

А. Л. Городенцев*

ГЕОМЕТРИЯ

Это интенсивный годовой курс геометрии для студентов-математиков. Все встречающиеся в тексте упражнения существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. К некоторым из них есть комментарии в конце книги.

Москва
2016/17 уч. год

* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, e-mail: gorod@itep.ru, <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
Неформальное введение	5
§1 Аффинная плоскость	8
1.1 Векторные пространства	8
1.2 Двумерное векторное пространство	10
1.3 Площадь ориентированного параллелограмма	12
1.4 Аффинные пространства	14
1.5 Прямые	16
1.6 Треугольники	18
§2 Аффинная группа	24
2.1 Аффинные отображения	24
2.2 Аффинные автоморфизмы	25
2.3 Сравнение аффинной и линейной групп	26
2.4 Запись линейных и аффинных преобразований в координатах	28
2.5 Преобразования, переводящие прямые в прямые	29
§3 Евклидова плоскость = комплексная прямая	33
3.1 Расстояния и перпендикулярность	33
3.2 Ортонормальные базисы	36
3.3 Углы и тригонометрия	38
3.4 Движения	40
3.5 Комплексные числа	44
3.6 Преобразования подобия	46
3.7 Проективная прямая и круговые преобразования	47
§4 Многомерие	55
4.1 Базисы и размерность	55
4.2 Линейные отображения	57
4.3 Подпространства	60
4.4 Двойственность	62
4.5 Аффинные пространства	65
4.6 Фактор пространства	67
4.7 Двойственные линейные отображения	69
§5 Объёмы и определители	71
5.1 Объём n -мерного ориентированного параллелепипеда	71
5.2 Определители	74
5.3 Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки	76
5.4 Правила Крамера	77
5.5 Объём и барицентрические координаты	82
5.6 Алгебраическое отступление: грасмановы многочлены	84
§6 Евклидова геометрия	90
6.1 Евклидовы пространства	90

6.2	Матрицы Грама	93
6.3	Евклидова двойственность	95
6.4	Ортогональное проектирование	96
6.5	Сферы	100
§7	Группы ортогональных преобразований	106
7.1	Линейная ортогональная группа	106
7.2	Группы отражений	111
7.3	Системы корней и камеры Вейля	118
7.4	Графы Кокстера	122
§8	Топологии, метрики, нормы и выпуклость	128
8.1	Топологические пространства	128
8.2	Метрические пространства	134
8.3	Нормы	138
8.4	Выпуклость	140
§9	Выпуклые многогранники и многогранные конусы	147
9.1	Выпуклые многогранники	147
9.2	Выпуклые многогранные конусы	150
9.3	Линейная оптимизация и двойственность Гейла	158
9.4	Симплекс-метод	161
§10	Проективное пространство	171
10.1	Проективное пространство	171
10.2	Задание фигур полиномиальными уравнениями	175
10.3	Дополнительные подпространства и проекции	179
10.4	Линейные проективные изоморфизмы	181
10.5	Гомографии	182
10.6	Двойное отношение	185
§11	Проективные квадрики	189
11.1	Квадрики и их уравнения	189
11.2	Полярные преобразования	193
11.3	Коники	195
11.4	Внутренняя геометрия гладкой коники	200
11.5	Квадратичные поверхности	205
11.6	Подпространства, лежащие на квадриках	207
§12	Пространства со скалярным произведением	209
12.1	Скалярные произведения	209
12.2	Изотропные и анизотропные подпространства	210
12.3	Изометрии	212
12.4	Вещественные квадратичные формы	216
12.5	Аффинные квадрики	218
12.6	Линейные операторы на пространстве со скалярным произведением	226
§13	Дальнейшие вариации на темы квадрик	230
13.1	Квадрика Плюккера	230
13.2	Пучки квадрик	236

13.3 Евклидовы коники	243
§14 Вещественные неевклидовы геометрии	252
14.1 Проективизация пространства со скалярным произведением	252
14.2 Эллиптическая геометрия	257
14.3 Сферическая форма объёма	264
14.4 Гиперболическая геометрия	267
14.5 Гиперболическая форма объёма	275
14.6 Конформные модели гиперболического пространства	278
Ответы и указания к некоторым упражнениям	282

Неформальное введение

Аксиомы или определения? Есть две точки зрения на то, как должен быть организован курс геометрии. Восходящий к Евклиду аксиоматический подход лежит в основе большинства школьных учебников, хотя является не самым простым — удовлетворительная с точки зрения математической логики система «аксиом Евклида» была предложена Д. Гильбертом только в начале XX века, и лишь спустя ещё несколько десятков лет была адаптирована А. Н. Колмогоровым так, что вошла в регулярный школьный учебник¹ в виде нескольких страниц убористого петита в добавлении, предназначенном для факультативного изучения. Альтернативный «аналитический» подход вместо аксиоматического описания основных геометрических понятий (точек, прямых, их взаимного расположения и т. п.) даёт всем используемым объектам *явные определения*, основанные на известном из алгебры и анализа понятии числа.

Так, вещественную плоскость \mathbb{R}^2 можно *определить* как множество, точками в котором являются пары вещественных чисел $p = (p_1, p_2)$, а прямую на такой плоскости — как траекторию точки, равномерно движущейся в заданном направлении, т. е. как ГМТ² вида $p + v \cdot t = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \cdot t = (p_1 + v_1 t, p_2 + v_2 t)$, где параметр $t \in \mathbb{R}$ играет роль времени, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ это произвольным образом выбранная точка, отвечающая нулевому моменту времени, а *вектор* $v = (v_1, v_2)$ задаёт скорость движения. При таком определении высказывания о том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая и что через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой ℓ , проходит ровно одна прямая, не пересекающая ℓ , становятся *теоремами*.

УПРАЖНЕНИЕ о.г. Докажите эти две теоремы.

Точки и векторы. Вектор $v = (v_1, v_2)$, хотя и записывается формально точно такой же парой чисел, как и точка p , является объектом совершенно иной геометрической природы. Вектор v правильно представлять себе как *преобразование сдвига*³

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto p + v,$$

переводящее каждую точку $p = (p_1, p_2)$ в точку $\tau_v(p) = p + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$. Координаты (v_1, v_2) вектора v суть числа, описывающие *этот сдвиг*, т. е. разности $\tau_v(p) - p$, одинаковые для всех точек $p \in \mathbb{R}^2$. При переносе начала координат из нуля в какую-нибудь другую точку $a = (a_1, a_2)$ координаты каждой точки p поменяются и станут равны $(p_1 - a_1, p_2 - a_2)$, тогда как координаты векторов *не изменятся*.

Группы преобразований. Рассмотрим произвольное множество X и обозначим через $\text{End}(X)$ множество всех отображений $f : X \rightarrow X$ из X в себя⁴. На множестве $\text{End}(X)$ име-

¹Замечательная книга под редакцией А. Н. Колмогорова, служившая основным официальным пособием по геометрии для школ в 70-х – 80-х годах прошлого века.

²Здесь и далее аббревиатура «ГМТ» используется для сокращения фразы «геометрическое место точек».

³Или *параллельный перенос*.

⁴Такие отображения обычно называют *эндоморфизмами* множества X , откуда и обозначение.

ется естественная операция *композиции*, сопоставляющая упорядоченной паре отображений $f : X \rightarrow X$, $g : X \rightarrow X$, результат их последовательного выполнения справа налево: $f \circ g : X \rightarrow X$, $x \mapsto f(g(x))$.

УПРАЖНЕНИЕ 0.2. Приведите пример множества X и таких трёх отображений $f, g, h : X \rightarrow X$, что а) $f \circ g \neq g \circ f$ б) $f \circ h = g \circ h$, но $f \neq g$ в) $h \circ f = h \circ g$, но $f \neq g$.

Множество отображений $G \subset \text{End}(X)$ называется *группой*, если все отображения $g \in G$ взаимно однозначны¹, и вместе с каждым отображением $g \in G$ обратное ему отображение² g^{-1} тоже принадлежит G , а вместе с любыми двумя отображениями $g_1, g_2 \in G$ в G лежит и их композиция $g_1 \circ g_2$. Отметим, что из этих требований вытекает, что тождественное отображение Id_X , переводящее каждую точку в себя, автоматически содержится в G , поскольку представимо в виде композиции $\text{Id}_X = g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$, где $g \in G$ — любое преобразование из группы.

