## §3. Кососимметричные формы и грассмановы многочлены

**3.1. Симплектические пространства.** Согласно теореме Дарбу[1], каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству $\Bbbk^{2n}$, на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{3-1}$$

как в прим. 1.3 на стр. 7. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать $\Omega_{2n}$, по аналогии с гиперболическими пространствами $H_{2n}$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \dotplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

**3.1.1. Симплектическая группа.** Изометрии $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\sim} \Omega_{2n}$ называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$, называемую *симплектической группой* пространства $\Omega_{2n}$. Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \mid F^t \cdot J \cdot F = J\}.$$

Если записать такую матрицу $F$ в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk),$$

то условие $F^t \cdot J \cdot F = J$ приобретёт вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений $C^tA = A^tC$, $D^tB = B^tD$, $E + C^tB = A^tD$, из которых видно, что полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.2. Проверьте все эти утверждения прямыми вычислениями.

**3.1.2. Лагранжевы подпространства.** Изотропные подпространства максимальной возможной размерности $n$ в симплектическом пространстве $\Omega_{2n}$ называются *лагранжевыми*. Прямым аналогом предл. 2.1 на стр. 14 является следующий факт.

Предложение 3.1
Каждое изотропное подпространство $U$ невырожденной кососимметричной формы $\omega$ на пространстве $V$ содержится в некотором симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim U$, и любой базис в $U$ дополняется до симплектического базиса в $W$.

[1] См. теор. 1.2 на стр. 12.

Доказательство. Выберем в $U$ базис $u_1, u_2, \dots, u_m$, дополним его до базиса в $V$ и рассмотрим двойственный к нему относительно $\omega$ базис. Первые $m$ векторов $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega\left(u_i, u_j^\vee\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{3-2}$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ любой линейной комбинации векторов $u_i$. Заменяя каждый вектор $u_j^\vee$ вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{\nu<j} \omega\left(u_j^\vee, u_\nu^\vee\right) \cdot u_\nu\,, \tag{3-3}$$

получаем набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m$, также удовлетворяющий равенствам (3-2), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0\,.$$

Таким образом, векторы $u_i$ и $w_j$ с $1 \leqslant i, j \leqslant m$ составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве $W$. □

Теорема 3.1

Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ найдётся такое лагранжево подпространство $L' \subset V$, что $V = L \oplus L'$. При этом каждый базис $\boldsymbol{e}$ подпространства $L$ однозначно достраивается некоторым базисом $\boldsymbol{e}'$ подпространства $L'$ до симплектического базиса пространства $V$. При фиксированном $L'$ все дополнительные к $L$ лагранжевы подпространства $L''$ биективно соответствуют линейным операторам $f : L' \to L$, удовлетворяющим равенству[1]

$$\omega(u_1, fu_2) = -\omega(fu_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'\,.$$

Доказательство. Согласно предл. 3.1 базис $\boldsymbol{e}$ подпространства $L$ достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем $L$ симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2\dim L = \dim V$. Поэтому $W = V$ и в качестве $L'$ можно взять линейную оболочку последних $n = \dim L$ векторов получающегося таким образом симплектического базиса в $V$. Индуцированное правой корреляцией $\omega^\wedge : V \to V^*$ отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \to L^*\,,\; v \mapsto \omega(*, v)|_L\,, \tag{3-4}$$

переводящее вектор $v \in L'$ в линейную форму $u \mapsto \omega(u, v)$ на подпространстве $L \subset V$, является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис $\boldsymbol{e}'$ подпространства $L'$, дополняющий базис $\boldsymbol{e}$ в $L$ до симплектического базиса в $V$, в двойственный к $\boldsymbol{e}$ базис $\boldsymbol{e}^*$ пространства $L^*$.

Упражнение 3.3. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис $\boldsymbol{e}'$ в $L'$ однозначно восстанавливается по $\boldsymbol{e}$ как прообраз двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса в $L^*$ при независящем от выбора базиса изоморфизме (3-4).

[1] Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* или *антиавтодуальными* относительно формы $\omega$.

