной квадратной формы от  $(x_1, x_2)$  с матрицей Грама

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \quad (8-5)$$

Гладкая непустая вещественная коника  $C$  является эллипсом, параболой или гиперболой если и только если определитель<sup>1</sup>  $\Delta_{12} = \det B_\infty$ , соответственно, положителен, равен нулю или отрицателен. Однородные координаты полюса  $z_* = (z_0 : z_1 : z_2)$  бесконечно удалённой прямой  $x_0 = 0$  удовлетворяет уравнению  $(z_0 : z_1 : z_2)B = (1 : 0 : 0)$ , т. е. пропорциональны первой строке присоединённой матрицы  $B^\vee$  к матрице Грама  $B$  коники  $C$ :

$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\Delta_{12} : \beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (8-6)$$

Для центральной коники эта формула позволяет найти аффинные координаты центра в карте  $U_0$ :

$$(z_1, z_2) = \left( \frac{\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22}}{\Delta_{12}}, \frac{\beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}}{\Delta_{12}} \right). \quad (8-7)$$

Для параболы  $\Delta_{12} = 0$ , и формула (8-7) даёт координаты направления оси параболы:

$$(x_1 : x_2) = (\beta_{12}\beta_{02} - \beta_{01}\beta_{22} : \beta_{01}\beta_{12} - \beta_{11}\beta_{02}). \quad (8-8)$$

**8.2.1. Окружности.** Сопряжение<sup>2</sup> относительно центральной коники  $C$  задаёт на прямой  $\ell_\infty$  инволюцию, неподвижными точками которой являются асимптотические направления коники  $C$ . Если эта инволюция совпадает с перпендикулярностью<sup>3</sup>, что равносильно совпадению асимптотических направлений коники  $C$  с абсолютными направлениями<sup>4</sup>  $\iota_\pm$ , то коника  $C$  называется *окружностью*. Это определение согласуется со школьным: проективное замыкание «школьной» окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  задаётся на  $\mathbb{P}_2$  однородным уравнением  $(x_1 - c_1 x_0)^2 + (x_2 - c_2 x_0)^2 = r^2 x_0^2$  и пересекает бесконечно удалённую прямую  $x_0 = 0$  в точности по абсолютности  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ; наоборот, выбирая на непустой гладкой вещественной конике  $C$  три неколлинеарных вещественных точки  $p_1, p_2, p_3$ , видим, что если такая коника проходит через точки  $\iota_\pm$ , то она совпадает со «школьной» окружностью, проходящей через точки  $p_1, p_2, p_3$ , поскольку через пять точек проходит ровно одна гладкая коника.

**8.2.2. Главные оси центральной коники.** Если центральная коника  $C$  не является окружностью, то согласно сл. 5.4 на стр. 66 существует ровно два направления  $x_*, y_* \in \ell_\infty$ , одновременно перпендикулярные друг другу и сопряжённые относительно коники  $C$ . Эти направления автоматически различны, поскольку равенство  $x_* = y_*$  означает, что эта точка совпадает с

<sup>1</sup>Противоположный по знаку дискриминанту бинарной квадратичной формы с матрицей Грама  $B_\infty$ , см. прим. 2.1 на стр. 21 и прим. 4.6 на стр. 43.

<sup>2</sup>См. п° 6.1.2 на стр. 69.

<sup>3</sup>См. опр. 8.1 на стр. 94.

<sup>4</sup>См. формулу (8-2) на стр. 94.

одной из точек  $\iota_{\pm}$ , а вещественная коника, проходящая через одну из точек  $\iota_{\pm}$  автоматически проходит и через комплексно сопряжённую ей другую точку, а значит, является окружностью.

Перпендикулярные сопряжённые друг другу относительно  $C$  направления называются *главными осями* коники  $C$ . Их легко найти явно: если  $x_* = (x_1 : x_2)$ , то  $y_* = (-x_2 : x_1)$  в силу перпендикулярности, а сопряжённость относительно  $C$  означает, что

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = b_{12}x_1^2 - (b_{11} - b_{22})x_1x_2 - b_{12}x_2^2, \quad (8-9)$$

откуда

$$x_* = (\beta_{11} - \beta_{22} + \sqrt{D} : 2b_{12}), \quad y_* = (\beta_{11} - \beta_{22} - \sqrt{D} : 2b_{12}), \quad (8-10)$$

где  $D = (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.3. Убедитесь, что  $x_*$  и  $y_*$  являются собственными векторами матрицы  $B_{\infty}$  из формулы (8-5) с собственными числами, соответственно, равными<sup>1</sup>

$$\alpha = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{D}}{2}.$$

Поскольку центр  $z_*$  является полюсом прямой  $\ell_{\infty} = (x_*y_*)$ , треугольник  $\Delta x_*y_*z_*$  автополярен относительно коники  $C$ . Таким образом, матрица Грама коники  $C$  в базисе  $x_*, y_*, z_*$  диагональна, и в аффинном координатном репере карты  $U_0$  с началом в точке  $z_*$  и евклидово перпендикулярными базисными векторами  $x_*$  и  $y_*$  коника  $C$  задаётся неоднородным уравнением вида

$$ax^2 + by^2 = 1$$

где  $a = -f(x_*)/f(z_*)$ ,  $b = -f(y_*)/f(z_*)$ , а  $f(x_1, x_2)$  — исходный неоднородный многочлен (8-3), задающий конику  $C$ .