Группа сдвигов. Параллельные переносы плоскости \mathbb{R}^2 на всевозможные векторы образуют группу: обратным преобразованием к сдвигу τ_v на вектор $v = (v_1, v_2)$ является сдвиг $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$ на *противоположный* вектор $-v = (-v_1, -v_2)$, а композиция сдвигов на векторы $u = (u_1, u_2)$ и $w = (w_1, w_2)$ это сдвиг на вектор

$$u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2). \quad (0-1)$$

Подчеркнём, что эта формула является координатной записью для операции *композиции отображений*, которая сама по себе определяется *без использования координат*. Из формулы (0-1) вытекает, что не смотря на [упр. 0.2](#) композиция сдвигов не зависит от того, какой сдвиг делается первым, а какой — вторым. Группа, состоящая из попарно перестановочных друг с другом преобразований³ называется *коммутативной* или *абелевой*. Таким образом, векторы составляют абелеву группу преобразований плоскости \mathbb{R}^2 .

Отметим, что на множестве *точек* никакого естественного сложения нет. Скажем, если пытаться определить «сумму точек» складывая их координаты, то одна и та же пара точек будет иметь разные суммы в разных координатных системах, поскольку при сдвиге начала координат в точку a от координат всех точек отнимаются координаты точки a , и точки, имевшие в исходной координатной системе координаты

$$(p_1, p_2), \quad (q_1, q_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

в сдвинутой координатной системе приобретают координаты

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2), \quad (q_1 - a_1, q_2 - a_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1 - a_1, p_2 + q_2 - a_2)$$

так что «сумма» первых двух из них оказывается не равна третьей.

¹Т. е. у каждой точки $y \in X$ имеется ровно один прообраз $x \in X : g(x) = y$.

²Переводящее каждую точку $y \in X$ в её прообраз $x = g^{-1}(y) \in X : g(x) = y$.

³Т. е. $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

Как устроен этот курс. Мы будем следовать схеме, предложенной в 30-х годах XX века Г. Вейлем. Первичным геометрическим объектом для нас будет *векторное пространство* — абелева группа *векторов*, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по известным из школы правилам. Мы напомним список этих правил в §1 — он гораздо короче и удобнее любого списка аксиом евклидовой геометрии. Далее мы свяжем с векторными пространствами разные *точечные* пространства, в которых можно будет рисовать фигуры и изучать свойства этих фигур по отношению к различным геометрическим преобразованиям. Подчеркнём, что в конечном итоге все эти свойства будут *выводиться* из алгебраических свойств операций с векторами.

Первым делом мы покажем, как вписывается в эту картину школьная планиметрия — дадим *определение* вещественной евклидовой плоскости, основанное на свойствах векторов, и убедимся в том, что в ней выполняются все постулаты и теоремы школьной планиметрии. Затем это построение будет распространено на пространства любых размерностей над любыми полями констант.

О числах. Понятие *числа* столь же фундаментально для геометрии, сколь и понятие *вектора*. Чтобы перечислить свойства векторов необходимо зафиксировать множество констант, на которые векторы можно умножать. Для нас будет существенно, что константы образуют *поле*, т. е. их можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же законам, что рациональные числа. Мы всегда обозначаем поле констант через \mathbb{k} и называем его *основным полем* или *полем определения* рассматриваемой геометрии. Если специально не оговаривается противное, читатель на первых порах может без ущерба для понимания происходящего считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ есть поле рациональных, действительных или комплексных чисел (выбирайте наиболее привычное). Однако, то обстоятельство, что многие из доказываемых ниже теорем справедливы *над любым* основным полем, следует всё-таки иметь в виду. Скажем, над полем вычетов по простому модулю p , которое состоит из p чисел, геометрические пространства становятся конечными множествами, и некоторые всем привычные картинки в этих пространствах превращаются в любопытные комбинаторные утверждения.

§1. Аффинная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле \mathbb{k} , элементы которого будут далее именоваться числами. Множество V , элементы которого именуются векторами¹, называется векторным пространством над полем \mathbb{k} , если на V имеются операция сложения векторов, сопоставляющая каждой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и операция умножения векторов на числа, сопоставляющая каждому вектору $v \in V$ и каждому числу $\lambda \in \mathbb{k}$ вектор $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$, так что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

(1а) $\forall a, b \in V \quad a + b = b + a$ (см. рис. 1◊1)

(1б) $\forall a, b, c \in V \quad a + (b + c) = (a + b) + c$ (см. рис. 1◊2)

(1в) \exists такой нулевой вектор $0 \in V$, что $\forall a \in V \quad a + 0 = a$

(1г) $\forall a \in V \quad \exists$ противоположный вектор $-a \in V$, такой что $a + (-a) = 0$

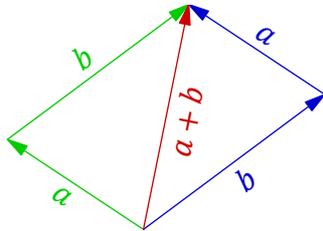


Рис. 1◊1. Правило параллелограмма.

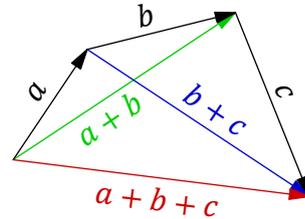


Рис. 1◊2. Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

(2а) $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k} \quad \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

(2б) $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k} \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(2в) $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

(2г) $\forall a \in V \quad 1 \cdot a = a$

Подмножество U векторного пространства V называется векторным подпространством, если для любых двух векторов $u, w \in U$ все их линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ с произвольными $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ тоже лежат в U . Из предыдущих аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

ЛЕММА 1.1

В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единствен. Для любого $a \in V$ противоположный к a вектор $-a$ однозначно определяется по a . Кроме того, $0 \cdot a = 0$ и $(-1) \cdot a = -a$, где 0 и -1 в левых частях равенств суть числа из поля \mathbb{k} , а 0 и $-a$ в правых — векторы из пространства V .

¹Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ по аксиоме (1в) выполняется равенство $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. Если векторы b и c оба противоположны к a , то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$. Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к a вектор $-a$, мы получим $0 \cdot a = 0$. Вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a , поскольку $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. \square

ПРИМЕР 1.1

Тривиальные примеры векторных пространств — это *нулевое пространство* 0 , состоящее из одного лишь нулевого вектора 0 , такого что $0+0 = 0 = -0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{k}$, а также само поле \mathbb{k} , где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле \mathbb{k} .

ПРИМЕР 1.2 (n -МЕРНОЕ КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО \mathbb{k}^n)

По определению, векторами пространства \mathbb{k}^n являются упорядоченные наборы из n чисел¹

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{k}.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.3 (ПРОСТРАНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ)

Многочлены с коэффициентами в поле \mathbb{k} образуют векторное пространство над \mathbb{k} относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается $\mathbb{k}[x]$. Многочлены степени не выше n образуют в $\mathbb{k}[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$.

1.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \rightarrow W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$ для всех $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы $V \simeq V$ пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства V образуют *группу преобразований*². Эта группа обозначается $GL(V)$ и называется *полной линейной группой* векторного пространства V .

ПРИМЕР 1.4

Пространство $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ многочленов степени не выше n изоморфно $(n + 1)$ -мерному координатному пространству \mathbb{k}^{n+1} посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ набор его коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^{n+1}$.

¹Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства \mathbb{k}^n и в виде столбцов.

²См. стр. 5.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле п° 1.1.1 только при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$ и $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. φ не является линейным отображением.

Упражнение 1.1. Докажите для любого линейного отображения F равенства $F(0) = 0$ и $F(-v) = -F(v)$ для всех $v \in V$.

1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства. Векторы a и b из векторного пространства V называются *пропорциональными*, если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \mathbb{k}$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{k}$.

Векторное пространство V называется *одномерным*, что обозначается как¹ $\dim V = 1$, если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве V какой-нибудь ненулевой вектор e , мы можем однозначно записать любой вектор $v \in V$ как $v = xe$ с $x \in \mathbb{k}$. Число x называется *координатой* вектора v относительно базисного вектора e . Отображение $c_e : V \rightarrow \mathbb{k}$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его координату $x \in \mathbb{k}$ устанавливает изоморфизм между V и \mathbb{k} . При выборе другого базисного вектора $e' = \lambda e$ координата x' каждого вектора $v = x'e' = x'\lambda e = xe$ в новом базисе будет связана со старой координатой x соотношением $x' = \lambda^{-1}x$.

