§1. Пространство с билинейной формой

1.1. Соглашения и обозначения. Мы рассматриваем конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$. Наборы $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ из векторов $v_j \in V$ удобно воспринимать как матрицы-строки, элементами которых являются векторы. Если векторы из набора $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ линейно выражаются через векторы из набора $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ по формулам $u_j = \sum_i w_i c_{ij} = w_1 c_{1j} + w_2 c_{2j} + \dots + w_m c_{mj}$, где $c_{ij} \in \Bbbk$, то мы записываем это в виде матричного равенства $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C_{\boldsymbol{wu}}$, где $C_{\boldsymbol{wu}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ — матрица высоты m и ширины k, в j-том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора u_j векторам $\boldsymbol{w}$. Мы называем матрицу $C_{\boldsymbol{wu}}$ *матрицей перехода* от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что если набор векторов $\boldsymbol{w}$ выражается через набор векторов $\boldsymbol{v}$ по формуле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\, C_{\boldsymbol{vw}}$, а набор $\boldsymbol{v}$ выражается через набор $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\, C_{\boldsymbol{uv}}$, то $C_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uv}} C_{\boldsymbol{vw}}$.

Если задано линейное отображение $f : U \to W$ между векторными пространствами U и W, и векторы $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ образуют базис в U, а векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ — базис в W, то матрица перехода от векторов $f(\boldsymbol{u}) = \big(f(u_1), f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ к векторам $\boldsymbol{w}$ называется *матрицей отображения* f в базисах $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ и обозначается $F_{\boldsymbol{wu}}$. Её j-тый столбец состоит из координат вектора $f(u_j)$ в базисе $\boldsymbol{w}$. Таким образом, $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$. Вектор $v = \boldsymbol{u}x$ со столбцом координат x в базисе $\boldsymbol{u}$ переводится отображением f в вектор

$$f(v) = f(\boldsymbol{u}x) = f(\boldsymbol{u})\, x = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}\, x$$

со столбцом координат $F_{\boldsymbol{wu}}\, x$ в базисе $\boldsymbol{w}$.

Двойственное к V пространство линейных функций $\varphi : V \to \Bbbk$ обозначается через V^*. Элементы этого пространства также называются *ковекторами*, *линейными формами* или *линейными функционалами* на V. Каждому базису $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V отвечает *двойственный базис* $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ пространства V^*. Линейная функция $e_i^* : V \to \Bbbk$ сопоставляет вектору $v \in V$ его i-тую координату в базисе $\boldsymbol{e}$ и действует на базисные векторы e_j по правилу

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i\,. \end{cases}$$

Упражнение 1.2. Убедитесь, i-тая координата произвольной линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ в базисе $\boldsymbol{e}^*$ равна значению этой функции на базисном векторе e_i, т. е. $\varphi = \sum_i e_i^* \cdot \varphi(e_i)$.

Линейное отображение $V \to V^{**}$, $v \mapsto \mathrm{ev}_v$, сопоставляющее вектору $v \in V$ *функционал вычисления* $\mathrm{ev}_v : V^* \to \Bbbk$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, переводит любой базис $\boldsymbol{e}$ пространства V в двойственный к базису $\boldsymbol{e}^*$ в V^* базис пространства V^{**} и, стало быть, является изоморфизмом.

Для подпространств $U \subset V$ и $W \subset V^*$ мы обозначаем через $\mathrm{Ann}\, U \subset V^*$ и $\mathrm{Ann}\, W \subset V$ их *аннуляторы* $\mathrm{Ann}\, U \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U\ \varphi(u) = 0\}$ и $\mathrm{Ann}\, W \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \forall \psi \in W\ \varphi(v) = 0\}$. Соответствие $U \mapsto \mathrm{Ann}\, U$ является инволютивной[1] биекцией между векторными подпространствами размерности k в V и векторными подпространствами размерности $\dim V - k$ в V^*. Эта

[1] Т. е. обратной самой себе. Это означает, что $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\, U = U$ для любого векторного подпространства U как в V, так и в V^*.

биекция переводит суммы векторных подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы[1].

1.2. Билинейные формы. Отображение $\beta : V \times V \to \Bbbk$ называется *билинейной формой* на пространстве V, если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1u_1 + x_2u_2, y_1w_1 + y_2w_2) = \sum_{i,j=1}^{2} x_iy_j\beta(u_i, w_j) \tag{1-1}$$

при всех $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \Bbbk$.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \to \Bbbk$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u, w) \in \Bbbk$ на паре векторов $u, w \in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u \cdot w$, принимающего значения в поле $\Bbbk$ и, вообще говоря, некоммутативного. Формула (1-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок.

