ОЕП 2019◇1 (20 баллов). Укажите начальную точку и направления координатных осей канонического репера аффинной квадрики $-8x^2+20xy-28xz-36x+y^2+8yz+36y-11z^2-108z = 108$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, определите тип этой квадрики и напишите её уравнение в каноническом репере.

Решение. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ с $x_1/x_0 = x$, $x_2/x_0 = y$, $x_3/x_0 = z$ проективное замыкание данной квадрики имеет матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} -108 & -18 & 18 & -54 \\ -18 & -8 & 10 & -14 \\ 18 & 10 & 1 & 4 \\ -54 & -14 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

с определителем

$$\det G = 18\cdot 3\cdot 2\cdot \det\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 & -17 \\ -1 & -4 & 10 & -14 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ -3 & -7 & 4 & -11 \end{pmatrix} = 18\cdot 6\cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 18\cdot 6\cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 1 & 11 & -10 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 18\cdot 6\cdot (7\cdot 87 - 71 + 8\cdot 19) \neq 0\,.$$

Поэтому квадрика невырождена. Её асимптотическая квадрика имеет матрицу Грама

$$G_\infty = \begin{pmatrix} -8 & 10 & -14 \\ 10 & 1 & 4 \\ -14 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

с характеристическим многочленом $t^3+18t^2-243t = t(t-9)(t+27)$. Так как собственные числа равны $0, 9, -27$, квадрика G является гиперболическим параболоидом. Направления её главных осей задаются собственными векторами асимптотической квадрики. Эти векторы решают системы однородных линейных уравнений ранга 2 с матрицами

$$G_\infty = \begin{pmatrix} -8 & 10 & -14 \\ 10 & 1 & 4 \\ -14 & 4 & -11 \end{pmatrix},\quad G_\infty - 9E = \begin{pmatrix} -17 & 10 & -14 \\ 10 & -8 & 4 \\ -14 & 4 & -20 \end{pmatrix},\quad G_\infty + 27E = \begin{pmatrix} 19 & 10 & -14 \\ 10 & 28 & 4 \\ -14 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Применяя к последней паре уравнений каждой системы правило Крамера, находим:

$$\begin{aligned} v_0 &= (-27 : 54 : 54) = (-1 : 2 : 2)\,, \\ v_9 &= (144 : 144 : -72) = (2 : 2 : -1)\,, \\ v_{-27} &= (27\cdot 16 : -27\cdot 8 : 8\cdot 54) = (2 : -1 : 2)\,. \end{aligned}$$

В ортонормальном базисе из векторов $e_1 = v_0/3$, $e_2 = v_9/3$, $e_3 = v_{-27}/3$ асимптотическая квадрика имеет диагональную матрицу Грама с элементами $0, 9, -27$ на главной диагонали. Начало канонической системы координат в $\mathbb{R}^3$ находится в вершине параболоида, т. е. является отличной от v_0 точкой пересечения проективной квадрики G с прямой, вдоль которой пересекаются полярные гиперплоскости точек $v_9 = (0 : 2 : 2 : -1)$ и $v_{-27} = (0 : 2 : 2 : -1)$ относительно квадрики G. Эти гиперплоскости задаются однородными уравнениями с коэффициентами

$$(0 : 2 : 2 : -1) \cdot G = (54 : 18 : 18 : -9) = (6 : 2 : 2 : -1)$$
$$(0 : 2 : 2 : -1) \cdot G = (-162 : -54 : 27 : -54) = (-6 : -2 : 1 : -2)\,.$$

Так как точка $p = (1 : -3 : 0 : 0)$ удовлетворяет обоим уравнениям, вершина параболоида является отражением G-изотропного вектора $v_0 = (0, -1, 2, 2)$ в G-ортогонале к вектору $p = (1, -3, 0, 0)$, т. е. представляется вектором $q = (pGp^t) \cdot v_0 - 2(pGv_0^t) \cdot p$. Находим:

$$pG = (1, -3, 0, 0) \cdot G = (-54, 6, -12, -12)$$
$$pGv_0^t = -54\,, \quad pGp^t = -72\,,$$
$$q = 2 \cdot (0 : -1 : 2 : 2) - 3 \cdot (1 : -3 : 0 : 0) = (-3 : 7 : 4 : 4)$$

Поскольку

$$qGv_0^t = (-3, 7, 4, 4)\begin{pmatrix} -108 & -18 & 18 & -54 \\ -18 & -8 & 10 & -14 \\ 18 & 10 & 1 & 4 \\ -54 & -14 & 4 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 162\,,$$