Линейное отображение $F : V \rightarrow V$ одномерного пространства V в себя однозначно определяется тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор e пространства V . Если $F(e) = \lambda e$, то для произвольного вектора $v = xe$ получим $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$. Таким образом, любой линейный эндоморфизм F одномерного пространства V либо отображает все векторы в нуль, либо является гомотетией с ненулевым коэффициентом $\lambda \in \mathbb{k}$. В частности, полная линейная группа $GL(V)$ одномерного пространства V изоморфна мультипликативной группе \mathbb{k}^* ненулевых элементов поля \mathbb{k} .

1.2. Двумерное векторное пространство. Векторное пространство V называется *двумерным*, что обозначается как $\dim V = 2$, если в нём есть пара непропорциональных векторов e_1, e_2 , и каждый вектор $v \in V$ выражается через них в виде $v = x_1e_1 + x_2e_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$. Любая такая пара векторов e_1, e_2 называется *базисом* пространства V . Коэффициенты x_1, x_2 разложения вектора v по базису *однозначно* определяются вектором v и базисом, поскольку из равенства $x_1e_1 + x_2e_2 = y_1e_1 + y_2e_2$ вытекает равенство $(x_1 - y_1)e_1 = (x_2 - y_2)e_2$, возможное только при $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$ в силу того, что векторы e_1 и e_2 не пропорциональны. Числа $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$ из разложения $v = x_1e_1 + x_2e_2$ называются *координатами* вектора v в базисе $e = (e_1, e_2)$. Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе e , мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^2, \quad v = x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^2.$$

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства \mathbb{k}^2 .

¹Обозначение \dim является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие в п° 4.1 на стр. 55 ниже.

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство V изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^2 .

1.2.1. Определитель 2×2 . Пропорциональность векторов $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ в пространстве \mathbb{k}^2 равносильна равенству перекрёстных произведений $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов $a, b \in \mathbb{k}^2$. Очевидно, что

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \quad (1-1)$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \quad \forall a, b \in \mathbb{k}^2 \quad (1-2)$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \quad \forall a, b \in \mathbb{k}^2 \text{ и } \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad (1-3)$$

$$\det(a + b, c) = \det(a, c) + \det(b, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}^2. \quad (1-4)$$

$$\det(a, b + c) = \det(a, b) + \det(a, c)$$

Свойство (1-2) называется *знакопеременностью*, (1-3) — *однородностью*, (1-4) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов $a, b, c, d \in \mathbb{k}^2$ и констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ выполняется то же самое правило раскрытия скобок¹, что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d) = \alpha \gamma \det(a, c) + \alpha \delta \det(a, d) + \beta \gamma \det(b, c) + \beta \delta \det(b, d).$$

ЛЕММА 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов $a, b \in \mathbb{k}^2$ является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора $v \in \mathbb{k}^2$ по этому базису вычисляются по *правилу Крамера*:

$$v = x \cdot a + y \cdot b \iff \begin{cases} x = \det(v, b) / \det(a, b) \\ y = \det(a, v) / \det(a, b). \end{cases} \quad (1-5)$$

Доказательство. Если имеется разложение $v = x \cdot a + y \cdot b$, то из билинейности и кососимметричности определителя вытекают равенства

$$\det(a, v) = \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b)$$

$$\det(v, b) = \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b),$$

из которых x и y однозначно выражаются в виде (1-5). Для доказательства существования разложения $v = x \cdot a + y \cdot b$ заметим, что разность $v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b)$ пропорциональна вектору b , т. к. $\det(v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b), b) = \det(v, b) - \det(a, b) \cdot \det(v, b) / \det(a, b) = 0$. Поэтому $v = a \cdot \det(v, b) / \det(a, b) + b \cdot y$ для некоторого $y \in \mathbb{k}$. \square

Следствие 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис. \square

¹Его называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы u_1 и u_2 , в свою очередь, имеют в некотором другом базисе (w_1, w_2) координаты $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$. Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2) .

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Функция $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$, сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b двумерного векторного пространства V число $s(a, b) \in \mathbb{k}$, называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов $a, b \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \quad (1-6)$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b). \quad (1-7)$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◊3.

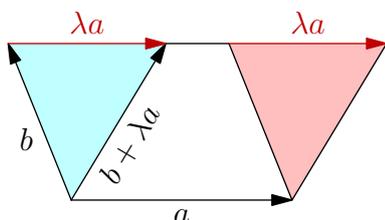


Рис. 1◊3. Площадь не меняется.

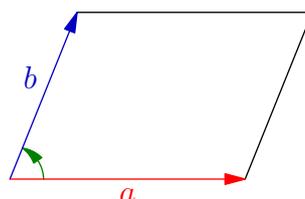


Рис. 1◊4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-7) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. В частности, $s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)$, т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов.

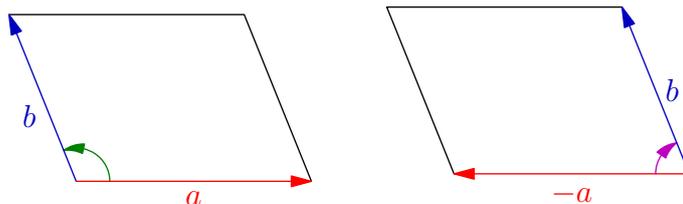


Рис. 1◊5. Смена ориентации при смене знака.

В школьном курсе геометрии над полем $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ принято считать, что площадь положительна и $s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)$. Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль¹, но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости \mathbb{R}^2 упорядоченные пары векторов (a, b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов,

¹Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем \mathbb{k} .

для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство $s(-a, b) = -s(a, b)$ означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1◊5.

ЛЕММА 1.3

Каждая функция площади $s : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ обращается в нуль на парах пропорциональных векторов¹, знакопеременна: $s(a, b) = -s(b, a)$ и аддитивна:

$$s(a, b + c) = s(a, b) + s(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{k}^2. \quad (1-8)$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-6) и (1-7):

$$\begin{aligned} s(\lambda v, v) &= s(0 + \lambda v, v) = s(0, v) = s(0 \cdot 0, v) = 0 \cdot s(0, v) = 0, \\ s(a, b) &= s(a, a + b) = s(a - (a + b), a + b) = s(-b, a + b) = -s(b, a + b) = -s(b, a). \end{aligned}$$

Докажем аддитивность. Если вектор a пропорционален и вектору b , и вектору c , то он пропорционален и их сумме $b + c$. В этом случае все три площади в (1-8) зануляются. Если вектор a не пропорционален, скажем, вектору b , то a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. В этом случае левая и правая части (1-8) тоже равны друг другу:

$$\begin{aligned} s(a, b + c) &= s(a, b + \alpha a + \beta b) = s(a, (1 + \beta)b) = (1 + \beta)s(a, b), \\ s(a, b) + s(a, c) &= s(a, b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a, b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a, b) + \beta s(a, b) = (1 + \beta)s(a, b). \end{aligned}$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1.4 (КОСОСИММЕТРИЧНОСТЬ И ЗНАКОПЕРЕМЕННОСТЬ). Функция от двух аргументов $f : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ называется *кососимметричной*, если $f(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а когда $1 \neq -1$ в поле \mathbb{k} , то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

ТЕОРЕМА 1.1

На координатном векторном пространстве \mathbb{k}^2 имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$, где константа $c = s(e_1, e_2)$ равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции $s(a, b)$ для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ выполняются равенства

$$s(a, b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \quad (1-9)$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-1) – (1-4) вытекает, что при любом $\lambda \in \mathbb{k}$ функция $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$ удовлетворяет соотношениям (1-6), (1-7) и при $\lambda \neq 0$ является ненулевой. □

¹В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство $s(a, a) = 0$ называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.4 ниже.

Следствие 1.2

На любом двумерном векторном пространстве V имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы $e = (e_1, e_2)$ образуют в V базис, а векторы $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ произвольны, то¹

$$s(a, b)/s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

для любой ненулевой функции площади s на пространстве V . \square

Следствие 1.3

Координаты вектора $v = ax + by$ в любом базисе (a, b) двумерного векторного пространства V равны отношениям площадей $x = s(v, b)/s(a, b)$, $y = s(a, v)/s(a, b)$. \square

1.4. Аффинные² пространства. Множество \mathbb{A} называется *аффинным пространством* над векторным пространством V , если каждой упорядоченной паре точек $A, B \in \mathbb{A}$ сопоставлен вектор $\overline{AB} \in V$ так, что для любой точки $P \in \mathbb{A}$ отображение *векторизации с центром в P*

$$v_P : \mathbb{A} \rightarrow V, \quad Q \mapsto \overline{PQ},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек $A, B, C \in \mathbb{A}$ выполняется *правило треугольника* $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Иначе можно сказать, что с каждым вектором $v \in V$ связано *преобразование сдвига*³

$$\tau_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad A \mapsto A + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек $A, B \in \mathbb{A}$ имеется единственный такой вектор $v \in V$, что $A + v = B$, и для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор $v \in V$ со свойством $A + v = B$, о котором идёт речь во втором определении, это вектор \overline{AB} из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$ во втором.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а) $\overline{AA} = 0$ для всех $A \in \mathbb{A}$
б) $\overline{AB} = -\overline{BA}$ для всех $A, B \in \mathbb{A}$ в) $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{AD}$ для всех $A, B, C, D \in \mathbb{A}$.

