

## Выпуклые многогранные конусы

Г9♦1. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством

а) вершин б) крайних точек.

ВМК или *выпуклый многогранный конус* на векторах  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V \simeq \mathbb{R}^n$  это множество вида  $\sigma = \sigma_{v_1 v_2 \dots v_m} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \mid \forall i \lambda_i \geq 0\} \subset V$ . Множество ковекторов  $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma \xi(v) \geq 0\} \subset V^*$  называется *двойственным конусом* к вМК  $\sigma$ . Пересечения  $\sigma \cap \text{Ann}(\xi)$ , где  $\xi \in \sigma^\vee$ , называются *гранями*  $\sigma$ . Грани, отличные от  $\sigma$ , называются *собственными*. Под *размерностью* вМК  $\sigma$  понимается размерность его линейной оболочки. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*. Для гипергранни  $\tau$   $n$ -мерного вМК  $\sigma$  мы обозначаем через  $\xi_\tau \in \sigma^\vee$  базисный вектор в  $\text{Ann} \tau$ .

Г9♦2. Покажите, что для любого вМК  $\sigma$  и любого вектора  $w \notin \sigma$  существует  $\xi \in \sigma^\vee$  с  $\xi(w) < 0$ .

Г9♦3. Покажите, что  $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geq 0 \ \forall \xi \in \sigma^\vee\}$ .

Г9♦4. Покажите, что грани  $\sigma$  суть вМК и что грань грани и пересечение граней суть грани  $\sigma$ .

Г9♦5. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вМК  $\sigma$ :

- а)  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$       б)  $\sigma^\vee$  линейно порождает  $V^*$       в)  $\exists \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \text{Ann}(\xi) = \{0\}$   
 г)  $\sigma$  не содержит ненулевых векторных подпространств из  $V$ .

Г9♦6. Покажите, что минимальная по включению грань конуса  $\sigma$  равна  $\sigma \cap (-\sigma)$ .

Г9♦7. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вМК  $\sigma$  и вектор  $v \in \sigma$ : а) линейная оболочка  $\sigma$  совпадает с  $\{w - \lambda v \mid w \in \sigma, \lambda \geq 0\}$  б)  $\forall \xi \in \sigma^\vee \setminus \text{Ann}(\sigma) \ \xi(v) > 0$  в)  $v$  внутренняя точка<sup>1</sup> конуса  $\sigma$  г)  $\forall w \in \sigma \exists u \in \sigma : u + w = \lambda v$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  д)  $\sigma^\vee \cap \text{Ann}(v) = \text{Ann}(\sigma)$ .

Г9♦8. Верно ли что два не содержащихся в гиперплоскостях двойственных конуса  $\sigma \in V$  и  $\sigma^\vee \in V^*$  имеют одинаковое число одномерных граней?

Г9♦9. Покажите, что выпуклый подконус  $\eta \subset \sigma$  является гранью конуса  $\sigma$ , если и только если  $\forall v_1, v_2 \in \sigma \ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$ .

Г9♦10. Покажите, что любая собственная грань  $\tau \subsetneq \sigma$  а) содержится в некоей гипергранни конуса  $\sigma$  б) является пересечением всех содержащих её гиперграней конуса  $\sigma$ .

Г9♦11. Для линейно порождающего  $V$  вМК  $\sigma \neq V$  докажите, что а)  $\partial\sigma$  является объединением гиперграней б) ковекторы  $\xi_\tau \in V^*$ , задающие гипергранни  $\sigma \subset \tau$ , содержатся в следующем конечном множестве  $\Phi$ : перебираем все линейно независимые наборы из  $(n-1)$  векторов  $v_i$ ; для каждого из них находим  $\xi \in V^*$ , порождающий его аннулятор; если  $\xi$  или  $-\xi$  неотрицателен на всех  $v_i$ , включаем его (с нужным знаком) в  $\Phi$ , если нет — то нет в)  $\sigma = \bigcap_{\tau} H_{\xi_\tau}^+$ , где  $\tau \subset \sigma$  пробегает все гипергранни  $\sigma$  г)  $\sigma^\vee$  это тоже вМК.

Г9♦12. Покажите, что сопоставление грани  $\tau \subset \sigma$  множества  $\text{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset \sigma^\vee$  корректно задаёт обращающую включения биекцию между гранями  $\sigma$  и  $\sigma^\vee$ .

Г9♦13. Пусть  $\xi \in \sigma^\vee$  и  $\tau = \text{Ann}(\xi) \cap \sigma$ . Верно ли, что  $\tau^\vee = \{\zeta - \lambda \xi \mid \zeta \in \sigma^\vee, \lambda \geq 0\}$ ?

Г9♦14. Пусть вМК  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пересекаются по общей грани  $\tau$ . Верно ли, что  $\tau = \sigma_1 \cap \text{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \text{Ann}(\xi)$  для некоторого  $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$ ?

Г9♦15. Обозначим через  $W \subset V$  линейную оболочку грани  $\tau$  вМК  $\sigma \subset V$ . Покажите, что  $\sigma + W$  является вМК в фактор пространстве  $V/W$ , причём его грани — это в точности  $\eta + W$ , где  $\eta$  пробегает все содержащие  $\tau$  грани  $\sigma$ .

Г9♦16. Для любого выпуклого многогранника  $M \subset A(V)$  докажите, что

- а) вМК, натянутый на все рёбра, выходящие из произвольной вершины  $M$ , содержит  $M$   
 б) из любой вершины  $M$  можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам  
 в) если  $\xi \in V^*$  ограничен на  $M$ , то  $\max_{x \in M} \xi(x)$  достигается в некоторой вершине  $p \in M$   
 г) для того, чтобы  $\xi(p) = \max_{x \in M} \xi(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\xi \in V^*$  не увеличивал своего значения вдоль всех выходящих из  $p$  рёбер  $M$ .

<sup>1</sup>в топологии линейной оболочки конуса  $\sigma$ .

| №   | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|-----|------------|--------------------------|--------------------|
| 1а  |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| 2   |            |                          |                    |
| 3   |            |                          |                    |
| 4   |            |                          |                    |
| 5а  |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| в   |            |                          |                    |
| г   |            |                          |                    |
| 6   |            |                          |                    |
| 7а  |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| в   |            |                          |                    |
| г   |            |                          |                    |
| д   |            |                          |                    |
| 8   |            |                          |                    |
| 9   |            |                          |                    |
| 10а |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| 11а |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| в   |            |                          |                    |
| г   |            |                          |                    |
| 12  |            |                          |                    |
| 13  |            |                          |                    |
| 14  |            |                          |                    |
| 15  |            |                          |                    |
| 16а |            |                          |                    |
| б   |            |                          |                    |
| в   |            |                          |                    |
| г   |            |                          |                    |