

### Евклидовы расстояния и углы.

- Г5♦1. Две различных гиперплоскости в  $\mathbb{R}^n$  заданы уравнениями:  $\sum a_i x_i = c$  и  $\sum b_i x_i = d$ .
- Найдите угол между ними<sup>1</sup>, а если он нулевой — расстояние.
  - Покажите, что равноудалённые от этих гиперплоскостей точки образуют пару перпендикулярных гиперплоскостей, и задайте их явными уравнениями.
- Г5♦2. Точки  $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$  не содержатся в одной  $(k - 1)$ -мерной плоскости. Опишите ГМТ, равноудалённых от всех точек  $p_i$ .
- Г5♦3. Три вектора в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  таковы, что все скалярные произведения между ними неотрицательны. Всегда ли найдётся такой ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^3$ , что все три данных вектора окажутся в одном координатном октанте?
- Г5♦4. Два вектора в евклидовом пространстве лежат по одну сторону от данной гиперплоскости. Угол между векторами тупой. Верно ли, что угол между их ортогональными проекциями на гиперплоскость тоже тупой?
- Г5♦5. Какое максимальное число векторов можно выпустить из заданной точки евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  так, чтобы все попарные углы между ними были тупыми?
- Г5♦6 (куб). В стандартном  $n$ -мерном кубе  $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1\}$  найдите:
- количество внутренних<sup>2</sup> диагоналей, ортогональных заданной внутренней диагонали
  - длину внутренней диагонали (диаметр описанного шара) и её предел при  $n \rightarrow \infty$
  - угол между внутренней диагональю и ребром и его предел при  $n \rightarrow \infty$
  - отношения, в которых внутренняя диагональ делится ортогональными проекциями на неё всех вершин куба
- Г5♦7. Сколько трёхмерных плоскостей симметрии у четырёхмерного куба?
- Г5♦8 (симплекс). В стандартном  $n$ -мерном симплексе  $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$  найдите
- радиусы вписанного и описанного шаров и их пределы при  $n \rightarrow \infty$
  - угол между ребром и не содержащей его  $(n - 1)$ -мерной гранью
  - угол<sup>3</sup> между ребром и противоположащей ему  $(n - 2)$ -мерной гранью<sup>4</sup>
  - кратчайшее расстояние между противоположными<sup>5</sup>  $m$ - и  $(n - m - 1)$ -мерными гранями.
- Г5♦9. Найдите радиус шара, описанного в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^5$  вокруг пирамиды с вершиной в точке  $(1, 0, 0, 0, 0)$ , основанием которой является лежащий в гиперплоскости  $x_1 = 0$  правильный четырёхмерный симплекс, описанный около единичного шара с центром в нуле.
- Г5♦10 (кокуб). Выпуклая оболочка<sup>6</sup> центров граней стандартного куба  $I^n$  называется стандартным кокубом  $C^n$ . а) Задайте  $C^n$  системой линейных (неоднородных) неравенств и найдите количество граней каждой размерности. б) Нарисуйте 2-мерную параллельную проекцию 4-мерного кокуба  $C^4$ , на которой все вершины и все рёбра различны. в) Найдите радиусы вписанного и описанного шаров  $n$ -мерного кокуба  $C^n$  и их пределы при  $n \rightarrow \infty$ .
- Г5♦11. Верно ли что середины рёбер а) трёхмерного б) четырёхмерного правильного симплекса являются вершинами правильного кокуба?
- Г5♦12\* (октаплекс). Нарисуем в  $\mathbb{R}^4$  стандартный куб  $I^4$  и гомотетичный стандартному кокуб, все вершины которого лежат на описанной вокруг  $I^4$  сфере. Выпуклая оболочка вершин куба и кокуба называется *октаплексом*. Подсчитайте у него а) количество граней каждой размерности б) длины рёбер и радиус вписанного шара. Выясните, как выглядят в) 3-мерные гиперграни и каковы их объёмы г) 2-мерные грани и каковы их площади.

<sup>1</sup>Т. е. угол между прямыми, что высекаются гиперплоскостями в плоскости, ортогональной их пересечению.

<sup>2</sup>Т. е. не лежащих в гранях.

<sup>3</sup>Напомним, что  $\angle(v, U) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u \in U \setminus \{0\}} \angle(v, u)$  для вектора  $v$  подпространства  $U$ .

<sup>4</sup>Т. е. аффинной оболочкой  $n - 1$  вершин, не являющихся концами этого ребра.

<sup>5</sup>Т. е. не пересекающимися или, что то же самое, натянутыми на дополнительные множества вершин.

<sup>6</sup>Т. е. множество всех барицентрических комбинаций с неотрицательными весами.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10а			
б			
в			
11а			
б			
12а			
б			
в			
г			