ПРИМЕР 1.5 (Аффинная координатная плоскость \mathbb{A}^2)

Множество $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{k})$, точками которого являются пары чисел $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ из поля \mathbb{k} и точкам

P, Q сопоставляется вектор $\overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} Q_1 - P_1 \\ Q_2 - P_2 \end{pmatrix}$ очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем \mathbb{k} .

¹Здесь и далее мы обозначаем через $\det_e(a, b)$ определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов a, b в базисе e .

²Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

³Или *откладывание вектора v от точек $A \in \mathbb{A}$* .

ПРИМЕР 1.6 (ПРИВЕДЁННЫЕ КВАДРАТНЫЕ ТРЁХЧЛЕНЫ)

Пространство \mathcal{P}_2 , точками которого являются приведённые квадратные трёхчлены

$$P = x^2 + p_1x + p_2 \in \mathbb{k}[x],$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности $Q - P = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$ приведённых трёхчленов $Q = x^2 + q_1x + q_2$ и $P = x^2 + p_1x + p_2$ образуют векторное пространство $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 1}$ многочленов степени ≤ 1 , и при произвольным образом зафиксированном многочлене P сопоставление $Q \mapsto \overline{PQ} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$ устанавливает биекцию между \mathcal{P}_2 и V , удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство \mathcal{P}_2 является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени ≤ 1 .

1.4.1. Аффинная система координат на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 по определению состоит из произвольно взятой точки $O \in \mathbb{A}^2$ и базиса e_1, e_2 в векторном пространстве V . Тройку (O, e_1, e_2) также называют *координатным репером с началом в O и базисом e_1, e_2* . Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости \mathbb{A}^2 и парами чисел, сопоставляющую точке $P \in \mathbb{A}^2$ координаты вектора \overline{OP} в базисе e_1, e_2 . Эти координаты называются *аффинными координатами точки P относительно репера (O, e_1, e_2)* .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь, что столбец координат вектора \overline{PQ} в произвольном базисе e_1, e_2 пространства \mathbb{k}^2 равен разности $Q - P$ столбцов координат точек Q, P относительно любого репера (O, e_1, e_2) независимо от выбора точки O .

Так, в **прим. 1.6** коэффициенты p_1, p_2 трёхчлена $x^2 + p_1x + p_2 \in \mathcal{P}_2$ являются его координатами относительно репера (x^2, e_1, e_2) , где $e_1 = x, e_2 = 1$ это стандартный базис в $\mathbb{k}[x]_{\leq 1}$.

1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек. Для любого набора точек

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_m$$

в аффинном пространстве \mathbb{A} и любых чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$ с ненулевой суммой $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ существует единственная точка $M \in \mathbb{A}$, такая что

$$\mu_1 \overline{MQ_1} + \mu_2 \overline{MQ_2} + \dots + \mu_m \overline{MQ_m} = 0. \quad (1-10)$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой $O \in \mathbb{A}$, мы можем для произвольной точки $M \in \mathbb{A}$ записать сумму из левой части (1-10), как

$$\sum \mu_i \overline{MQ_i} = \sum \mu_i (\overline{OQ_i} - \overline{OM}) = -\mu \overline{OM} + \sum \mu_i \overline{OQ_i}.$$

Поэтому соотношение (1-10) выполняется для единственной точки M с радиус вектором

$$\overline{OM} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overline{OQ_i}. \quad (1-11)$$

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек Q_i с весами μ_i . Термин пришёл из механики: если горизонтально расположить аффинную плоскость $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ в трёхмерном пространстве и перпендикулярно ей приложить к каждой точке Q_i силу μ_i , направленную вниз, если $\mu > 0$, и вверх, если $\mu < 0$, как на **рис. 1.6** на стр. 16, то равенство (1-10) будет означать

равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки M . Если оно выполняется, плоскость останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку M .

Поскольку точка M однозначно определяется не зависящим от выбора O соотношением (1-10), точка

$$O + \overline{OM} = O + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overline{OQ_i}$$

не зависит от выбора начальной точки O . Поэтому для любого набора точек Q_1, Q_2, \dots, Q_m и любых констант $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \dots + \mu_m Q_m \stackrel{\text{def}}{=} O + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \overline{OQ_i} \quad (1-12)$$

не зависит от выбора начальной точки O , что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-12). Точка (1-12) называется *барицентрической комбинацией* точек Q_1, Q_2, \dots, Q_m с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

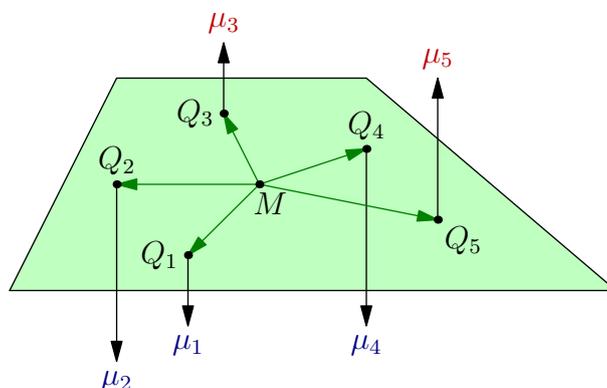


Рис. 1◊6. Моменты сил.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7 (группирование масс). Пусть набор точек Q_i с весами μ_i и набор точек T_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках M и N , причём все три суммы: $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Покажите, что центр тяжести объединения всех точек¹ Q_i и T_j совпадает с центром тяжести точек M и N , взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$. Выведите из этого, что любая барицентрическая комбинация точек, которые сами являются барицентрическими комбинациями некоторых точек P_i , также представляет собою барицентрическую комбинацию точек P_i .

1.5. Прямые. Три точки A, B, P на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 называются *коллинеарными*, если векторы \overline{PA} и \overline{PB} пропорциональны. При $A \neq B$ пропорциональность векторов \overline{PA} и \overline{PB} означает, что при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overline{PA} + \alpha \cdot \overline{PB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot A + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot B.$$

¹Объединение двух совпадающих точек заключается в сложении их весов.

В этом случае говорят, что точка P делит AB в отношении $\alpha : \beta$ или, эквивалентно, является барицентрической комбинацией точек A и B с весами $\beta/(\alpha + \beta)$ и $\alpha/(\alpha + \beta)$ соответственно. Точка

$$P = O + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{OB} = A + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{AB} = B + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{BA}$$

однозначно определяется отношением $\alpha : \beta$, которое может принимать любые значения, не равные -1 , ибо $\alpha = -\beta$ означает, что $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$, т. е. $A = B$. При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

вполне допустимы и отвечают точкам $P = A$ и $P = B$ соответственно. Равновесный барицентр $C = (A + B)/2$, делящий AB в отношении $1 : 1$, называется *серединой* или *центром* пары различных точек A, B . Множество $(AB) \stackrel{\text{def}}{=} \{X = \alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \alpha + \beta = 1\}$ всех точек $X \in \mathbb{A}^2$, коллинеарных двум заданным различным точкам $A, B \in \mathbb{A}^2$, называется *прямой*. Иначе прямую $(AB) \subset \mathbb{A}(V)$ можно описать как ГМТ вида $X = A + vt$, где t пробегает \mathbb{k} , а $v \in V$ — произвольно зафиксированный ненулевой вектор, пропорциональный вектору \overrightarrow{AB} . Вектор v называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (AB) .

Предложение 1.1

В аффинных координатах $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ относительно произвольного репера прямая с направляющим вектором $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, проходящая через точку $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ описывается уравнением

$$v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2. \quad (1-13)$$

Наоборот, множество всех решений $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ любого (неоднородного) линейного уравнения

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta,$$

в котором коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$ не обращаются одновременно в нуль, представляет собою прямую с направляющим вектором $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$.

