ЕНЕ 2019◇1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите кратчайшее расстояние между прямой, проходящей через точки $(2,-3,-4,0)$, $(3,-3,-5,-2)$, и плоскостью, проходящей через точки

$$(1,-2,-3,0)\,,\quad (0,-1,-2,1)\,,\quad (0,-3,-1,1)\,.$$

Решение. Положим

$$\begin{aligned} u &= (3,-3,-5,-2)-(2,-3,-4,0)=(1,0,-1,-2)\\ v &= (0,-1,-2,1)-(0,-3,-1,1)=(0,2,-1,0)\\ w &= (1,-2,-3,0)-(0,-3,-1,1)=(1,1,-2,-1)\\ a &= (0,-3,-1,1)-(2,-3,-4,0)=(-2,0,3,1)\,. \end{aligned}$$

Искомое расстояние равно отношению евклидова объёма четырёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы a, u, v, w, к евклидову объёму его трёхмерного основания, натянутого на векторы u, v, w. Векторное произведение $n=[u,v,w]$ имеет длину, равную евклидову объёму трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы u, v, w, и направлено перпендикулярно его линейной оболочке так, что базис (n,u,v,w) в $\mathbb{R}^4$ положительно ориентирован. Поэтому искомое отношение объёмов равно $|(a,n)|\,/\,|n|$. По правилу Крамера, координаты (n_1,n_2,n_3,n_4) вектора $n=[u,v,w]$ суть

$$n_1=\det\begin{pmatrix}0&-1&-2\\2&-1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}=4 \qquad n_2=-\det\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}=1$$

$$n_3=\det\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=2 \qquad n_4=-\det\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=1$$

Ответ: $1/\sqrt{22}=\sqrt{22}/22$.

ЕНЕ 2019◇2. Центр c_1 сферы радиуса 3 находится на расстоянии 8 от центра c_2 сферы радиуса 9. Опишите все инверсии, переводящие первую сферу во вторую.

Решение. Поскольку сферы имеют разные радиусы, есть ровно две гомотетии, переводящие первую сферу во вторую, а именно, гомотетия с коэффициентом $r_2\,/\,r_1 = 3$ относительно такой точки p, что $p-c_2=3\,(p-c_1)$, откуда $p=\frac{3}{2}\,c_1-\frac{1}{2}\,c_2$, и гомотетия с коэффициентом -3 относительно такой точки q, что $q-c_2=3(c_1-q)$, откуда $q=\frac{3}{4}\,c_1+\frac{1}{4}\,c_2$. Первый центр имеет относительно $S(c_1,r_1)$ степень

$$s_{r_1,c_1}(p)=(p-c_1,p-c_1)-r_1^2=\frac{1}{4}\,|c_1-c_2|^2-9=7\,.$$

Второй центр — степень

$$s_{r_1,c_1}(q)=(q-c_1,q-c_1)-r_1^2=\frac{1}{16}|c_2-c_1|^2-9=-5\,.$$

Инверсия, переводящая первую сферу во вторую, имеет либо центр $p=-\frac{1}{2}\,c_1+\frac{3}{2}\,c_2$ и квадрат радиуса $r^2=3\,s_{r_1,c_1}(p)=21$, т. е. $r=\sqrt{21}$, либо центр $q=\frac{3}{4}\,c_1+\frac{1}{4}\,c_2$ и квадрат радиуса $r^2=-3\,s_{r_1,c_1}(q)=15$, т. е. $r=\sqrt{15}$.

ЕНЕ 2019◇3. На эллиптической плоскости $\mathbb{E}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ найдите косинусы длин сторон и углов треугольника с вершинами в точках $a = (1 : 0 : -1)$, $b = (1 : -1 : 0)$, $c = (-2 : -2 : 5)$ и выясните, стягиваем ли этот треугольник.

