Векторы, точки и прямые.

Через $\Bbbk^2$ обозначается 2-мерное координатное *векторное* пространство над полем $\Bbbk$ (всюду кроме ?? можно считать, что $\Bbbk = \mathbb{R}$). Все точечные фигуры живут в ассоциированном с $\Bbbk^2$ *аффинном* пространстве $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2(\Bbbk)$. Прямые *определяются* как на лекции, и задачи надо решать исходя именно из этого определения.

Г1◇1 (правило Крамера). Найдите точку пересечения прямых $a_1x_1 + a_2x_2 = \alpha$ и $b_1x_1 + b_2x_2 = \beta$ в $\mathbb{A}_2$, и докажите, что две прямые в $\mathbb{A}_2$ либо совпадают, либо не пересекаются и имеют пропорциональные векторы скорости, либо пересекаются ровно в одной точке.

Г1◇2. Напишите уравнение прямой в $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, проходящей: **а)** через точку $(2, -3)$ параллельно вектору $(5, 2)$ **б)** через точки $(-3, 5)$ и $(4, -1)$ и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями **в)** $3x_1 + 5x_2 = -1$ **г)** $2x_1 - 3x_2 = 5$.

Г1◇3. Лежат ли на одной прямой в $\mathbb{A}_2$: **а)** середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения боковых сторон произвольного четырёхугольника? **б)** пересечение боковых сторон, пересечение диагоналей и середины оснований произвольной трапеции?

Г1◇4. Сколько прямых имеется на плоскости над конечным полем $\Bbbk$, состоящем из q чисел?

Г1◇5 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют центры масс c_p и c_q соответственно, причём все три суммы $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Совпадает ли центр масс объединения этих наборов[1] с центром масс пары точек c_p и c_q, взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$?

Г1◇6. Нарисуйте все точки в $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, барицентрические координаты[2] (α, β, γ) которых относительно данного $\triangle\, ABC$ удовлетворяют условиям: **а)** $\alpha, \beta, \gamma > 0$ **б)** $\alpha, \beta > 0$, $\gamma < 0$ **в)** $\alpha = \beta$ **г)** $\alpha, \beta > 1/3$, $\gamma > 0$ **д)** $\alpha \geqslant \beta$ **е)** $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ и напишите условия на (α, β, γ), задающие: **ж)** 6 треугольников, на которые $\triangle\, ABC$ разрезается медианами **з)** треугольники гомотетичные $\triangle\, ABC$ с коэффициентами 3 и 1/3 относительно точки пересечения медиан.

Г1◇7 (Теорема Чевы). Пусть на прямых BC, AC и AB, соединяющих три неколлинеарных точки A, B, C, отмечены точки $A_1 = \alpha_B B + \alpha_C C$, $B_1 = \beta_A A + \beta_C C$, $C_1 = \gamma_A A + \gamma_B B$. Покажите, что в точки A, B, C можно поместить веса α, β, γ так, что центр тяжести точек A и B находится в точке C_1, точек B и C — в точке A_1, а точек C и A — в точке B_1, если и только если $\frac{\alpha_B}{\alpha_C} \cdot \frac{\beta_C}{\beta_A} \cdot \frac{\gamma_A}{\gamma_B} = 1$. Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения трёх прямых (AA_1), (BB_1), (CC_1) через одну точку.

Г1◇8 (теорема Менелая). Покажите, что точки A_1, B_1 и C_1, лежащие на прямых BC, CA и AB соответственно, коллинеарны , если и только если $(\overrightarrow{A_1B} : \overrightarrow{A_1C}) \cdot (\overrightarrow{B_1C} : \overrightarrow{B_1A}) \cdot (\overrightarrow{C_1A} : \overrightarrow{C_1B}) = 1$.

Г1◇9. Дана замкнутая ломаная с нечётным числом вершин. Обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_m$ середины её последовательных сторон, через x_0 — произвольную точку, а через x_i — результат центрально симметричного отражения точки x_{i-1} относительно точки s_i, где $i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ m$. Всегда ли середина отрезка $[x_0, x_m]$ является вершиной данной ломаной?

Г1◇10*. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на 3 равные части и соответственные точки деления на противоположных сторонах соединены так, что четырёхугольник разбивается на 9 меньших четырёхугольников. Найдите отношение площади среднего из них к площади исходного четырёхугольника.

Г1◇11*. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ идут из начала координат O в вершины правильного n-угольника с центром в O, но занумерованы случайно. Может ли удвоенная площадь этого многоугольника оказаться меньше суммы $\det(v_1, v_2) + \det(v_2, v_3) + \cdots + \det(v_{n-1}, v_n) + \det(v_n, v_1)$?

---

[1] «объединение» совпадающих точек заключается в сложении их весов

[2] Напомню, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Персональный табель ________________________________. Листок 1 (7 сентября)

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
7			
8			
9			
10			
11			