БФ 2019◊1. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

на пространство U решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0\,, \end{cases}$$

и если нет, найдите проекцию вектора $v = (5, 8, 5, -19)$ на $U^\perp$ вдоль U.

Решение. Методом Гаусса приводим матрицу системы линейных уравнений на $x_1, \dots, x_4$ к строгому ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Придавая свободным переменным (x_3, x_4) значения $(1, 0)$ и $(0, 1)$, получаем в пространстве U базис из векторов $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 0, 1)$ с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -7 \\ -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тем самым, ограничение формы на U невырождено. Правый двойственный к u_1, u_2 относительно билинейной формы базис пространства U состоит из векторов[1] $u_1^\vee = u_2$, $u_2^\vee = -u_1$. Проекция вектора v на подпространство U вдоль $U^\perp$ равна $v_U = \beta(v, u_1^\vee)u_1 + \beta(v, u_2^\vee)u_2 = \beta(v, u_2)u_1 - \beta(v, u_1)u_2$, где коэффициенты $\beta(v, u_1)$, $\beta(v, u_2)$ суть элементы следующей матрицы Грама[2] размера 1×2:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -7 \\ -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $v_U = -16u_1 - 40u_2 = (-16, -16, -16, -40)$. Искомая проекция вектора v на подпространство $U^\perp$ вдоль U равна $v_{U^\perp} = v - v_U = (21, 24, 21, 21)$.

Проверка ортогональности:

$$-\frac{1}{24}\beta(v_U, v_{U^\perp}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & -7 \\ 2 & -6 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 21 & -17 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 0\,.$$

[1] Напомню, что в общем случае коэффициенты разложения векторов $u_j^\vee$ по векторам u_i суть столбцы матрицы, обратной к матрице Грама векторов u_i.

[2] Обратите внимание, что второй и третий множители в идущей ниже формуле такие же, как в (1). В общем виде ортогональная проекция $v_U = v^t B\,\boldsymbol{u}^\vee \boldsymbol{u}^t = v^t B \boldsymbol{u}\, G_{\boldsymbol{u}}^{-1} \boldsymbol{u}^t$, где B — матрица Грама билинейной формы, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ — базис пространства U, $G_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^t B\,\boldsymbol{u}$ — его матрица Грама, $\boldsymbol{u}^\vee = (u_1^\vee, u_2^\vee) = \boldsymbol{u}\, G_{\boldsymbol{u}}^{-1}$ — двойственный справа к $\boldsymbol{u}$ относительно B базис в U.

БФ 2019◇2. Найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы, имеющей в стандартных координатах на $\mathbb{R}^4$ вид

$$-4x_1^2 - 25x_2^2 - 2x_3^2 - 11x_4^2 + 20x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 16x_2x_4 + 2x_3x_4\,,$$

на ортогонал к вектору $v = (0, 3, 0, -7)$ относительно поляризации этой формы.

Решение. Для этого найдём сигнатуру формы на всём пространстве $\mathbb{R}^4$. Матрица Грама формы

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 & 2 & -3 \\ 10 & -25 & -5 & 8 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

имеет главные верхние угловые миноры $\varDelta_1 = -4 < 0$, $\varDelta_2 = 0$ и

$$\varDelta_3 = 2\det\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -25 & -5 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} - 2\,\varDelta_2 = 0\,.$$

Чтобы найти определитель $\varDelta_4$ всей матрицы, прибавим к первой и второй строкам третью, умноженную соответственно на 2 и на -5:

$$\varDelta_4 = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & 1 & -11 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = -1 < 0\,.$$

Поскольку $\varDelta_2 = 0$, в трёхмерном пространстве $e_1^\perp$ содержится изотропный вектор. Так как $\varDelta_4 \neq 0$, форма на $\mathbb{R}^4$ невырождена. Значит, ограничение формы на $e_1^\perp$ тоже невырождено и содержит гиперболическую плоскость, т. е. имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$. Поскольку у $\varDelta_1$ и $\varDelta_4$ одинаковый знак, имеет место второе. Итак, сигнатура формы на $\mathbb{R}^4$ равна $(1, 3)$. Так как скалярный квадрат вектора v

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 10 & 2 & -3 \\ 10 & -25 & -5 & 8 \\ 2 & -5 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & 1 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & -131 & -22 & 113 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} < 0\,,$$

ограничение формы на $v^\perp$ имеет ранг[3] 3 и сигнатуру $(1, 2)$.