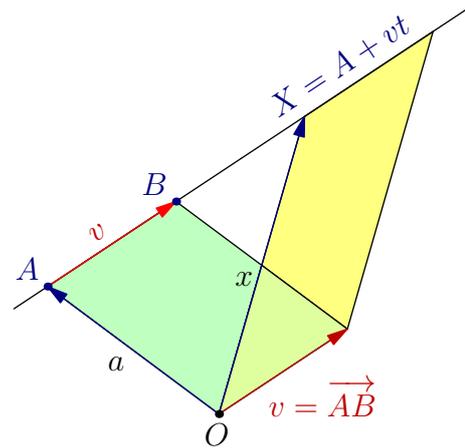


Рис. 1◊7. Прямая (AB) с направляющим вектором $v = \overrightarrow{AB}$.

Доказательство. Обозначим начало координат через O и рассмотрим векторы

$$x = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Равенство (1-13) означает, что $\det(v, x) = \det(v, a)$, и описывает геометрическое место концов всех таких векторов x , которые образуют вместе с заданным вектором v параллелограмм с вершиной в начале координат, имеющий заданную площадь $s = \det(v, a)$, см. рис. 1◊7. Это ГМТ представляет собою проходящую через конец вектора a прямую с вектором скорости v , поскольку пропорциональность векторов \overrightarrow{AX} и v равносильна равенству

$$0 = \det(v, \overrightarrow{AX}) = \det(v, x - a) = \det(v, x) - \det(v, a).$$

Для доказательства второго утверждения достаточно подобрать пару чисел a_1, a_2 так, чтобы $a_1 a_1 + a_2 a_2 = \beta$, что всегда можно сделать, если a_1 или a_2 отличен от нуля. Тогда по формуле (1-13) прямая, проходящая через точку $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ с вектором скорости $v = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ будет задаваться уравнением $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \beta$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и проходящей через точку $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, а также прямой, проходящей через точки $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$.

ПРИМЕР 1.7 (ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ)

Если левые части уравнений прямых $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$ и $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$ не пропорциональны, то решения x_1, x_2 системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta, \end{cases} \quad (1-14)$$

суть координаты вектора $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^2$ в базисе из векторов $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ координатного пространства \mathbb{k}^2 . По правилу Крамера¹ они единственны и равны

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} \gamma & \alpha_2 \\ \delta & \beta_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \beta_1 & \delta \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1-15)$$

Таким образом, прямые (1-14) с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке с координатами (1-15). Например, прямые $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$ из упр. 1.8 пересекаются при $x_1 = 22/19$, $x_2 = -17/19$.

Если же левые части уравнений (1-14) пропорциональны, скажем $\beta_1 = \lambda \alpha_1$ и $\beta_2 = \lambda \alpha_2$, то при $\delta \neq \lambda \gamma$ задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при $\delta = \lambda \gamma$ они совпадают друг с другом.

Проделанные вычисления показывают, что на аффинной плоскости A^2 над произвольным полем \mathbb{k} выполнены евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой ℓ , проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую ℓ . \square

1.6. Треугольники. Тройка не коллинеарных точек A, B, C называется *треугольником*. Фиксируем на \mathbb{k}^2 какую-нибудь ненулевую функцию площади s и назовём *площадью ориентированного треугольника ABC* половину площади ориентированного параллелограмма, образованного упорядоченной парой векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$s(ABC) \stackrel{\text{def}}{=} s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})/2. \quad (1-16)$$

¹См. лем. 1.2 на стр. 11.

Предложение 1.3

Для любого треугольника ABC и любой точки P выполняются соотношения:

$$s(ABC) = s(BCA) = s(CAB) = -s(BAC) = -s(ACB) = -s(CBA) \quad (1-17)$$

$$s(ABC) = s(PAB) + s(PBC) + s(PCA). \quad (1-18)$$

Доказательство. Для доказательства (1-17) достаточно проверить, что

$$s(BCA) = s(ABC) \quad \text{и} \quad s(BAC) = -s(ABC).$$

В силу билинейности и кососимметричности площади

$$2s(BCA) = s(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = s(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -s(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2s(ABC)$$

$$2s(BAC) = s(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = s(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -2s(ABC).$$

Проверка равенства (1-18) столь же бесхитростна:

$$\begin{aligned} 2s(ABC) &= s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = s(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) = s(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PC}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AP}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = \\ &= s(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}) + s(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) + s(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = 2(s(PAB) + s(PBC) + s(PCA)). \end{aligned}$$

□

Пример 1.8 (площади ориентированных многоугольников)

Над полем $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ формула (1-17) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против ЧС, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по ЧС отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся в н° 1.3 на стр. 12 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противоположащему выбранной вершине основанию, см. рис. 1◊8.

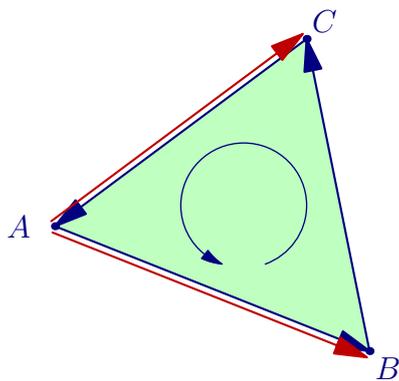


Рис. 1◊8. $2S(ABC) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

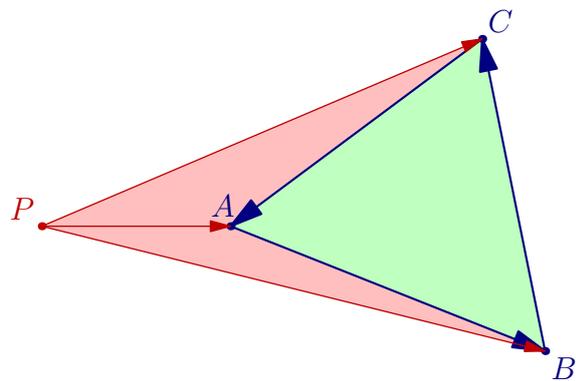


Рис. 1◊9.

$$S(ABC) = S(PAB) + S(PBC) + S(PCA).$$

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-18) утверждает, что площадь ориентированного треугольника ABC можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке P , при этом исходящие из P векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1◊9 площадь $\triangle PBC$ войдёт в сумму со знаком плюс, а площади $\triangle PAB$ и $\triangle PAC$ — с минусами, что в результате даст площадь $\triangle ABC$. Эта формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1◊10, замкнутую ломаную $Q_0Q_1 \dots Q_m$, где мы полагаем $Q_m = Q_0$. Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке P , мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(PQ_iQ_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \det(\overrightarrow{PQ_i}, \overrightarrow{PQ_{i+1}})$$

которая равна сумме ориентированных площадей ограниченных этой ломаной многоугольников, где многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной¹, надлежит учитывать со знаком плюс, а лежащие справа² — со знаком минус.

Упражнение 1.9. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и основаниями на одной прямой относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек A, B, C и произвольной точки P выполняется равенство $s(PAB) : s(PBC) = \overline{AB} : \overline{BC}$, где справа стоит такое число $\lambda \in \mathbb{k}$, что $\lambda \cdot \overline{BC} = \overline{AB}$ (поле \mathbb{k} — любое).

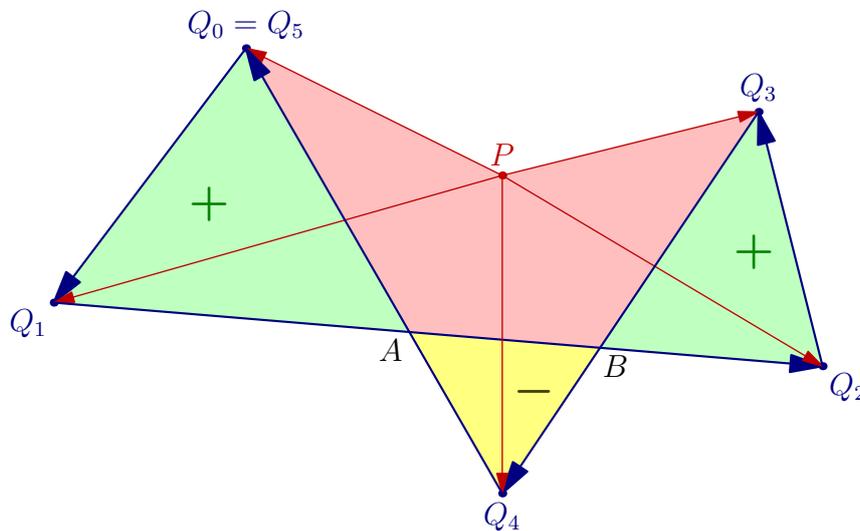


Рис. 1◊10. $\sum_{i=0}^4 S(PQ_iQ_{i+1}) = S(Q_0Q_1A) - S(BAQ_4) + S(BQ_2Q_3)$.

