Углы и отражения

Г17◇1 (группа Мёбиуса). Рассмотрим евклидову единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ как проективную квадрику с уравнением $q(x) = x_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, куда исходное $\mathbb{R}^n$ вложено в качестве стандартной аффинной карты U_0. Инволюция σ_p этой квадрики, задаваемая пучком прямых через точку p, лежащую снаружи от сферы, называется *инверсией* сферы S^{n-1} с полюсом p. Изоморфны ли друг другу следующие группы преобразований сферы S^{n-1}: **а)** преобразования, индуцированные линейными проективными автоморфизмами пространства $\mathbb{P}_n$, переводящими проективную квадрику S^{n-1} в себя **б)** преобразования, индуцированные линейными автоморфизмами векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющими квадратичную форму q **в)** группа, порождённая всевозможными инверсиями.

Г17◇2 (модель Пуанкаре в шаре). Отождествим пространство $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ с точками единичного шара $B_1^n = \{(1, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1\}$ в стандартной аффинной карте $U_0 \subset \mathbb{P}^n$ и обозначим через $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ единичную сферу с центром в нуле. Параллельная проекция вдоль оси x_0 отождествляет B_1^n с полусферой $x_0 \geqslant 0$ в S^n. Центральная проекция из $(-1, 0, 0, \dots 0)$ на экваториальную плоскость $x_0 = 0$ отождествляет эту полусферу с шаром $B_0^n = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1\}$. Итого: $\mathbb{L}^n \simeq B_1^n \simeq B_0^n$. Покажите, что: **а)** геодезические изображаются в B_0^n всевозможными диаметрами этого шара, а также дугами всевозможных окружностей, пересекающих его границу под прямым углом **б)** угол между геодезическими в $\mathbb{L}^n$ равен евклидову углу между их изображениями в B_0^n.

Г17◇3. Как выглядят в модели B_0^2 плоскости $\mathbb{L}^2$: **а)** пучок окружностей с данным центром **б)** отражение относительно прямой $e^\perp$ (где $(e, e)_h < 0$) **в)** срединный перпендикуляр к отрезку?

Г17◇4. Покажите, что у тетраэдра в $\mathbb{L}^3$ с вершинами на абсолюте **а)** объём конечен **б)** противоположные двугранные углы равны **в)** сумма двугранных углов при вершине равна π.

Г17◇5. Куб в $\mathbb{L}^3$ имеет двугранный угол α, а угол β между выходящими из одной вершины и лежащими в одной грани сторонами. Найдите $\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)$.

Многогранники Кокстера Пусть X это сфера S^n, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ или пространство Лобачевского $\mathbb{L}_n$. Выпуклый многогранник $M \subset X$ с гипергранями $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$ называется *кокстеровским*, если двугранный угол между любыми двумя непараллельными гипергранями Π_i, Π_j равен π/m_{ij} с $m_{ij} \in \mathbb{N}$. В этом случае группа, порождённая отражениями σ_i в гиперплоскостях Π_i, называется *группой Кокстера* и обозначается G_M. Гиперплоскости вида $g(\Pi_j)$ с $g \in G_M$ называются *зеркалами*. Отражение в зеркале Π обозначается σ_Π.

Г17◇6. Пусть $\Pi = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_m}\Pi_j$. Выразите σ_Π через порождающие отражения σ_i.

Г17◇7 (приведённые слова[1]). Пусть $B \in X$ не лежит ни на каком на зеркале. Покажите, что **а)** существует точка $A \in M$, такая что отрезок $[A, B]$ не пересекает пересечений зеркал **б)** последовательность номеров зеркал $i_1, i_2, i_3, \dots$, возникающая при движении по $[A, B]$ от A к B так, что i_1 — номер первой гиперграни в M, которую пересекает $[A, B]$, i_2 — номер следующей гиперграни (в симметричном многограннике $\sigma_{i_1}(M)$), которую пересекает $[A, B]$, и т. д., всегда конечна (она называется *приведённым словом*) **в)** $B \in \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_m}M$ для $i_1, i_2, \dots, i_m$ приведённого слова, отвечающего любому допустимому выбору точки $A \in M$, причём разные произведения $\sigma'_{i_1}\sigma'_{i_2}\cdots\sigma'_{i_{m'}}$, которые могут возникнуть при другом выборе точки $A \in M$ (при фиксированном B) или B внутри $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m}M$ (при фиксированном A), все равны друг другу в группе G_M **г)** образы многогранника M под действием преобразований из G_M покрывают всё пространство X и любые два таких образа либо не имеют общих внутренних точек, либо совпадают **д)** любой элемент $g \in G_M$ записывается каким-нибудь приведённым словом $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m}$, причём более короткого по числу букв выражения g через s_i нет **е)** соотношения между s_j составляют наименьшую нормальную подгруппу свободной группы с образующими s_j, которая содержит все слова вида $(s_i s_j)^{2m_{ij}}$ для любых не параллельных граней Π_i, Π_j.

Г17◇8. Опишите все многоугольники Кокстера **а)** на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ **б)** на сфере S^2.

[1]задачу достаточно решить для $n = 2$, но решения, обобщающиеся и на любое n, особенно приветствуются

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
3а			
б			
в			
4а			
б			
в			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
8а			
б			