БФ 2019◇3*. Найдите в $\mathbb{Q}^3$ все изотропные векторы квадратичной формы

$$x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3\,.$$

Решение. Попытаемся разложить $\mathbb{Q}^3$ в ортогональную сумму гиперболической плоскости и анизотропной прямой. Так как матрица Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

невырождена, а вектор $u_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ изотропен (это некое везение), гиперболическую плоскость $H \subset \mathbb{Q}_3$ можно натянуть на u_1 и его отражение[4] в плоскости $e_2^\perp$

$$u_2 = \sigma_{e_2}(e_1) = e_1 + 4\,e_2 = (1,\,4,\,0)\,.$$

[3]Ну а будь вектор v, к примеру, изотропным, ограничение формы на $v^\perp$ имело бы ранг 2 и сигнатуру $(0, 2)$ (подумайте, почему).

[4]Поскольку отражение является изометрией, отражение изотропного вектора в не содержащей его гиперплоскости тоже является изотропным вектором.

Поскольку $(u_1, u_2) = 4(e_1, e_2) = -8$, векторы $u_1^\vee = -u_2 / 8$ и $u_2^\vee = -u_1 / 8$ образуют ортогонально двойственный к u_1, u_2 базис в H. Ортогональная проекция вектора e_3 на H равна

$$e_{3_H} = (e_3, u_1^\vee) u_1 + (e_3, u_2^\vee) u_2 = -\frac{1}{8}(e_3, u_2) u_1 - \frac{1}{8}(e_3, u_1) u_2 = -\frac{17}{8} u_1 + \frac{1}{2} u_2 = \left(-\frac{13}{8}, \frac{16}{8}, 0\right).$$

Ортогональное дополнение $H^\perp$ порождается вектором $u_3 = 8\,\left(e_3 - e_{3_H}\right) = (13\,, -16,\, 8)$ со скалярным квадратом

$$16^2 - 4 \cdot 8^2 + 4 \cdot 13 \cdot 16 + 2 \cdot 13 \cdot 8 - 8 \cdot 16 \cdot 8 = 16 \cdot (4 \cdot 13 + 13 - 64) = 16\,.$$

В координатах $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$ относительно базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ форма приобретает вид

$$-16\, t_1 t_2 + 16\, t_3^2\,.$$

Вектор $v = \boldsymbol{u}\boldsymbol{t}^t \in \mathbb{Q}^3$ изотропен если и только если $(t_1, t_2, t_3) = (\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$ для каких-либо $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Тем самым, в стандартных координатах на $\mathbb{Q}^3$ изотропные векторы описываются формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 + 13\,\alpha\beta \\ 4\,\beta^2 - 16\,\alpha\beta \\ 8\,\alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\,.$$

БФ 2019◇4. Существует ли на $\mathbb{R}^5$ симметричная билинейная форма с главными угловыми минорами

$$\varDelta_1 = 0\,, \quad \varDelta_2 = 0\,, \quad \varDelta_3 > 0\,, \quad \varDelta_4 = 0\,, \quad \varDelta_5 < 0\,?$$

Если да, найдите её ранг, сигнатуру и приведите пример матрицы Грама с такими угловыми минорами. Если нет, детально объясните, почему.