1.2.1. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m), \quad \text{где} \quad u_i, w_j \in V\,,$$

связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\boldsymbol{uw}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}^t \cdot \boldsymbol{w} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ и формы β. Когда наборы совпадают: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, мы пишем просто $B_{\boldsymbol{u}}$ вместо $B_{\boldsymbol{uu}}$. В этом случае $\det B_{\boldsymbol{u}} \in \Bbbk$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов $\boldsymbol{u}$.

Если наборы векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ линейно выражаются через наборы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ по формулам $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{eu}}$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}\, C_{\boldsymbol{fw}}$, то $B_{\boldsymbol{uw}} = \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{e}C_{\boldsymbol{eu}}\right)^t \left(\boldsymbol{f}C_{\boldsymbol{fw}}\right) = C^t_{\boldsymbol{eu}}\boldsymbol{e}^t\boldsymbol{f}C_{\boldsymbol{fw}} = C^t_{\boldsymbol{eu}}B_{\boldsymbol{ef}}C_{\boldsymbol{fw}}$. В частности, если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\, C_{\boldsymbol{wu}}$, то

$$B_{\boldsymbol{u}} = C^t_{\boldsymbol{wu}}B_{\boldsymbol{w}}C_{\boldsymbol{wu}}\,. \tag{1-2}$$

Если векторы $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ образуют базис в V, то скалярное произведение $\beta(u, w)$ любых двух векторов $u = \boldsymbol{e}\, x$ и $w = \boldsymbol{e}\, y$ однозначно выражается через столбцы x, y их координат в базисе $\boldsymbol{e}$ по формуле

$$u \cdot w = u^t \cdot w = x^t\boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e}y = x^tB_{\boldsymbol{e}}y\,. \tag{1-3}$$

Поскольку любая квадратная матрица $B_{\boldsymbol{e}} \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V, сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n-мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n \times n$.

Упражнение 1.4. Убедитесь, что эта биекция линейна.

[1] Доказательство всех этих фактов см. в лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_04.pdf, раздел 4.4.3, стр. 64.

1.2.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию линейного отображения

$$\beta^\wedge : V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(*, v), \tag{1-4}$$

переводящего вектор $v \in V$ в линейную форму $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве V, задаваемую правым скалярным умножением векторов из V на v. Линейное отображение (1-4) называется *правой корреляцией* билинейной формы β. Форма β однозначно восстанавливается из корреляции по формуле $\beta(u, w) = \beta^\wedge(w)\, u$. Если зафиксировать в пространствах V и V^* двойственные базисы $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$, то матрица отображения $\beta^\wedge$ в этих базисах совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе $\boldsymbol{e}$: $B^\wedge_{\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}$.

Упражнение 1.5. Убедитесь в этом!

Таким образом, сопоставление билинейной форме β её правой корреляции $\beta^\wedge$ устанавливает изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений из V в V^*. Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ эквивалентно заданию *левой корреляции*

$$^\wedge\beta : V \to V^*, \quad v \mapsto \beta(v, *), \tag{1-5}$$

переводящей вектор $v \in V$ в линейную форму левого скалярного умножения векторов из V на v: $u \mapsto v \cdot u = \beta(u, v)$.

Упражнение 1.6. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}^*$ пространств V и V^* равна $B_{\boldsymbol{e}}^t$, и что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией *транспонированной формы* $\beta^t(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(w, u)$.

1.2.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V\ \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V\ \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \tag{1-6}$$

называются, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы β. Вообще говоря, $V^\perp \neq {}^\perp V$, если форма β не является симметричной или кососимметричной. Однако

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V\,.$$

В самом деле, $\dim\ker\beta^\wedge = \dim V - \dim\operatorname{im}\beta^\wedge$, $\dim\ker{}^\wedge\beta = \dim V - \dim\operatorname{im}{}^\wedge\beta$, и размерности образов операторов $\beta^\wedge$, ${}^\wedge\beta$ равны рангам их матриц в каких-либо двойственных друг другу базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}^*$ пространств V и V^*. Так как эти матрицы транспонированы друг другу по упр. 1.6, они имеют одинаковый ранг, равный рангу матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ базиса $\boldsymbol{e}$ по упр. 1.5. Итак, оба пространства в (1-6) имеют размерность $\dim V - \operatorname{rk} B_{\boldsymbol{e}}$. Это число называется *корангом* билинейной формы β и обозначается $\operatorname{cork}\beta$. Ранг матрицы Грама, равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса и называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\operatorname{rk}\beta$.