¹Их контур обходится против ЧС.

²Их контур обходится по ЧС.

1.6.1. Барицентрические координаты. Зафиксируем на плоскости \mathbb{A}^2 произвольный треугольник $\triangle ABC$ и сопоставим каждой тройке чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ точку

$$P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками на \mathbb{A}^2 . Равенство $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$ означает, что $\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$, т.е. числа β, γ являются координатами вектора \overrightarrow{AP} в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы \overrightarrow{AP} — точкам P , мы имеем биекцию между точками P и произвольными парами чисел (β, γ) . Но такие пары биективно соответствуют тройкам $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называются *барицентрическими координатами* точки $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$ относительно $\triangle ABC$. Использование тройки чисел α, β, γ , связанных соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 1$, вместо пары чисел β, γ часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

Пример 1.9 (барицентрические координаты как отношения площадей)

Согласно правилу Крамера¹, разложение произвольного вектора $\overrightarrow{AP} \in V$ по базису $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ имеет вид

$$\overrightarrow{AP} = \frac{s(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC})}{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})}{s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{s(PCA)}{s(ABC)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{s(PAB)}{s(ABC)} \cdot \overrightarrow{AC},$$

откуда $s(ABC) \cdot \overrightarrow{PA} + s(PCA) \cdot \overrightarrow{AB} + s(PAB) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Подставляя $s(ABC) = s(PAB) + s(PBC) + s(PCA)$ и пользуясь тем, что $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$, а $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC}$, получаем соотношение

$$s(PBC) \cdot \overrightarrow{PA} + s(PCA) \cdot \overrightarrow{PB} + s(PAB) \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \quad (1-19)$$

утверждающее, что барицентрическими координатами точки P относительно $\triangle ABC$ являются отношения площадей $\alpha = s(PBC)/s(ABC)$, $\beta = s(PBC)/s(ABC)$, $\gamma = s(PBC)/s(ABC)$, т.е.

$$P = \frac{s(PBC)}{s(ABC)} \cdot A + \frac{s(PCA)}{s(ABC)} \cdot B + \frac{s(PAB)}{s(ABC)} \cdot C. \quad (1-20)$$

Пример 1.10 (центр треугольника)

Равновесный барицентр вершин $\triangle ABC$

$$M = (A + B + C)/3$$

называется *центром* треугольника $\triangle ABC$. Согласно [упр. 1.7](#) точка M является центром тяжести любой из вершин и середины противоположащей ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом, M является точкой пересечения медиан $\triangle ABC$ и делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины (см. [рис. 1◊11](#)). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная точка M на плоскости, для которой

$$s(MAB) = s(MBC) = s(MCA).$$

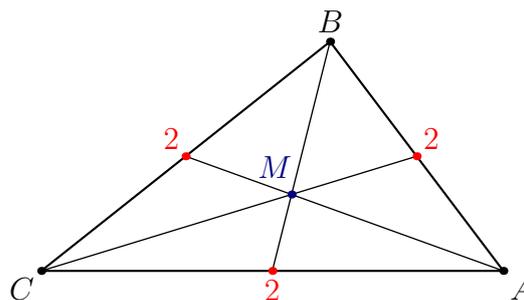


Рис. 1◊11. Центр треугольника.

¹См. [сл. 1.3](#) на стр. 14.

1.6.2. Двойное отношение и гармоничность. Рассмотрим четыре различные прямые

$$a = (OA), \quad b = (OB), \quad c = (OC), \quad d = (OD),$$

пересекающиеся в точке O . Двойное отношение ориентированных площадей треугольников с вершиной O на [рис. 1◊12](#)

$$[a, b, c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(OAC)}{s(OCB)} : \frac{s(OAD)}{s(ODB)} = \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}{s(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})}{s(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})} \quad (1-21)$$

не зависит ни от выбора ненулевой функции площади s , ни от выбора точек A, B, C, D на одноимённых прямых a, b, c, d , при условии, что все они отличны от O .

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Убедитесь в этом, а также в том, что двойное отношение не меняется при одновременной транспозиции любых двух непересекающихся пар прямых, т. е.

$$[a, b, c, d] = [b, a, d, c] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a].$$

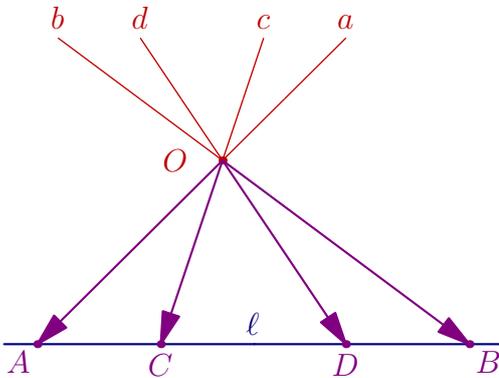


Рис. 1◊12.

$$[a, b, c, d] = (\overline{AC} : \overline{BC}) : (\overline{AD} : \overline{BD}).$$

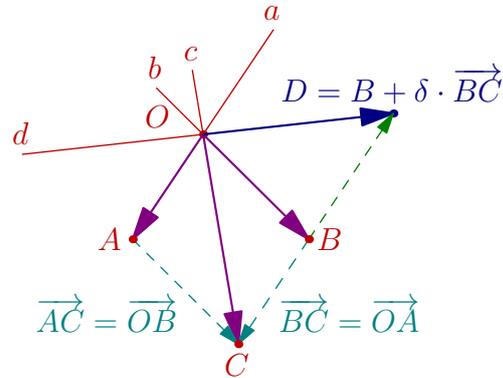


Рис. 1◊13. $\delta = [a, b, c, d]$.

Если выбрать точки A, B, C так, чтобы четырёхугольник $OACB$ был параллелограммом, т. е. $\overline{OA} = \overline{BC}$ и $\overline{OB} = \overline{AC}$, а в качестве точки $D \in (OD)$ взять пересечение $(OD) \cap (BC)$, как на [рис. 1◊13](#), т. е. положить $D = B + \delta \overline{BC}$, где $\delta = \overline{BD} : \overline{BC}$ является аффинной координатой точки D на прямой BC относительно репера с началом в B и базисным вектором \overline{BC} , то двойное отношение $[a, b, c, d]$ окажется равным этой координате δ :

$$\begin{aligned} &= \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}{s(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})}{s(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})} = \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{s(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} + \delta \overrightarrow{OA})}{s(\overrightarrow{OB} + \delta \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \\ &= \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} : \frac{s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}{\delta \cdot s(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \delta. \end{aligned} \quad (1-22)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь, что на любой тройке различных, но пересекающихся в одной точке O прямых a, b, c всегда можно, причём единственным с точностью до гомотетии с центром в O способом, выбрать такие точки $A \in a, B \in b$ и $C \in c$, что четырёхугольник $OABC$ будет параллелограммом.

Таким образом, число $[a, b, c, d]$ однозначно задаёт положение прямой d по отношению к прямым a, b, c , т. е. при фиксированных a, b, c отображение $d \mapsto [a, b, c, d]$ является биекцией между множеством всех проходящих через точку $O = a \cap b \cap c$ прямых d и множеством $\mathbb{k} \sqcup \infty$. Прямые a, b и c переходят при этой биекции в $\infty, 0$ и 1 соответственно. Если $[a, b, c, d] = -1$, то прямая b пересекает любую параллельную a прямую в середине отрезка, высекаемого прямыми c и d . Такие четвёрки прямых называют *гармоническими*.

Если выбрать точки A, B, C, D лежащими на одной прямой ℓ , как на рис. 1♦12, то согласно упр. 1.9 на стр. 20 отношения площадей (1-21) переписываются как отношения пропорциональных векторов

$$[a, b, c, d] = \frac{s(OAC)}{s(OCB)} : \frac{s(OAD)}{s(ODB)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \stackrel{\text{def}}{=} [A, B, C, D]. \quad (1-23)$$

Эта величина называется *двойным отношением*¹ четырёх коллинеарных точек A, B, C, D . В частности, мы видим, что при фиксированных точках A, B, C, D левая часть (1-23), а с нею и (1-21) не зависят от выбора точки O при условии, что она не лежит на прямой, содержащей точки A, B, C, D . Четвёрка точек с $[A, B, C, D] = -1$ называется *гармонической*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Покажите, что гармоничность равносильна равенству

$$[A, B, C, D] = [B, A, C, D].$$

¹По-английски *cross-ratio*.

