

**Мёбиусова геометрия плоскости.**

- Г3½◊1. Даны окружность  $C$  и две разных точки  $p, q \notin C$ . Покажите, что существует единственная окружность или прямая, проходящая через  $p, q$  и перпендикулярная  $C$ , и постройте её циркулем и линейкой.
- Г3½◊2. Даны две пары различных точек  $a \neq b$  и  $a' \neq b'$ . Покажите, что существует единственное преобразование, являющееся поворотной гомотетией или сдвигом, переводящее  $a$  в  $a'$  и  $b$  в  $b'$ . Циркулем и линейкой укажите центр поворота или вектор сдвига этого преобразования.
- Г3½◊3. Покажите, что каждое мёбиусово преобразование проективной прямой  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , не оставляющее на месте точку  $\infty$ , единственным образом представляется в виде композиции инверсии и движения, а всякое мёбиусово преобразование, переводящее  $\infty$  в себя, является подобием.
- Г3½◊4. Покажите, что любая пара непересекающихся окружностей переводится подходящей инверсией в пару концентрических окружностей, и выясните, при каком условии на радиусы две концентрических окружности переводятся одна в другую мёбиусовым преобразованием.
- Г3½◊5. Покажите, что любая пара пересекающихся (соотв. касающихся) окружностей переводится инверсией в пару пересекающихся (соотв. параллельных) прямых, и выясните, когда две такие пары прямых переводятся одна в другую мёбиусовым преобразованием.
- Г3½◊6 (окружность Апполония). Даны две различные точки  $p, q \in \mathbb{C}$  и положительное число  $\mu \in \mathbb{R}$ . Покажите, что ГМТ  $z: |z-p| = \mu \cdot |z-q|$  это окружность, причём точки  $p, q$  инверсны относительно этой окружности.
- Г3½◊7 (пучки окружностей). Множество всех окружностей, проходящих через две различных заданных точки, называется *пучком пересекающихся окружностей*, множество всех окружностей, касающихся заданной окружности в заданной точке, — *пучком касающихся окружностей*, а множество всех окружностей, относительно которых две заданные точки инверсны друг другу, — *пучком непересекающихся окружностей*. Покажите, что а) все окружности Апполония двух данных точек образуют пучок непересекающихся окружностей б) все окружности, ортогональные двум данным окружностям, образуют пучок того же типа, что и эти окружности в) любые две различные окружности содержатся в единственном пучке г) инверсия относительно любой окружности в пучке переводит любую окружность пучка в окружность из того же пучка.
- Г3½◊8. Для каждого из трёх случаев взаимного расположения пары заданных окружностей<sup>1</sup> опишите все инверсии, которые переводят их друг в друга.
- Г3½◊9. Пользуясь одним только циркулем, постройте а) середину данного отрезка б) точку, инверсную данной относительно данной окружности в) образ прямой, проходящей через две данные точки, при инверсии относительно данной окружности г) точку пересечения прямой, проходящей через две данные точки, с данной окружностью д) точку пересечения двух прямых, проходящих через две пары данных точек.
- Г3½◊10. Докажите, что двойное отношение четырёх точек, высекаемых двумя данными окружностями  $C_1$  и  $C_2$  на ортогональной им окружности одинаково для всех ортогональных окружностей. Выясните, при каких его значениях  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Выразите угол между  $C_1$  и  $C_2$  через это двойное отношение.
- Г3½◊11 (теорема Фейербаха). Покажите, что окружность, проходящая через середины сторон данного треугольника, касается его вписанной и всех трёх внеписанных окружностей.

<sup>1</sup>Пересечение по двум разным точкам, касание, пустое пересечение.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
8			
9а			
б			
в			
г			
д			
10			
11			