1.2.4. Изометрии. Линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ между векторными пространствами V_1 и V_2, на которых заданы билинейные формы β_1 и β_2, называется *изометрическим*[1], если для любых векторов $u, w \in V_1$ выполняется равенство $\beta_1(u, w) = \beta_2\big(f(v), f(w)\big)$. Билинейные формы β_1 и β_2 называются *изоморфными*, если между пространствами V_1 и V_2 имеется изометрический линейный изоморфизм.

[1] Или *гомоморфизмом* пространств с билинейными формами.

1.3. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*[1], если она удовлетворяет условиям следующего ниже предл. 1.1. Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 1.1 (критерии невырожденности)
Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама
2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама
3) левая корреляция $^\wedge\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
4) правая корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$
6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$
7) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(v, u)$ для всех $u \in V$
8) для любой линейной функции $\varphi : V \to \Bbbk$ существует такой вектор $v \in V$, что $\varphi(u) = \beta(u, v)$ для всех $u \in V$

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюрьективность линейного отображения $V \to V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюрьективность для операторов $^\wedge\beta$ и $\beta^\wedge$, равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (1-2) на стр. 4, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны друг с другом по формуле $\det B_{\boldsymbol{e}} = \det_{\boldsymbol{f}} \cdot \det^2 C_{\boldsymbol{fe}}$, где $C_{\boldsymbol{fe}}$ — матрица перехода[2] от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. □

Пример 1.1 (евклидова форма)
Симметричная билинейная форма на координатном пространстве $\Bbbk^n$ с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ она задаёт евклидову структуру на пространстве $\mathbb{R}^n$. Евклидова форма невырождена. Однако над отличными от $\mathbb{R}$ полями её свойства могут отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем $\mathbb{C}$ ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

Упражнение 1.7. Приведите пример n-мерного подпространства в $\mathbb{C}^{2n}$, на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

[1] А также *неособой* или *регулярной*.
[2] См. n° 1.1 на стр. 3.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже[1] мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

Пример 1.2 (гиперболическая форма)
Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-7}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2\nu-1} = \left(e_\nu - e_{n+\nu}\right)/\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2\nu} = \left(e_\nu + e_{n+\nu}\right)/\sqrt{2}\,, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n\,.$$

Над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (1-7), называется *гиперболическим базисом*.

Пример 1.3 (симплектическая форма)
Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве $\Bbbk^{2n}$, матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-8}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (3-1) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J, называется *симплектическим базисом*. Ниже[2] мы покажем, что над *любым* полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ всякая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

Упражнение 1.8. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера вырождены.

1.3.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $\boldsymbol{e}^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee\boldsymbol{e} = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственного к $\boldsymbol{e}$ базиса $\boldsymbol{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta\left(e_i, e_j^\vee\right) = \beta\left({}^\vee e_i, e_j\right) = \delta_{ij}\,, \tag{1-9}$$

[1] См. сл. 1.1 на стр. 12.
[2] См. теор. 1.2 на стр. 12.

которые на матричном языке имеют вид $B_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee} = B_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} = E$. Так как по формулам из n° 1.2.1

$$E = B_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\vee} = B_{\boldsymbol{e}} C_{\boldsymbol{e}^\vee\boldsymbol{e}} \quad \text{и} \quad E = B_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} = C^t_{{}^\vee\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}} B_{\boldsymbol{e}}\,,$$

матрицы перехода от базисов $\boldsymbol{e}^\vee$ и ${}^\vee\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}$ обратны, соответственно, матрице Грама базиса $\boldsymbol{e}$ и транспонированной к ней матрице: $\boldsymbol{e}^\vee = \boldsymbol{e}\,B_{\boldsymbol{e}}^{-1}$ и ${}^\vee\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\,B_{\boldsymbol{e}}^{-1\,t}$.

Знание двойственных к $\boldsymbol{e}$ базисов позволяет раскладывать произвольный вектор $v \in V$ по базису $\boldsymbol{e}$ в виде

$$v = \sum_i \beta\left({}^\vee e_i, v\right)\, e_\nu = \sum_i \beta\left(v, e_i^\vee\right)\, e_\nu\,. \tag{1-10}$$

Упражнение 1.9. Убедитесь в этом!

1.3.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β, если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства $\Bbbk^{2n}$ изотропны для гиперболической формы из прим. 1.2 и симплектической формы из прим. 1.3.

Предложение 1.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $\beta^\wedge : V \xrightarrow{\sim} V^*$ отображает U внутрь $\operatorname{Ann} U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leqslant \dim V$. □

Замечание 1.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 1.2 в общем случае неулучшаема.