§2. Аффинная группа

2.1. Аффинные отображения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ между аффинными пространствами, ассоциированными с векторными пространствами U, W , называется *аффинным*, если найдётся такая точка $O \in \mathbb{A}(U)$, что отображение

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overline{OP} \mapsto \overline{\varphi(O)\varphi(P)} \quad (2-1)$$

линейно, т. е. $D_\varphi(\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}) = \alpha D_\varphi(\overline{OA}) + \beta D_\varphi(\overline{OB})$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ и $A, B \in \mathbb{A}(U)$.

ЛЕММА 2.1

Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно, то отображение (2-1) линейно для любой точки $O \in \mathbb{A}(U)$ и не зависит от выбора этой точки, т. е. для всех $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $D_\varphi(\overline{PQ}) = \overline{\varphi(P)\varphi(Q)}$.

Доказательство. Если отображение (2-1), построенное по некоторой точке $O \in \mathbb{A}(U)$, линейно, то для любой точки $P \in \mathbb{A}(U)$ и любого вектора $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} \in U$ выполняется равенство

$$D_\varphi(\overline{PQ}) = D_\varphi(\overline{OQ}) - D_\varphi(\overline{OP}) = \overline{\varphi(O)\varphi(Q)} - \overline{\varphi(O)\varphi(P)} = \overline{\varphi(P)\varphi(Q)}.$$

Тем самым, для всех $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ отображение D_φ переводит вектор $\overline{PQ} \in U$ в вектор $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)} \in W$. В частности, оно не зависит от выбора точки O . \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1

Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно тогда и только тогда, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в барицентрические комбинации их образов с теми же весами, т. е. $\varphi(\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m) = \mu_1 \cdot \varphi(P_1) + \mu_2 \cdot \varphi(P_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(P_m)$ для любых $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{A}(U)$ и любых $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$ с $\sum \mu_i = 1$.

Доказательство. Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно, то при любом выборе начальной точки O и любых весах $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{k}$ с $\sum \mu_i = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m) &= \varphi(O + \mu_1 \overline{OP_1} + \mu_2 \overline{OP_2} + \dots + \mu_m \overline{OP_m}) = \\ &= \varphi(O) + D_\varphi(\mu_1 \overline{OP_1} + \mu_2 \overline{OP_2} + \dots + \mu_m \overline{OP_m}) = \\ &= \varphi(O) + \mu_1 \cdot D_\varphi(\overline{OP_1}) + \mu_2 \cdot D_\varphi(\overline{OP_2}) + \dots + \mu_m \cdot D_\varphi(\overline{OP_m}) = \\ &= \mu_1 \cdot (\varphi(O) + D_\varphi(\overline{OP_1})) + \dots + \mu_m \cdot (\varphi(O) + D_\varphi(\overline{OP_m})) = \\ &= \mu_1 \cdot \varphi(P_1) + \mu_2 \cdot \varphi(P_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(P_m). \end{aligned}$$

Наоборот, если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ сохраняет барицентрические комбинации, то при произвольном выборе начальной точки O отображение $D_\varphi : V \rightarrow V, \overline{OP} \mapsto \overline{\varphi(O)\varphi(P)}$, линейно, поскольку для любых точек $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ точка

$$R = O + \lambda \cdot \overline{OP} + \mu \cdot \overline{OQ} = (1 - \lambda - \mu)O + \lambda P + \mu Q$$

перейдёт в точку

$$\varphi(R) = (1 - \lambda - \mu)\varphi(O) + \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) = \varphi(O) + \lambda \overline{\varphi(O)\varphi(P)} + \mu \overline{\varphi(O)\varphi(Q)},$$

а значит, для всех векторов $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in U$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$

$$\begin{aligned} D_\varphi(\lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}) &= D_\varphi(\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(R)} = \\ &= \lambda \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} + \mu \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)} = \lambda D_O \varphi(\overrightarrow{OP}) + \mu D_O \varphi(\overrightarrow{OQ}). \end{aligned}$$

□

2.1.1. Дифференциал аффинного отображения. Линейное отображение

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$$

называется *дифференциалом* аффинного отображения $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$. Если два аффинных отображения $\varphi, \psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ имеют равные дифференциалы $D_\varphi = D_\psi$, то для всех точек $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = D_\varphi(\overrightarrow{PQ}) = D_\psi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}$, которое по [упр. 1.5 \(в\)](#) равносильно равенству $\overrightarrow{\varphi(P)\psi(P)} = \overrightarrow{\varphi(Q)\psi(Q)}$. Поэтому вектор $w = \overrightarrow{\varphi(P)\psi(P)}$ не зависит от выбора точки $P \in \mathbb{A}(U)$. Это означает, что $\psi = \tau_w \circ \varphi$ является композицией отображения φ с последующим сдвигом $\tau_w : \mathbb{A}(W) \rightarrow \mathbb{A}(W), X \mapsto X + w$, на вектор w .

Предложение 2.2

Если отображения $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ и $\psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ аффинны, то их композиция

$$\varphi\psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W), \quad X \mapsto \varphi(\psi(X)),$$

тоже аффинна и имеет дифференциал $D_{\varphi\psi} = D_\varphi \circ D_\psi$.

Доказательство. Отображение $D_{\varphi\psi} : U \rightarrow W$, переводящее вектор $\overrightarrow{PQ} \in U$ в вектор

$$\overrightarrow{\varphi\psi(P)\varphi\psi(Q)} = D_{\varphi\psi}(\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}) = D_\varphi \circ D_\psi(\overrightarrow{PQ}) \in W,$$

является композицией дифференциалов D_φ и D_ψ . Оно линейно, т. к. для любых $a, b \in U$

$$\begin{aligned} D_{\varphi\psi}(\alpha a + \beta b) &= D_\varphi(D_\psi(\alpha a + \beta b)) = D_\varphi((\alpha D_\psi(a) + \beta D_\psi(b))) = \\ &= \alpha D_\varphi \circ D_\psi(a) + \beta D_\varphi \circ D_\psi(b) = \alpha D_{\varphi\psi}(a) + \beta D_{\varphi\psi}(b). \end{aligned}$$

□

2.2. Аффинные автоморфизмы. Взаимно однозначное аффинное отображение

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$$

называется *аффинным автоморфизмом* или *аффинным преобразованием* пространства $\mathbb{A}(V)$.

Очевидно, что аффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ взаимно однозначно, если и только если его дифференциал $D_\varphi : V \rightarrow V$ взаимно однозначен. Из [предл. 2.2](#) вытекает, что аффинные автоморфизмы $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ образуют группу преобразований¹ множества $\mathbb{A}(V)$. Эта группа обозначается $\text{Aff}(V)$ и называется *аффинной группой* векторного пространства V . Аффинная группа координатного пространства \mathbb{k}^n обозначается $\text{Aff}_n(\mathbb{k})$.

Две фигуры в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинный автоморфизм $\varphi \in \text{Aff}(V)$, переводящий одну из этих фигур в другую.

¹См. обсуждение на стр. 5

Предложение 2.3

Для любых двух треугольников $P_0P_1P_2$ и $Q_0Q_1Q_2$ на аффинной плоскости существует единственное аффинное преобразование этой плоскости, переводящее P_i в Q_i при всех $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Если $\varphi(P_i) = Q_i$, то φ переводит аффинный репер $(P_0, \overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2})$ в аффинный репер $(Q_0, \overline{Q_0Q_1}, \overline{Q_0Q_2})$. Это полностью определяет действие φ на любую точку X : вектор $\overline{P_0X}$ однозначно представляется в виде $\overline{P_0X} = x_1\overline{P_0P_1} + x_2\overline{P_0P_2}$, дифференциал $D_\varphi : V \rightarrow V$ переводит его в $D_\varphi(\overline{P_0X}) = x_1D_\varphi(\overline{P_0P_1}) + x_2D_\varphi(\overline{P_0P_2}) = x_1\overline{Q_0Q_1} + x_2\overline{Q_0Q_2}$, откуда

$$\varphi(X) = \varphi(P_0) + D_\varphi(\overline{P_0X}) = Q_0 + x_1\overline{Q_0Q_1} + x_2\overline{Q_0Q_2}.$$

С другой стороны, если определить отображение φ этой формулой, то оно будет аффинным преобразованием, поскольку заданное правило $x_1\overline{P_0P_1} + x_2\overline{P_0P_2} \mapsto x_1\overline{Q_0Q_1} + x_2\overline{Q_0Q_2}$ отображение $D_\varphi : V \rightarrow V$, очевидно, линейно. \square

Следствие 2.1

Аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, сохраняя параллельность. Любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые a, b, c переводятся в любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые a', b', c' единственным аффинным преобразованием. \square

Упражнение 2.1. Покажите, что если три различные прямые a, b, c пересекаются в точке O , а три различные прямые a', b', c' пересекаются в точке O' , то аффинное преобразование, переводящее a, b, c в a', b', c' тоже существует и единственно с точностью до композиции с гомотетиями относительно точек O и O' .