Далее, каждое дополнительное к $L$ подпространство $L'' \subset L' \oplus L$ биективно проектируется на $L'$ вдоль $L$, ибо ядро такой проекции равно $L'' \cap L$. Поэтому для любого вектора $u \in L'$ существует единственный такой вектор $f(u) \in L$, что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L' \to L$, графиком которого является подпространство $L'' \subset L' \oplus L$. Таким образом мы получаем биекцию между линейными отображениями $f : L' \to L$ и подпространствами $L'' \subset L' \oplus L$, которые изоморфно проектируются на $L'$ вдоль $L$.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом.

При этой биекции изотропность подпространства $L''$ в $V$ равносильна антиавтодуальности оператора $f : L' \to L$, графиком которого оно является, ибо

$$\omega\left(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)\right) = \omega\left(u_1, f(u_2)\right) + \omega\left(f(u_1), u_2\right)$$

в силу лагранжевости подпространств $L' \ni u_1, u_2$ и $L \ni f(u_1), f(u_2)$. □

**3.2. Грассмановы многочлены.** Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ *грассмановых многочленов* от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Она определяется точно также, как и обычная алгебра многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные $\xi_i$ не коммутируют, но *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,, \tag{3-5}$$

где символ «$\wedge$» обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, каждый грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Для каждого набора $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ строго возрастающих слева направо номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ имеется грассманов моном

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\,, \tag{3-6}$$

знак которого при перестановке $g \in S_m$ переменных $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_m}$ меняется по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g) \cdot \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_m}\,. \tag{3-7}$$

Мономы (3-6), занумерованные всевозможными подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, составляют базис алгебры $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ как векторного пространства над $\Bbbk$ и перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \varnothing \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \varnothing \end{cases} \tag{3-8}$$

где $\operatorname{sgn}(I, J) = \pm 1$ обозначает знак *тасующей перестановки*, расставляющей в порядке возрастания набор номеров $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k$, в котором $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для дополнительных друг к другу наборов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus I$ знак $\operatorname{sgn}(I, J) = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_m + m(m+1)/2}$.

[1] Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\operatorname{char}\Bbbk = 2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

Единственный моном (3-6) нулевой степени $1 \overset{\text{def}}{=} \xi_\varnothing$, отвечающий пустому подмножеству $I = \varnothing$, является единицей грассмановой алгебры. Единственный моном старшей степени

$$\xi_{\text{top}} \overset{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n$$

аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени $k$ образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (3-6), отвечающие всевозможным $k$-элементным подмножествам $I$. Размерность всей грассмановой алгебры $\dim \Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle = 2^n$.

Два грассмановых монома степеней $m$ и $k$ коммутируют друг с другом по правилу

$$\begin{aligned}\left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right) \wedge \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) &= \\ = (-1)^{km} \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_k}\right) &\wedge \left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_m}\right) ,\end{aligned}$$

ибо при переносе каждой из $k$ переменных $\xi_j$ через $m$ переменных $\xi_i$ происходит $m$ транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов $\eta$ и $\omega$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta \,. \tag{3-9}$$

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 3.6. Опишите *центр*[1] грассмановой алгебры.

**3.3. Грассманова алгебра векторного пространства.** Если в векторном пространстве $V$ выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ от базисных векторов пространства $V$ обозначается $\Lambda V$ и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства $V$. Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грассмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством $V$ и, таким образом, не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грассмановых многочленов степени $k$ является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ из $k$ произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грассмановых многочленов степени $k$ через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры $\Lambda V$ в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V \,,$$

где $\Lambda^0 V \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

Если векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ при помощи некоторой матрицы перехода $C = \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(\Bbbk)$ по формуле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\,C$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \ldots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$\begin{aligned} u_J = u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \ldots \wedge u_{j_m} &= \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\Big) = \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \ldots \wedge w_{i_n} \cdot \sum_{g \in S_m} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \cdots c_{i_{g(n)} j_n} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ} \,, \end{aligned}$$

[1] Т. е. подалгебру, состоящую из всех грассмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m\times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из $J$ и строк с номерами из $I$, а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ из $m$ возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется $IJ$-тым *минором* $m$-того порядка в матрице $C$. Таким образом, $IJ$-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном $u_J$ через грассмановы мономы $w_I$ равен $IJ$-тому минору $m$-того порядка в матрице выражающей векторы $\boldsymbol{u}$ через векторы $\boldsymbol{w}$.