Решение. Поскольку ограничение формы на линейную оболочку V_3 первых трёх базисных векторов e_1, e_2, e_3 невырождено и содержит изотропный вектор, его сигнатура $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Так как $\varDelta_3 > 0$, имеет место первое. Поскольку $\varDelta_4 = 0$, ортогонал к V_3 в пространстве V_4 содержит изотропный вектор. Поскольку $\varDelta_5 \neq 0$, ограничение формы на двумерное ортогональное дополнение $V_3^\perp$ во всём $\mathbb{R}^5$ невырождено и содержит изотропный вектор, т. е. является гиперболической плоскостью. Тем самым, сигнатура формы на $\mathbb{R}^5$ обязана быть $(2, 3)$. Это согласуется с тем, что $\varDelta_5 < 0$. Поэтому такая форма существует и может быть задана, к примеру, матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

БФ 2019◇5. Найдите ранг грассмановой квадратичной формы

$$\xi_1 \wedge \xi_2 - 5\xi_1 \wedge \xi_3 + 4\xi_1 \wedge \xi_4 + \xi_1 \wedge \xi_6 + \xi_2 \wedge \xi_3 - 2\xi_2 \wedge \xi_4 + 2\xi_2 \wedge \xi_5 -$$
$$- \xi_2 \wedge \xi_6 + 6\xi_3 \wedge \xi_4 - 10\xi_3 \wedge \xi_5 + 3\xi_3 \wedge \xi_6 + 8\xi_4 \wedge \xi_5 - \xi_4 \wedge \xi_6 - 2\xi_5 \wedge \xi_6\,,$$

приведя её к нормальному виду Дарбу.

Решение. Перепишем форму в виде

$$\begin{gathered} \xi_1 \wedge (\xi_2 - 5\,\xi_3 + 4\,\xi_4 + \xi_6) + \xi_2 \wedge (\xi_3 - 2\,\xi_4 + 2\,\xi_5 - \xi_6) + \\ +6\,\xi_3 \wedge \xi_4 - 10\,\xi_3 \wedge \xi_5 + 3\,\xi_3 \wedge \xi_6 + 8\,\xi_4 \wedge \xi_5 - \xi_4 \wedge \xi_6 - 2\,\xi_5 \wedge \xi_6 \end{gathered} \tag{2}$$

и положим $\eta_2 = \xi_2 - 5\,\xi_3 + 4\,\xi_4 + \xi_6$ и $\eta_i = \xi_i$ при $i \neq 2$. Тогда $\xi_2 = \eta_2 + 5\,\eta_3 - 4\,\eta_4 - \eta_6$ и во втором слагаемом суммы (2) возникает произведение двух линейных форм от $\eta_2, \dots, \eta_6$. Так как делящиеся на η_2 мономы вносят вклад только в первое слагаемое нормальной формы Дарбу, при нахождении ранга их можно далее не учитывать. Остальные коэффициенты организуем в таблицу

$$\begin{array}{cccc} \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \\ \hline 5 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1\,. \end{array}$$

Коэффициент при $\eta_i \wedge \eta_j$ в интересующем нас произведении равен стоящему в столбцах η_i и η_j минору матрицы, образованной двумя нижними строками этой таблицы. Таким образом, по модулю η_2, произведение равно

$$-6\,\eta_3 \wedge \eta_4 + 10\,\eta_3 \wedge \eta_5 + 6\,\eta_3 \wedge \eta_6 - 8\,\eta_4 \wedge \eta_5 - 6\,\eta_4 \wedge \eta_6 + 2\,\eta_5 \wedge \eta_6\,.$$

Складывая это с нижней строчкой формулы (2), заключаем, что вклад во второе и третье слагаемое нормальной формы Дарбу даётся мономами

$$9\,\eta_3 \wedge \eta_6 - 7\,\eta_4 \wedge \eta_6 = (9\,\eta_3 - 7\,\eta_4) \wedge \eta_6\,.$$

Тем самым, нормальная форма Дарбу состоит из двух слагаемых и имеет ранг 4.