**8.3. Геометрия центральных коник.** Точка  $f \in \mathbb{P}_2 \setminus \ell_{\infty}$  называется *фокусом* центральной коники  $C \subset \mathbb{P}_2$ , если обе прямые  $(f\iota_+)$  и  $(f\iota_-)$  касаются коники  $C$ . Поляры фокусов относительно коники  $C$  называются *директрисами* этой коники. Таким образом, центральная коника имеет четыре различных фокуса, см. рис. 8◊3 на стр. 98. Комплексное сопряжение переставляет между собою абсолютные направления  $\iota_{\pm}$  и переводит касательные  $\ell_1, \ell_2$ , опущенные на  $C$  из  $\iota_+$ , в касательные  $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2$ , опущенные из  $\iota_- = \bar{\iota}_+$ . Поэтому фокусы  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_1$  и  $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_2$  вещественны, а фокусы  $f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1 \cap \bar{\ell}_2$  и  $f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \ell_2 \cap \bar{\ell}_1$  невещественны и комплексно сопряжены друг другу. Обозначим через  $\Delta x_*y_*z_*$  треугольник, ассоциированный с вписанным в конику  $C$  четырёхвершинником, который образован точками касания с коникой четырёх фокальных касательных, опущенных из точек  $\iota_{\pm}$ . Согласно предл. 7.1 на стр. 86 этот треугольник автополярен относительно коники  $C$ . Поскольку точка  $x_*$  лежит на полярах фокусов  $f_3$  и  $f_4$ , прямая  $(f_3f_4)$  является полярной точки  $x_*$  и, значит, совпадает с прямой  $(y_*z_*)$ . По той же причине прямая  $(f_1f_2)$  совпадает с прямой  $(x_*z_*)$ , а прямая  $(\iota_+\iota_-) = \ell_{\infty}$  — с прямой  $(x_*y_*)$ , см. рис. 8◊3. Таким образом, прямые  $(f_1f_2)$  и  $(f_3f_4)$  пересекаются в центре  $z_*$  коники  $C$  и пересекают бесконечность в точках  $x_* = \ell_{\infty} \cap (f_1f_2)$  и  $y_* = \ell_{\infty} \cap (f_2f_3)$ , которые являются главными осями коники  $C$ , ибо

<sup>1</sup>Эти числа суть корни характеристического многочлена  $\lambda^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})\lambda + \Delta_{12}$  матрицы  $B_{\infty}$ . Обратите внимание, что он имеет тот же дискриминант  $D = (b_{11} - b_{22})^2 + b_{12}^2$ , что и многочлен (8-9).

$[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$ , так как в пучке прямых с центром в фокусе  $f_1$  касательные прямые  $(f_1 l_+)$  и  $(f_1 l_-)$  гармоничны сопряжённым относительно  $C$  прямым  $(f_1 x_*)$  и  $(f_1, y_*)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.4. Покажите, что две прямые на  $\mathbb{P}_2$  тогда и только тогда сопряжены<sup>1</sup> относительно гладкой коники, когда они гармоничны в порождённом ими пучке прямых<sup>2</sup> двум прямым, касающимся этой коники.

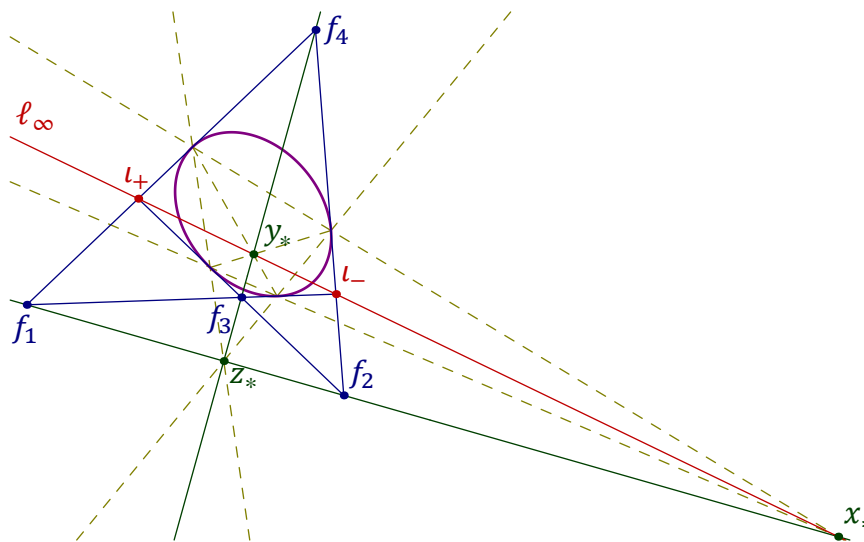


Рис. 8◊3. Фокусы, директрисы и главные оси центральной коники.