Решение. Поскольку евклидов угол между векторами $a = (1, 0, -1)$ и $b = (1, -1, 0)$ в $\mathbb{R}^3$ острый, сторона $[a, b]$ эллиптического $\triangle\, abc$ является кратчайшей дугой единичной сферы, соединяющей концы векторов $a/|a|$ и $b/|b|$. Её эллиптическая длина имеет

$$\cos|a, b| = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{2}\,.$$

В качестве направленных внутрь стороны $[a, b]$ касательных векторов к геодезической (ab) в вершинах a и b можно взять векторы

$$v_{ab} = b - \frac{(a, b)}{(a, a)}\, a = (1, -1, 0) - (1, 0, -1)/2 = (1, -2, 1)/2 \in a^{\perp} = T_a\mathbb{E}_2$$
$$v_{ba} = a - \frac{(a, b)}{(b, b)}\, b = (1, 0, -1) - (1, -1, 0)/2 = (1, 1, -2)/2 \in b^{\perp} = T_b\mathbb{E}_2\,.$$

Векторы $b = (1, 0, -1)$ и $c = (1, -1, 0)$ перпендикулярны. Поэтому между точками $b, c \in \mathbb{E}_2$ имеются два различных геодезических отрезка: первый, $[b, c]'$, представляется дугой длины $\pi/2$, соединяющей конец вектора $b/|b|$ с концом вектора $c/|c|$, а второй, $[b, c]''$, — дугой длины $\pi/2$, соединяющей конец вектора $b/|b|$ с концом вектора $-c/|c|$. Таким образом, на эллиптической плоскости $\mathbb{E}_2$ имеются два различных треугольника с вершинами в точках a, b, c: один из них, назовём его $\triangle'$, имеет сторону $[b, c]'$, а другой, который мы назовём $\triangle''$, имеет сторону $[b, c]''$. В обоих треугольниках

$$\cos|b, c|' = \cos|b, c|'' = 0\,.$$

В первом треугольнике в качестве направленных внутрь стороны $[b, c]'$ касательных векторов к геодезической (bc) в вершинах b и c можно взять векторы

$$v'_{bc} = c = (-2 : -2 : 5) \in b^{\perp} = T_b\mathbb{E} \quad \text{и} \quad v'_{cb} = b = (1 : -1 : 0) \in c^{\perp} = T_c\mathbb{E}\,.$$

Во втором треугольнике в качестве направленных внутрь стороны $[b, c]''$ касательных векторов к геодезической (bc) в вершинах b и c можно взять векторы

$$v''_{bc} = -c = -v'_{bc} \quad \text{и} \quad v''_{cb} = b = v'_{cb}\,.$$

Так как евклидов угол между векторами $c = (-2, -2, 5)$ и $a = (1, 0, -1)$ в $\mathbb{R}^3$ тупой, сторона $[c, a]$ в треугольнике $\triangle'$ представляется кратчайшей дугой единичной сферы, соединяющей концы векторов $c/|c|$ и $-a/|a|$. Поэтому первый треугольник $\triangle'$ нестягиваем, а эллиптическая длина его стороны $[c, a]$ имеет

$$\cos|c, a| = \frac{-(c, a)}{|c| \cdot |a|} = \frac{7}{\sqrt{66}}\,.$$

В качестве направленных внутрь стороны $[c, a]$ касательных векторов к геодезической (ca) в вершинах c и a треугольника $\triangle'$ можно взять векторы

$$v'_{ca} = -a + \frac{(a, c)}{(c, c)}\, c = (1, 0, -1) - 7(-2, -2, 5)/33 = (-19, 14, -2)/33 \in c^{\perp} = T_b\mathbb{E}$$
$$v'_{ac} = c - \frac{(a, c)}{(a, a)}\, a = (-2, -2, 5) + 7(1, 0, -1)/2 = (3, -4, 3)/2 \in a^{\perp} = T_a\mathbb{E}$$

В треугольнике $\triangle''$ сторона $[c, a]$ представляется кратчайшей дугой единичной сферы, соединяющей концы векторов $-c/|c|$ и $a/|a|$. Она имеет ту же эллиптическую длину, что и в первом треугольнике, однако второй треугольник $\triangle''$ стягиваем. В качестве направленных внутрь стороны $[c, a]$ касательных векторов к геодезической (ca) в вершинах c и a во втором треугольнике можно взять векторы

$$v''_{ca} = a - \frac{(a, c)}{(c, c)}\, c = -v'_{ca} \quad \text{и} \quad v''_{ac} = -c + \frac{(a, c)}{(a, a)}\, a = -v'_{ac}\,.$$