В частности, если наборы векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства $V$, то базисные грассмановы мономы $e_J$ пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы $f_I$ при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции $IJ$ стоит $IJ$-тый минор $\left(c_{IJ}\right)$ матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$, выражающей $\boldsymbol{e}$ через $\boldsymbol{f}$. Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{\boldsymbol{fe}}$ и называется $m$-той *внешней степенью* матрицы $C_{\boldsymbol{fe}}$.

Пример 3.1 (соотношения Лапласа)
Для каждого набора возрастающих индексов $J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ положим

$$\deg J \overset{\text{def}}{=} m\,, \quad |J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \cdots + j_m$$

и условимся обозначать через $\hat{J} = \left(\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$ дополнительный к $J$ набор из $\deg \hat{J} = n - m$ возрастающих индексов.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, столбцы которой, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$, обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда матрица $A$ является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $\Bbbk^n$. Для любых двух мультииндексов $I$, $J$ одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ грассмановы произведения $\alpha_J$ и $\alpha_{\hat{I}}$ имеют дополнительные степени $m$ и $n - m$ и перемножаются по форм. (3-8) на стр. 28, которая с учётом упр. 3.5 имеет вид:

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{3-10}$$

Выражая грассмановы произведения $\alpha_J$ и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (3-10) через базисные мономы $e_K$, получаем

$$\left(\sum_K e_K a_{KJ}\right) \wedge \left(\sum_L e_L a_{L\hat{I}}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

где $K$ пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Поскольку правая часть формулы (3-10) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, для любых двух наборов $J$, $I$ из $m$ строк произвольной квадратной матрицы $A$ выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-11}$$

где суммирование идёт по всем наборам $K$ из $m = \deg K$ строк матрицы $A$.

При $I = J$ соотношение (3-11) даёт формулу для вычисления определителя[1]

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}} \tag{3-12}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём $n$-мерного параллелепипеда через объёмы его $m$-мерных и $(n - m)$-мерных граней.

через всевозможные миноры $a_{KJ}$ порядка $m$, сосредоточенные в $m$ фиксированных столбцах матрицы $A$ с номерами $J$, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n-m$, равные определителям матриц, получающихся из $A$ вычёркиванием всех строк и столбцов, которые высекают минор $a_{KJ}$. Произведение $(-1)^{|K|+|J|}a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору $a_{KJ}$ и обозначается $\hat{a}_{KJ}$ .

При $I \neq J$ соотношение (3-11) имеет вид $\sum_K a_{KJ}\hat{a}_{IK} = 0$ и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку его левая часть отличается от левой части (3-12) тем, что миноры $a_{KJ}$ умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{IK}$ к минорам $a_{IK}$, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все $m$-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества $J$ и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m}\hat{A}^t = \det A \cdot E \tag{3-13}$$

на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, в котором $(IJ)$-тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|}a_{\hat{J}\hat{I}} \,.$$

Упражнение 3.7. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK}\hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-14}$$

Пример 3.2 (определитель пучка матриц)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается $(AB)$. Таким образом, всякая матрица из пучка $(AB)$ имеет вид $t_0A+t_1B$, где $t_0, t_1 \in \Bbbk$, а её определитель $\det(t_0A+t_1B)$ является однородным многочленом степени $n$ от $t_0, t_1$. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ}\hat{b}_{IJ} \,, \tag{3-15}$$