УПРАЖНЕНИЕ 8.5. Покажите, что пересекающиеся в точке  $y_*$  пунктирные прямые на рис. 8◊3 проходят через фокусы  $f_1$  и  $f_2$ .

ПРИМЕР 8.2

Центр и главные оси центральной коники, заданной аффинным уравнением

$$ax^2 + by^2 = 1, \quad \text{где } a > 0, \quad (8-11)$$

имеют однородные координаты  $z_* = (1 : 0 : 0)$ ,  $x_* = (0 : 1 : 0)$ ,  $y_* = (0 : 0 : 1)$ . Точка  $f = z_* + tx_* \in (z_* x_*)$  является фокусом если и только если ограничение однородного уравнения коники на прямую  $(f l_+)$  вырождено. Это ограничение имеет в базисе  $f, l_+$  матрицу Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 - 1 & iat \\ iat & b - a \end{pmatrix}$$

с определителем  $abt^2 + b - a$ , который зануляется при  $t = \pm\sqrt{a^{-1} - b^{-1}}$ . Таким образом, два лежащих на оси  $(z_* x_*)$  фокуса коники (8-11) имеют аффинные координаты  $(\pm\sqrt{a^{-1} - b^{-1}}, 0)$ . Симметричным образом, два лежащих на перпендикулярной оси  $(z_* y_*)$  фокуса имеют аффинные координаты  $(0, \pm\sqrt{b^{-1} - a^{-1}})$ . При  $b > a$  или  $b < 0$  первые два фокуса вещественны, а вторые — чисто мнимы и комплексно сопряжены, при  $0 < b < a$  всё наоборот. При  $b < 0$

<sup>1</sup>Напомним, что это означает, что каждая из них проходит через полюс другой, см. н° 6.1.2 на стр. 69.

<sup>2</sup>Т. е. в пучке прямых с центром в точке пересечения этих двух прямых.

коника (8-11) является гиперболой, при  $0 < b < a$  и  $b > a$  — эллипсом. При  $a = b$  коника превращается в окружность и все четыре фокуса сливаются с её центром. У эллипса и гиперболы, заданных на евклидовой плоскости своими стандартными аффинными уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вещественные фокусы располагаются так, как показано на рис. 8◊4 и рис. 8◊5.

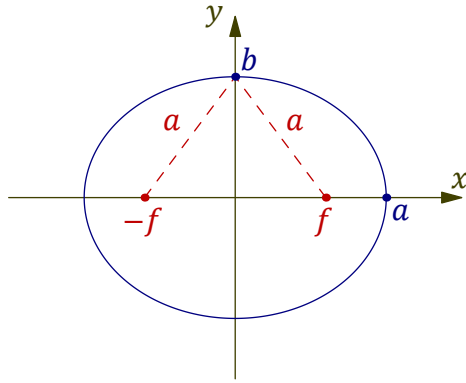


Рис. 8◊4. Вещественные фокусы эллипса.

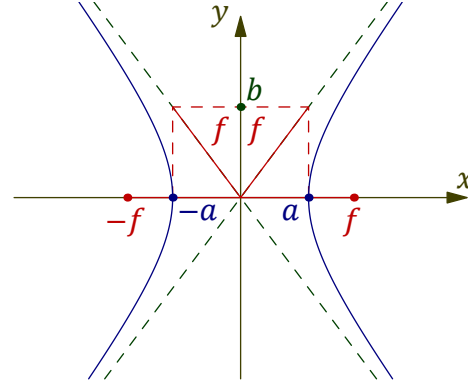


Рис. 8◊5. Вещественные фокусы гиперболы.

**8.3.1. Директор центральной коники.** Сопряжение относительно центральной коники  $C$  задаёт гомографию  $\delta_C: \iota_+^{\times} \simeq \iota_-^{\times}$  между пучками прямых с центрами в точках  $\iota_{\pm}$ . Она переводит прямую  $\ell \ni \iota_+$  в сопряжённую ей относительно  $C$  прямую  $\delta_C(\ell) \ni \iota_-$ , см. рис. 8◊6.

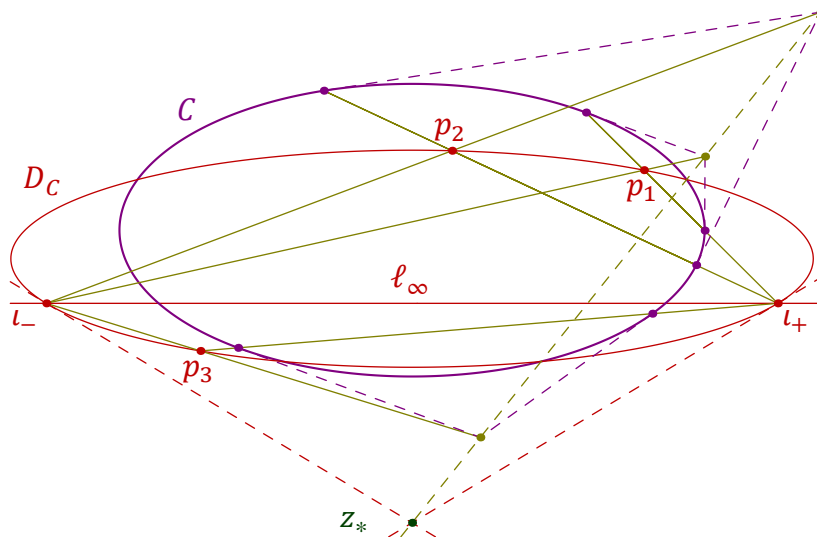


Рис. 8◊6. Директор центральной коники.