1.3.3. Группа изометрий. Линейный оператор $f : V \to V$ является изометрией[1] билинейной формы β если и только если для произвольного базиса $\boldsymbol{e}$ в V набор векторов $f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}\,F_{\boldsymbol{e}}$ имеет ту же матрицу Грама $B_{f(\boldsymbol{e})} = f(\boldsymbol{e})^t \cdot \boldsymbol{e}$, что и базис $\boldsymbol{e}$, т. е.

$$F_{\boldsymbol{e}}^t B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}\,. \tag{1-11}$$

Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, получаем $\det^2 F_{\boldsymbol{e}} = 1$, откуда $\det^2 F_{\boldsymbol{e}} = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $\mathrm{O}_\beta(V)$ и называется *группой изометрий*[2] невырожденной билинейной формы β. Изометрии определителя 1 называются *специальными* и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $\mathrm{SO}_\beta(V)$.

Из равенства (1-11) вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_{\boldsymbol{e}}^{-1} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} F_{\boldsymbol{e}}^t B_{\boldsymbol{e}}\,. \tag{1-12}$$

[1] См. n° 1.2.4 на стр. 5.

[2] А также *ортогональной группой* или *группой автоморфизмов*.

Пример 1.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)
Оператор $f : H_2 \to H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \Bbbk^* = \Bbbk \smallsetminus \{0\}. \tag{1-13}$$

Над полем $\mathbb{R}$ оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ch} t \overset{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \overset{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t. Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор $\widetilde{F}_\lambda$ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

1.3.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ каждому линейному оператору $f : V \to V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $\boldsymbol{e}^t \cdot f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e} F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$ в произвольно выбранном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V. Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_{\boldsymbol{e}} \mapsto B_{\boldsymbol{e}} F_{\boldsymbol{e}}$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма $\chi : V \times V \to \Bbbk$ на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\chi(u, w) = \beta(u, f_\chi w)$ для некоторого линейного оператора $f_\chi : V \to V$, однозначно определяемого формой χ. Матрица $F_{\boldsymbol{e}}$ оператора f_χ в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V выражается через матрицы Грама $B_{\boldsymbol{e}}$ и $X_{\boldsymbol{e}}$ форм β и χ в том же базисе по формуле $F_{\boldsymbol{e}} = B_{\boldsymbol{e}}^{-1} X_{\boldsymbol{e}}$.

Пример 1.5 (канонический оператор)
Биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β билинейной форме $\beta^t(u, w) \overset{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ оператор $\varkappa : V \to V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β. Он однозначно характеризуется свойством

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \varkappa w), \tag{1-14}$$

а его матрица K_e в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β по формуле $K_e = B_e^{-1}B_e^t$.

Упражнение 1.10. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^tBC$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, матрица $K = B^{-1}B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1}KC$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u,w) = \beta(w,\varkappa u) = \beta(\varkappa u,\varkappa w)$ для всех $u,w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

1.4. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ связаны *левый* и *правый ортогоналы*

$$\begin{aligned} {}^{\perp}U &= \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(v,u) = 0\}, \\ U^{\perp} &= \{v \in V \mid \forall u \in U\ \beta(u,v) = 0\}. \end{aligned} \tag{1-15}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V.

Предложение 1.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad ({}^{\perp}U)^{\perp} = U = {}^{\perp}(U^{\perp}).$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (1-15) суть прообразы подпространства $\mathrm{Ann}\, U \subset V^*$ при изоморфизмах ${}^{\wedge}\beta, \beta^{\wedge} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, и $\dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^{\perp}U)^{\perp}$ и ${}^{\perp}(U^{\perp})$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. □

Предложение 1.4

Пусть билинейная форма β на произвольном[1] векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль $U^{\perp}$ однозначно определяется тем, что $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^{n} \beta\left({}^{\vee}u_i, v\right)\, u_i\,, \tag{1-16}$$

где ${}^{\vee}\boldsymbol{u} = ({}^{\vee}u_1, {}^{\vee}u_2, \dots, {}^{\vee}u_n)$ — левый двойственный к $\boldsymbol{u}$ относительно формы β базис в U.

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u,v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U, т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^{\perp}$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v \in U$ и $v - v_U \in U^{\perp}$. Поскольку в любом разложения $v = v'_U + w$ с $v'_U \in U$ и $w \in U^{\perp}$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u,v) = \beta(u,v'_U)$, имеем равенство $v'_U = v_U$, а значит и равенство

[1] Возможно даже бесконечномерном.