Углы α', β', γ' и α'', β'', γ'' при вершинах a, b, c в треугольниках $\triangle'$ и $\triangle''$ суть евклидовы углы между выбранными нами касательными векторами к их сторонам:

$$\cos\alpha' = \frac{(v_{ab}, v'_{ac})}{|v_{ab}|\cdot|v'_{ac}|} = \frac{7}{\sqrt{51}}\,,\ \cos\beta' = \frac{(v_{ba}, v'_{bc})}{|v_{ba}|\cdot|v'_{bc}|} = -\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{11}}\,,\ \cos\gamma' = \frac{(v'_{ca}, v'_{cb})}{|v'_{ca}|\cdot|v'_{cb}|} = -\sqrt{\frac{33}{34}}\,;$$
$$\cos\alpha'' = \frac{(v_{ab}, v''_{ac})}{|v_{ab}|\cdot|v''_{ac}|} = -\cos\alpha'\,,\ \cos\beta'' = \frac{(v_{ba}, v''_{bc})}{|v_{ba}|\cdot|v''_{bc}|} = -\cos\beta'\,,\ \cos\gamma'' = \frac{(v''_{ca}, v''_{cb})}{|v''_{ca}|\cdot|v''_{cb}|} = -\cos\gamma'\,.$$

Отметим, что в правых частях сферической теоремы косинусов для вершины c в треугольниках $\triangle'$ и $\triangle''$ мы получаем соответственно $\sin|c,b|\cdot\sin|c,a|\cdot\cos\gamma' < 0$ и $\sin|c,b|\cdot\sin|c,a|\cdot\cos\gamma' > 0$, что лишний раз подтверждает нестягиваемость первого треугольника и стягиваемость второго.

ЕНЕ 2019◇4. Выясните, пересекают ли две прямые, заданные в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ однородными уравнениями

$$7x_0 - 20x_1 + 57x_2 = 0 \quad\text{и}\quad -14x_0 - 10x_1 + 11x_2 = 0\,,$$

плоскость Лобачевского $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{P}_2$, и если да, найдите кратчайшее расстояние между высекаемыми ими на ней геодезическими.

Решение. Полюса данных прямых относительно абсолютной квадрики $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ находятся в точках $p = (7 : 20 : -57)$ и $q = (-14 : 10 : -11)$. По правилу Крамера, прямая (pq) задаётся однородным уравнением $2x_0 + 5x_1 + 2x_2 = 0$ и пересекает данные прямые в точках $a = (13 : -4 : -3)$ и $b = (3 : -2 : 2)$, которые лежат в $\mathbb{L}_2$. Тем самым, обе данные прямые пересекают $\mathbb{L}_2$ и минимальное расстояние между ними достигается вдоль отрезка $[a,b]$ с $\operatorname{ch}|a,b| = (a,b)_{\mathbb{L}}/\sqrt{(a,a)_{\mathbb{L}}\cdot(b,b)_{\mathbb{L}}} = 37/12$.

ЕНЕ 2019◇5. Треугольник $\triangle abc$ на плоскости Лобачевского имеет

$$\operatorname{ch}|a,b| = 9\,,\quad \operatorname{ch}|b,c| = 3\,,\quad \operatorname{ch}|c,a| = 3\,.$$

Найдите косинусы его углов.

Решение. Из «основного гипертригонометрического тождества»: $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ находим

$$\operatorname{sh}|a,b| = \sqrt{9^2-1} = 4\sqrt{5}\,,\ \operatorname{sh}|b,c| = \operatorname{sh}|c,a| = \sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{2}\,.$$

Далее из «гиперболической теоремы косинусов»: $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a\cdot\operatorname{sh} c\cdot\cos\alpha$ находим

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{9\cdot 3 - 3}{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,,\quad \cos\gamma = \frac{3\cdot 3 - 9}{8} = 0\,.$$

Обратите внимание, что это равнобедренный прямоугольный треугольник. Справедлива ли для него теорема Пифагора?