В пучке прямых с центром в каждой точке пересечения соответственных прямых<sup>1</sup>  $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$  пара сопряжённых прямых  $\ell$  и  $\delta_C(\ell)$  гармонична по упр. 8.4 паре касательных, опущенных из

<sup>1</sup>На рис. 8◊6 показаны три такие точки:  $p_1, p_2$  и  $p_3$ .



точки  $p$  на конику  $C$ . Следовательно, эти касательные перпендикулярны. Таким образом, ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \delta_C(\ell)$  это в точности ГМТ  $p \in \mathbb{P}_2$ , из которых коника  $C$  видна под прямым углом. Согласно предл. 5.2 на стр. 58, ГМТ пересечения соответственных прямых неперспективной гомографии между двумя пучками прямых является гладкой коникой, проходящей через центры пучков, как на рис. 8◊6. Поскольку в нашем случае центрами пучков служат точки  $\iota_{\pm}$ , эта коника — окружность. Она называется *директором* центральной коники  $C$  и обозначается  $D_C$ . В доказательстве предл. 5.2 мы видели, что  $\delta_C(\ell_{\infty}) = T_{\iota_-}D_C$  и  $\delta_C(T_{\iota_+}D_C) = \ell_{\infty}$ . Поэтому обе пары прямых  $\ell_{\infty}, T_{\iota_+}D_C$  и  $\ell_{\infty}, T_{\iota_-}D_C$  гармоничны касательным, опущенным на конику  $C$  из точек  $\iota_{\pm}$ . Тем самым, прямая  $\ell_{\infty}$  сопряжена относительно коники  $C$  обоим касательным к окружности  $D_C$  в точках  $\iota_{\pm}$ . Следовательно, эти касательные пересекаются в полюсе  $z_*$  прямой  $\ell_{\infty}$  относительно коники  $C$ , т. е. у директора тот же центр, что у  $C$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.6. Напишите явное уравнение директора  $D_C$  в главных осях коники  $C$ .

**8.3.2. Софокусные семейства центральных коник.** Гладкие вещественные коники с теми же самыми фокусами<sup>1</sup>, что и заданная гладкая центральная коника  $C$ , лежат в семействе комплексных коник на  $\mathbb{P}_2$ , касающихся фиксированных четырёх прямых — опущенных из точек  $\iota_{\pm}$  на конику  $C$  касательных, см. рис. 8◊3 на стр. 98. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в  $\mathbb{P}_2^{\times}$  образуют простой пучок  $F$  коник, проходящих через четыре точки, двойственные прямым

$$(\iota_+f_1) = (\iota_+f_4), \quad (\iota_+f_2) = (\iota_+f_3), \quad (\iota_-f_2) = (\iota_-f_4), \quad (\iota_-f_1) = (\iota_-f_3). \quad (8-12)$$

Три распавшиеся коники этого пучка суть объединения пар прямых, изображающих пучки прямых на  $\mathbb{P}_2$ , с центрами в точках  $\iota_{\pm}, f_{1,2}$  и  $f_{3,4}$ :

$$\iota_+^{\times} \cup \iota_-^{\times}, \quad f_1^{\times} \cup f_2^{\times}, \quad f_3^{\times} \cup f_4^{\times}. \quad (8-13)$$

Для любой точки  $p \in \mathbb{P}_2$  на пучке проходящих через  $p$  прямых, понимаемом как прямая  $p^{\times} \subset \mathbb{P}_2^{\times}$ , имеется задаваемая пучком  $F$  инволюция Дезарга<sup>2</sup>  $\sigma_F: p^{\times} \rightarrow p^{\times}$ , которая переставляет между собою проходящие через  $p$  прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  тогда и только тогда, когда эти прямые касаются некоторой софокусной с  $C$  коники  $Q$ . Прямая  $\ell \ni p$  является неподвижной точкой инволюции  $\sigma_F$  если и только если она касается некоторой софокусной с  $C$  коники в точке  $p$ . Поскольку инволютивная гомография над полем  $\mathbb{C}$  имеет ровно две различные неподвижные точки<sup>3</sup>, через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусных с  $C$  коники  $C'_p, C''_p$ . Касательные к этим коникам прямые  $\ell' = T_p C'_p$  и  $\ell'' = T_p C''_p$ , будучи неподвижными точками инволюции Дезарга, гармоничны любой паре прямых, переставляемых этой инволюцией. Пересекая прямую  $p^{\times} \subset \mathbb{P}_2^{\times}$  с тремя распавшимися кониками (8-13) из пучка  $F$ , мы видим, что  $\sigma_F$  переставляет между собою пары прямых

$$(pf_+) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_-), \quad (pf_1) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_2), \quad (pf_3) \overset{\sigma_C}{\leftrightarrow} (pf_4).$$

Это приводит к равенству  $[\ell', \ell'', (pf_+), (pf_-)] = -1$ , означающему, что неподвижные прямые  $\ell'$  и  $\ell''$  перпендикулярны<sup>4</sup>. Тем самым, две проходящие через  $p$  софокусные с  $C$  коники пересекаются в точке  $p$  под прямым углом, как на рис. 8◊7. Так как инволюция Дезарга сохраняет двойные

<sup>1</sup>Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

<sup>2</sup>См. прим. 7.1 на стр. 86.