$w = v - v'_U = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (1-10) на стр. 8: $v_U = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v_U)\, u_i = \sum_i \beta({}^\vee u_i, v)\, u_i$. □

Упражнение 1.11. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$, где проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ находится по формуле ${}_U v = \sum \beta\left(v, u_i^\vee\right)\, u_i$ и однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$.

1.5. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u)\,,$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

Упражнение 1.12. Убедитесь, что над полем характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь также, что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm\beta$.

Если $\operatorname{char}\Bbbk = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но наоборот. Если $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму

$$\beta = \beta_+ + \beta_-$$

симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}\,.$$

Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем обозначать этот оператор через $\widehat{\beta} \overset{\text{def}}{=} \beta^\wedge = {}^\wedge\beta : V \to V^*$ и называть просто *корреляцией*. Напомню, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\widehat{\beta}(v) : V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u)\,.$$

Для кососимметричной формы β мы полагаем $\widehat{\beta} \overset{\text{def}}{=} \beta^\wedge = -{}^\wedge\beta$.

1.5.1. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через $U^\perp$. Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^\perp$ по предл. 1.4. В этом случае подпространство $U^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству U. Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β. Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v.

Если форма β невырождена на всём пространстве V, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$ для всех подпространств $U \subset V$ по предл. 1.4. В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено тогда и только тогда, когда невырождено её ограничение на $U^\perp$.

Теорема 1.1 (теорема Лагранжа)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама[1].

[1]Такие базисы называются *ортогональными*.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e,e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u,w) = \beta(u+w, u+w) - \beta(u,u) - \beta(w,w)) = 0$ для всех $u, w \in V$. Возьмём такой вектор e в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \Bbbk \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^{\perp}$. По индукции, в $U^{\perp}$ есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e, получаем искомый базис в V. □

Пример 1.6 (ортогональный базис гиперболического пространства)
В гиперболическом пространстве[1] $\Bbbk^{2n}$ с гиперболическим базисом $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно, например, взять векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

Следствие 1.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i \,/\, \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$. □

Теорема 1.2 (теорема Дарбу)
Над произвольным полем $\Bbbk$ любой характеристики всякое конечномерное векторное пространство V с невырожденной кососимметричной билинейной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству[2]. В частности, размерность пространства V чётна.

Доказательство. Для начала построим в V базис, матрица Грама которого состоит из расположенных на главной диагонали 2×2-блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1-17}$$

В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Так как форма ω невырождена, найдётся такой вектор $w \in V$, что $\omega(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Поскольку $\omega(e_1, e_1) = 0$, векторы e_1 и e_2 не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$. Матрица Грама ограничения формы ω на это подпространство в базисе (e_1, e_2) имеет вид (1-17). Так как ограничение формы ω на U невырождено, $V = U \oplus U^{\perp}$ и ограничение формы ω на $U^{\perp}$ тоже невырождено. Индукция по $\dim V$ позволяет считать, что в подпространстве $U^{\perp}$ требуемый базис уже имеется. Добавляя к нему e_1, e_2, получаем искомый базис $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$ в $V = U \oplus U^{\perp}$. Симплектический базис формы ω получается из построенного перестановкой векторов: сначала надо написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. □

[1] См. прим. 1.2 на стр. 7.
[2] См. прим. 1.3 на стр. 7.

1.5.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Мы обозначаем это пространство через

$$\ker\beta \stackrel{\text{def}}{=} \ker\widehat{\beta} = \ker\beta^{\wedge} = \ker{}^{\wedge}\beta = \{w \in V \mid \forall v \in V\ \beta(v,w) = 0\}\,.$$

Предложение 1.5
Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker\beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker\beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u,w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker\beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v,w) = \beta(e,w) + \beta(u,w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker\beta = 0$. □

Предостережение 1.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, предл. 1.5, вообще говоря, неверно.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.5. В клетке (i,j) матрицы $B^{\wedge}_{e^*,e}$ отображения $\beta^{\wedge} : e_j \mapsto \beta(*, e_j)$ стоит i-тая координата линейной функции $u \mapsto \beta(u, e_j)$ в базисе $\boldsymbol{e}^*$, равная значению этой функции на базисном векторе e_i, т. е. скалярному произведению $\beta(e_i, e_j)$.

Упр. 1.7. Линейная оболочка векторов $e_\nu + i e_{n+\nu}$ с $1 \leqslant \nu \leqslant n$.

Упр. 1.8. Если матрица $B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ кососимметрична, то $\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B$.

Упр. 1.9. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на ${}^{\vee}e_i$, получаем $\beta({}^{\vee}e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на $e_i^{\vee}$, получаем $\beta(v, e_i^{\vee}) = x_i$.