где суммирование идёт по всем $k$-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Для этого обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ столбцы матриц $A$ и $B$, понимаемые как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ со стандартным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1) \wedge (t_0a_2 + t_1b_2) \wedge \dots \wedge (t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \,.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь $k$ из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобках. Если обозначить номера этих $k$ скобок через $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}a_I \wedge b_{\hat{I}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\Big(\sum_J e_J a_{JI}\Big) \wedge \Big(\sum_K e_K b_{K\hat{I}}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|}\sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI}b_{K\hat{I}} = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I|+|J|}a_{JI}b_{\hat{J}\hat{I}}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0 A + t_1 B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам $I$ из $k$ возрастающих номеров, что и даёт формулу (3-15). В обозначениях из (3-13) её можно переписать в виде

$$\det(t_0 A + t_1 B) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{A}^t\right) t_0^k t_1^{n-k}\,, \tag{3-16}$$

Пример 3.3 (грассмановы квадратичные формы)
Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве $V$ над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $V$ может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{3-17}$$

Для этого рассмотрим произвольный базис $\boldsymbol{u}$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \cdots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \overset{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису $\boldsymbol{v}$ из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора $v_2$.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = \left(v_2 - \alpha_3 v_3 - \cdots - \alpha_n v_n\right)/\alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned}\omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \cdots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2)\end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису $\boldsymbol{w}$ из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \cdots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 +$(члены без $w_1$ и $w_2$), после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Замечание 3.1. (поляризация грассмановой квадратичной формы) Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, то каждый однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ можно однозначно выразить через произвольно зафиксированный базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства $V$ в виде

$$\omega = \sum_{ij} \omega_{ij}\, e_i \wedge e_j = \left(\boldsymbol{e}\,\Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t\,, \quad \text{где} \quad \Omega_{\boldsymbol{e}} = \left(\omega_{ij}\right) \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)\,,$$

индексы $i, j$ независимо пробегают все значения от 0 до $n$, а числа $\omega_{ij} \in \Bbbk$ кососимметричны по этим индексам, т. е. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ и $\omega_{ii} = 0$. Таким образом, при $i < j$ число $\omega_{ij}$ равно половине коэффициента при базисном грассмановом мономе $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ в приведённом разложении многочлена $\omega$ по стандартному базису из форм. (3-6) на стр. 28. Кососимметричная матрица $\Omega_{\boldsymbol{e}} = \left(\omega_{ij}\right)$ называется *матрицей Грама* квадратичного грассманова многочлена $\omega$ в базисе $\boldsymbol{e}$. При выборе другого базиса $\boldsymbol{f}$, через который базис $\boldsymbol{e}$ выражается по формуле $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fe}}$, матрица Грамма $\Omega_{\boldsymbol{f}}$ многочлена $\omega$ в базисе $\boldsymbol{f}$ будет связана с матрицей Грама $\Omega_{\boldsymbol{e}}$ соотношением

$$\Omega_{\boldsymbol{e}} = C_{\boldsymbol{fe}} \Omega_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{fe}}^t \tag{3-18}$$

поскольку $\omega = \left(\boldsymbol{e}\,\Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \boldsymbol{e}^t = \left(\boldsymbol{f}\,C_{\boldsymbol{fe}}\Omega_{\boldsymbol{e}}\right) \wedge \left(C_{\boldsymbol{fe}}^t \boldsymbol{f}^t\right) = \left(\boldsymbol{f}\,C_{\boldsymbol{fe}}\Omega_{\boldsymbol{e}}C_{\boldsymbol{fe}}^t\right) \wedge \boldsymbol{f}^t$.

В частности, над полем характеристики $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ результат предыдущего прим. 3.3 можно было бы вывести из теоремы Дарбу[1] о кососимметричных билинейных формах, в доказательстве которой мы видели, что для любой кососимметричной матрицы $\Omega$ существует такая обратимая матрица $C$, что все ненулевые элементы матрицы $C\Omega C^t$ сосредоточены в расположенных на главной диагонали $2\times 2$-блоках вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама $\Omega$ в некотором базисе $\boldsymbol{f}$, в базисе $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}\,C$ записывается как $\omega = 2\,(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots)$, откуда уже совсем легко перейти к виду (3-17).