<sup>3</sup>См. прим. 5.6 на стр. 65.

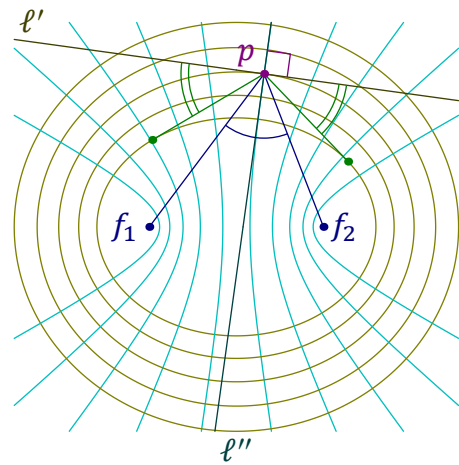
<sup>4</sup>См. опр. 8.1 на стр. 94.



отношения,

$$[\ell', (pf_1), (p\iota_+), (p\iota_-)] = [\ell', (pf_2), (p\iota_-), (p\iota_+)] = \overline{[\ell', (pf_2), (p\iota_+), (p\iota_-)]},$$

т. е. острые углы, которые прямая  $\ell'$  образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  равны друг другу в силу [прим. 8.1](#) на [стр. 94](#). По той же причине равны друг другу и острые углы, которые образует с прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$  прямая  $\ell''$ , а также острые углы, которые каждая из прямых  $\ell'$ ,  $\ell''$  образует с касательными, опущенными из точки  $p$  на любую софокусную с  $C$  конику. Иначе говоря, перпендикулярные касательные  $\ell'$ ,  $\ell''$  к двум проходящим через  $p$  софокусным с  $C$  коникам являются биссектрисами углов между прямыми  $(pf_1)$  и  $(pf_2)$ , соединяющими точку  $p$  с вещественными фокусами, а также биссектрисами углов между двумя касательными прямыми, опущенными из  $p$  на любую не проходящую через  $p$  софокусную с  $C$  конику, см. [рис. 8◊7](#). Эти факты известны как *фокальные свойства геометрической оптики*.



**Рис. 8◊7.** Софокусные центральные коники.

#### Предложение 8.1

Для любых точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с вещественными фокусами  $f_1, f_2$  угол между прямой  $(pf_1)$  и опущенной из  $p$  на  $C$  касательной равен углу между второй касательной и прямой  $(pf_2)$ .  $\square$

#### Предложение 8.2

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус.  $\square$

#### Пример 8.3

Если центральная коника  $C$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  задаётся каноническим уравнением  $ax^2 + by^2 = 1$ , то двойственная ей коника  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  имеет однородное уравнение<sup>1</sup>  $-x_0^2 + a^{-1}x_1^2 + b^{-1}x_2^2 = 0$ , а распавшаяся коника  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  — уравнение  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Натянутый на них пучок коник на  $\mathbb{P}_2^\times$  задаётся уравнением  $-x_0^2 + (a^{-1} + \lambda) \cdot x_1^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot x_2^2 = 0$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Двойственные им коники софокусной с  $C$  системы коник на  $\mathbb{P}_2$  имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = 1.$$

**Упражнение 8.7.** Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник софокусной системы одна является эллипсом, а другая — гиперболой.

**8.3.3. Гипербола Аполлония.** Для произвольных точки  $p$  и гладкой центральной коники  $C$  с центром в точке  $z_*$  обозначим через  $\varphi : z_*^\times \simeq p^\times$  гомографию пучка диаметров коники  $C$  в пучок прямых с центром в  $p$ , переводящую диаметр  $\ell \ni z_*$  в опущенный из точки  $p$  перпендикуляр  $\ell_p$  на сопряжённый к  $\ell$  относительно коники  $C$  диаметр  $\ell' \ni z_*$ , см. [рис. 8◊8](#).

**Упражнение 8.8.** Убедитесь, что это и впрямь гомография.

<sup>1</sup>См. [предл. 6.2](#) на [стр. 70](#).

Согласно предл. 5.2 на стр. 58, ГМТ пересечения соответственных прямых  $\ell \cap \ell_p$  является коникой  $H$ , проходящей через центр коники  $C$  и точку  $p$ . Поскольку гомография  $\varphi$  переводит главные направления  $(z_*x_*)$  и  $(z_*y_*)$  в прямые  $(px_*)$  и  $(py_*)$  соответственно, коника  $H$  является гиперболой с асимптотами, параллельными главным осям коники  $C$ . Она называется *гиперболой Аполлония* точки  $p$  относительно коники  $C$  и замечательна тем, что пересекает конику  $C$  ровно по таким точкам  $a \in C$ , для которых прямая  $(pa)$  перпендикулярна касательной  $T_a C$  к конике  $C$  в точке  $a$ , поскольку сопряжённый к  $\ell$  диаметр  $\ell'$  параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра  $\ell$ , см. рис. 8◊8.