матрица Грама проективной квадрики G в базисе $-q/3$, $e_1 = v_0/3$, e_2, e_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Итак, начало канонической системы координат (вершина параболоида) имеет в исходных координатах на $\mathbb{R}^3$ координаты $(-7/3, -4/3, -4/3)$, оси канонической системы координат направлены вдоль векторов $e_1 = (-1/3, 2/3, 2/3)$, $e_2 = (2/3, 2/3, -1/3)$, $e_3 = (2/3, -1/3, 2/3)$, а уравнение параболоида в координатах (z_1, z_2, z_3) относительно этого репера имеет вид $2z_1 = z_2^2 - 3z_3^2$.

ОЕП 2019◇2 (20 баллов). Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений для оператора $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, имеющего в стандартных ортонормальных базисах матрицу

$$\begin{pmatrix} -5/3 & -2/3 & 16/15 & 6/5 \\ 0 & 2 & 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\,.$$

Решение. Ядро оператора f является пространством решений системы однородных линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -25 & -10 & 16 & 18 \\ 0 & 10 & 4 & -8 \end{pmatrix}\,.$$

которая приводится методом Гаусса к строгому ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -4/5 \end{pmatrix}\,.$$

Базис в ядре составляют векторы $(4/5, -2/5, 1, 0)$ и $(2/5, 4/5, 0, 1)$. Квадраты сингулярных чисел суть собственные числа оператора $ff^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} -5/3 & -2/3 & 16/15 & 6/5 \\ 0 & 2 & 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/3 & 0 \\ -2/3 & 2 \\ 16/15 & 4/5 \\ 6/5 & -8/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/5 & -12/5 \\ -12/5 & 36/5 \end{pmatrix}\,,$$

а образы сингулярных направлений — одномерные подпространства в $\mathbb{R}^2$, порождённые собственными векторами этой матрицы. Характеристический многочлен матрицы ff^* равен

$$t^2 - 13t + 36 = (t-4)(t-9)\,.$$

Тем самым, сингулярные числа равны 2 и 3, а образы сингулярных направлений суть одномерные пространства решений однородных линейных уравнений с коэффициентами $(9, -12)$ и $(-16, -12)$, которые порождаются векторами $(4, 3)$ и $(3, -4)$ соответственно. Сингулярные направления оператора f в $\mathbb{R}^4$ являются образами этих подпространств под действием оператора f^* и порождаются векторами

$$\begin{pmatrix} -5/3 & 0 \\ -2/3 & 2 \\ 16/15 & 4/5 \\ 6/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/3 \\ 10/3 \\ 20/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -5/3 & 0 \\ -2/3 & 2 \\ 16/15 & 4/5 \\ 6/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое, векторами $(-2, 1, 2, 0)$ и $(1, 2, 0, -2)$.

ОЕП 2019◇3 (20 баллов). Найдите полярное разложение $f = gh$, где $g \in \mathrm{O}_3$, а h самосопряжён и положителен, для оператора $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} -19/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & -19/9 \\ -4/9 & 25/9 & -4/9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Самосопряжённый оператор

$$f^t f = \begin{pmatrix} -19/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & -19/9 \\ -4/9 & 25/9 & -4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 25/9 \\ 8/9 & -19/9 & -4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49/9 & -16/9 & -32/9 \\ -16/9 & 73/9 & -16/9 \\ -32/9 & -16/9 & 49/9 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен $t^3 - 19t^2 + 99t - 81 = (t-1)(t-9)^2$. Будучи диагонализуемым, этот оператор аннулируется многочленом $(t-1)(t-9)$ степени 2. Поэтому $h = \sqrt{f^t f} = \alpha + \beta f^t f$, где α, β находятся из уравнений $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + 9\beta = 3$ и равны $\beta = 1/4$, $\alpha = 3/4$, откуда

$$h = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 49/36 & -16/36 & -32/36 \\ -16/36 & 73/36 & -16/36 \\ -32/36 & -16/36 & 49/36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/9 & -4/9 & -8/9 \\ -4/9 & 25/9 & -4/9 \\ -8/9 & -4/9 & 19/9 \end{pmatrix}$$

$$\det h = \sqrt{81} = 9\,, \quad h^{-1} = \begin{pmatrix} 17/27 & 4/27 & 8/27 \\ 4/27 & 11/27 & 4/27 \\ 8/27 & 4/27 & 17/27 \end{pmatrix}$$

$$g = fh^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$