Предложение 3.2
Над полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в $V$ базис $\boldsymbol{e}$, в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. $\square$

**3.4. Пфаффиан.** Рассмотрим кососимметричную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2n)\times(2n)$. Будем считать её элементы $a_{ij}$ с $i < j$ независимыми коммутирующими переменными и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов от этих переменных с целыми коэффициентами. В этом разделе мы покажем, что существует и единствен такой многочлен $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{Pf}(J') = 1\,,$$

где $J'$ — блочно диагональная матрица из $n$ идущих по главной диагонали $2\times 2$-блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

как в доказательстве теор. 1.2 на стр. 12. Многочлен $\mathrm{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы $A$ и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\cdots\sqcup\{i_n,j_n\}= \\ =\{1,2,\dots,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big)\cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}\,, \tag{3-19}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение $n$ неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, а sgn означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы $S_{2n}$.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (3-19) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2\,, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2\,.$$

[1] См. теор. 1.2 на стр. 12.

Чтобы хоть как-то извлечь квадратный корень из $\det A$, интерпретируем $A$ как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства $K^{2n}$ над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных $a_{ij}$ с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$. Доказывая теор. 1.2 на стр. 12, мы видели, что в $K^{2n}$ есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама $J'$. Поэтому $A = C^t \cdot J' \cdot C$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$. Так как $\det J' = 1$, определитель $\det(A) = \det(C)^2$. Остаётся убедиться, что $\det C$ является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (3-19).

Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу $B = \big(b_{ij}\big)$, наддиагональные элементы $b_{ij}$ которой также будем считать независимыми переменными, и образуем однородный грассманов многочлен $\beta_B(\xi)$ степени 2 от грассмановых переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$ по формуле $\beta_B(\xi) \overset{\text{def}}{=} \big(\xi B\big) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij}\xi_i \wedge \xi_j$. Поскольку чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ лежат в центре грассмановой алгебры, $n$-тая грассманова степень

$$\begin{aligned}
\beta_B(\xi)^{\wedge n} &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \\
&= \Big(\sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}\xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2}\xi_{i_2} \wedge \xi_{j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n}\xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n}\Big) = \\
&= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \operatorname{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big) b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \cdots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\
&= 2^n n! \operatorname{Pf}(B)\, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n},
\end{aligned} \tag{3-20}$$

где в предпоследней строке, как и в формуле (3-19), суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ в объединение $n$ неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существен, и $\operatorname{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ означает тот же самый многочлен, что и в формуле (3-19). Заменим в (3-20) грассмановы переменные $\xi$ на новые грассмановы переменные $\eta$ по формуле $\xi = \eta\, C$, где матрица $C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ такова, что $C^t J' C = A$. В правой части (3-20) получим $2^n n! \operatorname{Pf}(B) \det C\, \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Квадратичная форма $\beta_B(\xi)$ в самой левой части (3-20) превратится в

$$\beta_B(\xi) = (\xi\, B) \wedge \xi^t = (\eta\, CB) \wedge (\eta\, C)^t = (\eta\, CBC^t) \wedge \eta^t = \beta_{CBC^t}(\eta),$$

а её $n$-тая грассманова степень — в $\beta_{CBC^t}(\eta)^{\wedge n} = 2^n n! \operatorname{Pf}(CBC^t) \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Таким образом мы приходим к равенству $\operatorname{Pf}(CBC^t) = \operatorname{Pf}(B) \det C$ в кольце $K[b_{ij}]$. Полагая в этом равенстве $B = J'$, получаем в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ равенство $\operatorname{Pf}(A) = \det C$. Это доказывает существование пфаффина и формулу (3-19). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен

$$x^2 - \det A = \big(x - \operatorname{Pf}(A)\big)\big(x + \operatorname{Pf}(A)\big) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$$

имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm\operatorname{Pf}(A)$, и требование $\operatorname{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует нужный знак.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.6. При чётном $n$ центр алгебры $\Bbbk\langle\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном $n$ — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 3.7. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 3.9. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций). Перестановка между собою элементов из $\nu$-й пары меняет знак $\operatorname{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big)$, но одновременно заменяет матричный элемент $a_{i_\nu j_\nu}$ элементом $a_{j_\nu i_\nu} = -a_{i_\nu j_\nu}$.