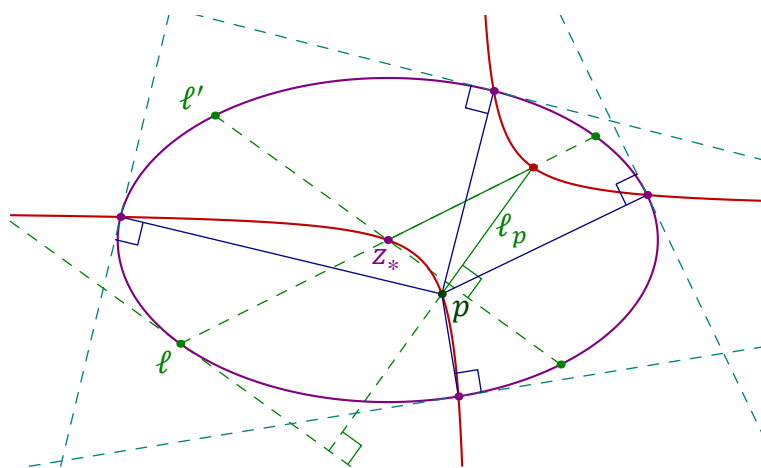


Рис. 8◊8. Гипербола Аполлония точки  $p$  относительно эллипса.

В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки  $p$  на гладкую центральную конику  $C$  можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

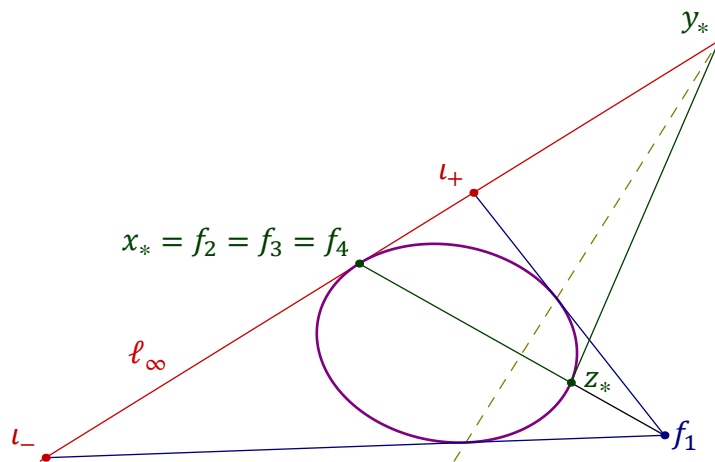


Рис. 8◊9. Фокус, директриса и ось параболы.

**8.4. Геометрия парабол.** Парабола  $P$ , касающаяся бесконечности в точке  $x_* = \ell_\infty \cap P$ , может рассматриваться как предельное положение центральной коники, которую сдвинули так, что её центр слился с тремя фокусами  $f_2, f_3, f_4$  в одну точку  $x_* \in \ell_\infty$  — направление оси<sup>1</sup> параболы  $P$ , см. рис. 8◊9. Директрисы фокусов  $f_2, f_3, f_4$  при этом тоже сливаются друг с другом

<sup>1</sup>См. рис. 8◊2 на стр. 95.

и превращаются в прямую  $\ell_\infty$ . Единственный оставшийся конечный фокус  $f = f_1$  называется *фокусом*, а его поляра — *директрисой* параболы  $P$ . Конечная точка пересечения параболы с прямой  $(x_* f)$  обозначается через  $z_*$  и называется *вершиной* параболы. Все они автоматически вещественны. Точки  $x_*$  и  $y_* = T_c P \cap \ell_\infty$  называются *главными осями* параболы  $P$ . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 8♦9, второе выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в  $f_1$  сопряжённые относительно коники  $C$  направления  $x_*$ ,  $y_*$  гармоничны абсолютным касательным направлениям.

**Упражнение 8.9.** Покажите, что середины хорд, высекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

Так как анизотропный вектор  $y_*$  сопряжён относительно  $P$  обеим точкам  $x_*$ ,  $z_*$ , и обе они изотропны, однородное уравнение параболы в базисе  $x_*$ ,  $y_*$ ,  $z_*$  записывается в виде  $y^2 = 2axz$ , где  $a > 0$ . В аффинном репере карты  $U_0$  с началом в  $z_*$  и евклидово перпендикулярными осями координат  $x_*$ ,  $y_*$  это уравнение преобразуется в неоднородное уравнение  $y^2 = 2ax$ .

**Упражнение 8.10.** Убедитесь, что фокус такой параболы находится в точке  $(a/2, 0)$ , а директриса задаётся уравнением  $x = -a/2$ .

**Пример 8.4 (отыскание вершины параболы)**

Определим тип коники  $C$ , заданной в ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнением  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ . Матрица Грама её проективного замыкания

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

По форм. (8-6) на стр. 96 полюс бесконечно удалённой прямой  $\ell_\infty$  находится в точке

$$x_* = \left( \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} : -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = (0 : -2 : -1) \in \ell_\infty.$$

Тем самым, коника является параболой. Её ось параллельна вектору  $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ , т. е. проходит через изотропную точку  $x_* = (0 : 2 : 1) \in \ell_\infty$ , и является полярой евклидово перпендикулярной к  $x_*$  точки  $y_* = (0 : -1 : 2) \in \ell_\infty$ , т. е. задаётся уравнением  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$  с коэффициентами  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = (0 : -1 : 2)B = (-8 : -5 : 10)$ . Вершина  $z_*$  параболы  $C$  является второй, отличной от  $x_*$ , изотропной точкой квадратичной формы  $B$  на оси и может быть получена отражением точки  $x_*$  в  $B$ -ортогонале к любой лежащей на оси анизотропной точке. Беря в качестве таковой  $a = (5, -8, 0)$ , находим  $(5, -8, 0)B = (-1, 2, 1)$ , откуда

$$\beta(a, x_*) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \beta(a, a) = (-1, 2, 1) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -21,$$

$$z_* = \sigma_a(x_*) = x_* - 2 \frac{\beta(a, x_*)}{\beta(a, a)} a = (0, 2, 1) + \frac{10}{21} (5, -8, 0) = (50 : -38 : 21),$$

где через  $\beta$  обозначено скалярное произведение с матрицей Грама  $B$ . Таким образом, вершина параболы имеет аффинные координаты  $(-19/25, 21/50)$ .

Пример 8.5 (вырождение директора в директрису)

Задаваемая сопряжением прямых относительно коники гомография  $\delta_p : \iota_+^\times \simeq \iota_-^\times$  из н° 8.3.1 на стр. 99 для параболы является перспективой, поскольку прямая  $\ell_\infty$ , соединяющая центры пучков, самосопряжена. Согласно предл. 5.2 на стр. 58, коника, задающая перспективную гомографию пучков, распадается в прямую, соединяющую центры пучков, и прямую, проходящую через точки пересечений как-нибудь двух пар соответственных прямых из пучков. Таковыми являются точки  $\tau_+$  и  $\tau_-$  пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 8◊10. Следовательно ГМТ пересечения сопряжённых относительно параболы прямых, проходящих через точки  $\iota_\pm$ , которое, как мы видели в н° 8.3.1, одновременно является ГМТ, из которых параболу видно под прямым углом, есть не что иное как директриса параболы.

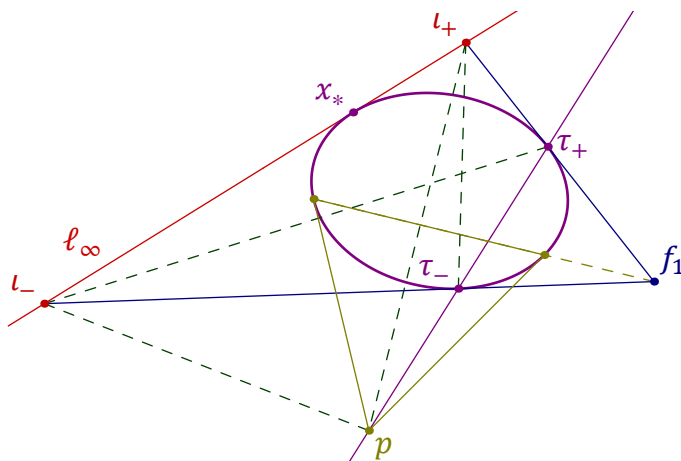


Рис. 8◊10. Директор параболы совпадает с её директрисой.

Следствие 8.1

Касательные к параболе, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс  $p$  любой фокальной хорды сопряжён фокусу параболы, он лежит на директрисе параболы, см. рис. 8◊10.  $\square$

**8.4.1. Софокусные параболы.** Параболы называются *софокусными*, если у них один и тот же фокус  $f$  и параллельные оси<sup>1</sup>. Семейство парабол, софокусных заданной параболы  $P$ , состоит из всех коник, вписанных в треугольник  $f\iota_-\iota_+$  и касающихся его стороны  $\ell_\infty = (\iota_-\iota_+)$  в фиксированной точке  $x_*$ . Двойственные им коники образуют в  $\mathbb{P}_2^\times$  пучок с тремя базисными точками<sup>2</sup> — сторонами треугольника  $f_1\iota_-\iota_+$ . Он порождён двумя распавшимися кониками — объединением пучков  $x_*^\times \cup f^\times$  с особой точкой, двойственной оси параболы, и объединением пучков  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$  с особой точкой  $\ell_\infty^\times$ , которая лежит на прямой  $x_*^\times$  и в которой все коники пучка касаются этой прямой. Всё сказанное в н° 8.3.2 для софокусных центральных коник дословно сохраняет силу и для софокусных парабол: через любую точку  $p \in \mathbb{P}_2$  проходят ровно две софокусные параболы, касательные к которым в точке  $p$  перпендикулярны друг другу и являются биссектрисами углов между прямой  $(pf)$  и проходящей через  $p$  прямой, параллельной оси параболы, а также углов между двумя касательными, опущенными из  $p$  на произвольную не проходящую через  $p$  софокусную с  $P$  параболу. Мы получаем следующие *фокальные свойства параболы*.

<sup>1</sup>Т. е. один и тот же «бесконечно удалённый фокус»  $x_*$ .

<sup>2</sup>См. рис. 7◊4 на стр. 85.

## Предложение 8.3

Для любой точки  $p$  угол между касательной, опущенной из  $p$  на параболу  $P$ , и прямой  $(pf)$ , ведущей из  $p$  в фокус параболы, равен углу между второй касательной и осью параболы.  $\square$

## Предложение 8.4

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы.  $\square$

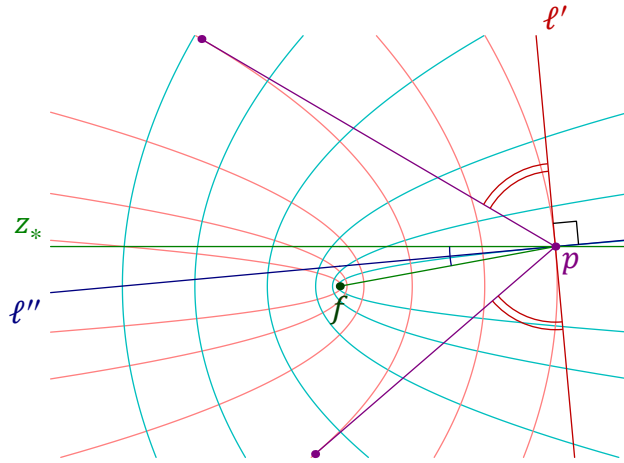


Рис. 8◊11. Софокусные параболы.

## Пример 8.6

Если парабола  $P$  задаётся в стандартном ортонормальном базисе евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  каноническим уравнением  $y^2 = 2ax$ , то двойственная ей коника  $P^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  имеет однородное уравнение  $2a^{-1}x_0x_1 - x_2^2 = 0$  и порождает вместе с задаваемой уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  распавшейся коникой  $\iota_+^\times \cup \iota_-^\times$  пучок коник  $(1 + \lambda)x_2^2 + 2a^{-1}x_0x_1 + \lambda x_1^2 = 0$  на  $\mathbb{P}_2^\times$ . Двойственные им софокусные с  $P$  параболы на  $\mathbb{P}_2$  имеют однородные уравнения  $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$  и аффинные уравнения  $y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda)$ .

**8.4.2. Гипербола Аполлония** из н° 8.3.3 существует и для параболы (убедитесь в этом!). Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы  $x_* = \ell_\infty \cap P$  является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте  $U_0$  находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 8.1. Стандартный базис векторного пространства  $\mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{C}$  состоит из тех же самых векторов  $e_1 = (1, 0)$  и  $e_2 = (0, 1)$ , лежащих в  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ , что и базис векторного пространства  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$  над полем  $\mathbb{R}$ . Симметричная комплексно билинейная форма на  $\mathbb{C}^2$ , продолжающая евклидово скалярное произведение на  $\mathbb{R}^2$ , однозначно определяется тем, что имеет в этом базисе единичную матрицу Грама.

Упр. 8.2. Пусть  $a, b \in \ell_\infty$  и диаметры  $(ca)$ ,  $(cb)$  сопряжены. Тогда точки  $a, b$  сопряжены относительно  $C$ , т. е.  $a$  лежит на поляре точки  $b$ . Поскольку  $b$  лежит на поляре  $z_*$ , точка  $z_*$  тоже лежит на поляре  $b$ . Следовательно, диаметр  $(ca)$  является полярной точки  $b$ , и любая проходящая через  $b$  прямая  $\ell$  пересекает прямую  $(ca)$  по сопряжённой с  $b$  точке, которая по предл. 6.1 на стр. 69 является серединой отрезка, высекаемого коникой на прямой  $\ell$ .

Упр. 8.3. Это вытекает из сл. 7.2 на стр. 90, но без труда проверяется и прямым вычислением.

Упр. 8.4. Это частный случай сл. 6.1 на стр. 70.

Упр. 8.9. Поляра любой точки  $w \in \ell_\infty$  проходит через полюс  $u_*$  прямой  $\ell_\infty$ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую  $\ell \ni w$  по такой точке  $u$ , что сопряжённые относительно  $P$  точки  $u, w$  гармоничны точкам пересечения  $\ell \cap P$ , т. е.  $u$  является серединой хорды  $\ell \cap P$ .

Упр. 8.10. Прямая  $(f\iota_+)$ , где  $f = (1 : t : 0) = z_* + tx_* \in (z_*x_*)$ , касается параболы если и только если матрица Грама векторов  $f, \iota_+$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at & ia \\ ia & -1 \end{pmatrix}$$

вырождена, откуда  $t = a/2$ . Полярное преобразование переводит вектор  $f = (1 : a/2 : 0)$  в прямую, однородное уравнение которой имеет коэффициенты

$$(1 : a/2 : 0) \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (a^2/2 : a : 0) = (a/2 : 1 : 0).$$