Предложение 2.4

Четвёрка различных, но пересекающихся в одной точке прямых a, b, c, d тогда и только тогда переводится в четвёрку различных пересекающихся в одной точке прямых a', b', c', d' так, что $a \mapsto a', b \mapsto b', c \mapsto c'$ и $d \mapsto d'$, когда $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Доказательство. Обозначим точки пересечения четвёрок прямых через O и O' . По упр. 1.11 имеются единственные с точностью до гомотетий с центрами в O и в O' тройки точек $A \in a, B \in b, C \in c$ и $A' \in a', B' \in b', C' \in c'$, такие что четырёхугольники $OACB$ и $O'A'C'B'$ являются параллелограммами. Далее, имеется единственное аффинное преобразование, переводящее параллелограмм $OACB$ в параллелограмм $O'A'B'C'$. Согласно упр. 2.1 это единственное с точностью до гомотетий с центрами в O и в O' аффинное преобразование, переводящее прямые a, b, c в прямые a', b', c' . Оно переводит прямую d в прямую d' , если и только если точка $D = d \cap (BC)$ делит отрезок $[B, C]$ в том же отношении, что точка $D' = d' \cap (B'C')$ делит отрезок $[B', C']$. Но как мы видели в форм. (1-22) на стр. 22, эти отношения равны двойным отношениям $[a, b, c, d]$ и $[a', b', c', d']$. \square

2.3. Сравнение аффинной и линейной групп. Аффинная группа $\text{Aff}(V)$ содержит подгруппу параллельных переносов (или сдвигов) $T \subset \text{Aff}(V)$, изоморфную аддитивной группе векторов пространства V . Вектору $v \in V$ отвечает при этом изоморфизме сдвиг

$$\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad P \mapsto P + v,$$

а композиции сдвигов отвечает сложение векторов: $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$. Поскольку для любого аффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ и произвольной точки $P \in \mathbb{A}(V)$ выполняются равенства

$$\varphi(\tau_v(P)) = \varphi(P + v) = \varphi(p) + D_\varphi(v) = \tau_{D_\varphi(v)}(\varphi(P)),$$

сдвиги τ_v коммутируют с произвольными аффинными автоморфизмами по правилу

$$\varphi \circ \tau_v = \tau_{D_\varphi(v)} \circ \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} = \tau_{D_\varphi(v)}. \quad (2-2)$$

Множество всех аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольно выбранную точку $P \in \mathbb{A}^2$, образует в $\text{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки P и обозначается

$$\text{Stab}_P \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \text{Aff}(V) \mid \varphi(p) = p \}.$$

Из сказанного в начале п° 2.1.1 вытекает, что два аффинных преобразования $\varphi, \psi \in \text{Stab}_P$ совпадают тогда и только тогда, когда $D_\varphi = D_\psi$. Поэтому отображение $D : \text{Stab}_P \rightarrow \text{GL}(V)$, переводящее аффинное преобразование $\varphi \in \text{Stab}_P$ в его дифференциал $D_\varphi : V \rightarrow V$, инъективно. С другой стороны, каждому линейному автоморфизму $\varphi : V \rightarrow V$ отвечает оставляющее точку P на месте аффинное преобразование

$$\varphi_P : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad X \mapsto P + \varphi(\overline{PX}) \quad (2-3)$$

с дифференциалом $D_{\varphi_P} = \varphi$. Таким образом, отображение $D : \text{Stab}_P \rightarrow \text{GL}(V)$, $\varphi \mapsto D_\varphi$, является изоморфизмом групп.

Предложение 2.5

Пусть $P \in \mathbb{A}(V)$ — произвольно заданная точка. Для каждого аффинного преобразования $\varphi \in \text{Aff}(V)$ существуют единственный вектор $v \in V$ и линейный автоморфизм $\varphi \in \text{GL}(V)$, такие что $\varphi = \tau_v \circ \varphi_P$. При этом для всех $u, w \in V$ и всех $\varphi, \psi \in \text{GL}(V)$

$$(\tau_u \circ \varphi_P) \circ (\tau_w \circ \psi_P) = \tau_{u+\varphi(w)} \circ (\varphi \circ \psi)_P. \quad (2-4)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(P) = Q$. Тогда $\varphi = \tau_v \circ \psi$, где $v = \overline{PQ}$ и $\psi = \tau_{-v} \circ \varphi \in \text{Stab}_P$. Тем самым, $\psi = \varphi_P$ для некоторого $\varphi \in \text{GL}(V)$. Если преобразование φ имеет два разложения $\tau_v \circ \varphi_P = \varphi = \tau_u \circ \psi_P$, то применяя к правой и левой части этого равенства обратный к τ_v сдвиг τ_{-v} , получаем $\varphi_P = \tau_{u-v} \circ \psi_P$. Так как и φ_P , и ψ_P оставляют на месте точку P , то сдвиг τ_{u-v} тоже должен переводить P в себя, откуда $u = v$, $\tau_{u-v} = \text{Id}$, и $\varphi_P = \psi_P$, т. е. $\varphi = \psi$. Формула (2-4) вытекает из (2-2): $\tau_u \circ \psi \circ \tau_w \circ \eta = \tau_u \circ \psi \circ \tau_w \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \eta = \tau_u \circ \tau_{\psi(w)} \circ \psi \circ \eta$. \square

Замечание 2.1. (полупрямое произведение) Из предл. 2.5 вытекает, что как множество аффинная группа $\text{Aff}(V)$ может быть отождествлена с прямым произведением множеств $V \times \text{GL}(V)$, и после такого отождествления композиция в $\text{Aff}(V)$ задаётся правилом

$$(u, \varphi) \circ (w, \psi) = (u + \varphi(w), \varphi\psi).$$

В таких случаях говорят, что группа $\text{Aff}(V)$ является *полупрямым произведением* групп V и $\text{GL}(V)$, и пишут

$$\text{Aff}(V) = V \rtimes \text{GL}(V).$$

Подчеркнём, однако, что отождествление множеств $\text{Aff}(V) \simeq V \times \text{GL}(V)$ требует выбора точки $P \in \mathbb{A}(V)$ и *зависит* от этого выбора. Два разложения $\tau_u \circ \varphi_P = \varphi = \tau_w \circ \varphi_Q$ одного и того же аффинного преобразования $\varphi \in \text{Aff}(V)$, возникающие при выборе двух разных точек $P, Q \in \mathbb{A}(V)$, имеют один и тот же линейный автоморфизм $D_{\varphi_P} = D_{\varphi_Q} = D_\varphi \in \text{GL}(V)$, но, вообще говоря, разные переносы $\tau_u \neq \tau_w$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Убедитесь, что $w = u - \overline{PQ} + D_\varphi(\overline{PQ})$ и отличен от u при $D_\varphi(\overline{PQ}) \neq \overline{PQ}$.

2.4. Запись линейных и аффинных преобразований в координатах. Если в векторном пространстве V зафиксирован базис e_1, e_2 , всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$ однозначно задаётся указанием образов базисных векторов $f_1 = \varphi(e_1)$ и $f_2 = \varphi(e_2)$, поскольку произвольный вектор $v = e_1x_1 + e_2x_2$ обязан переходить в

$$\varphi(v) = \varphi(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) \cdot x_2 = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2. \quad (2-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Убедитесь, что при любом выборе векторов $f_1, f_2 \in V$ формула (2-5) задаёт линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$.

Если векторы f_1 и f_2 имеют в базисе (e_1, e_2) координаты $\begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}$, т. е.

$$f_1 = e_1 \cdot \varphi_{11} + e_2 \cdot \varphi_{21} \quad \text{и} \quad f_2 = e_1 \cdot \varphi_{12} + e_2 \cdot \varphi_{22}, \quad (2-6)$$

то по формуле (2-5) действие отображения φ на произвольный вектор v с координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ задаётся правилом

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}, \quad (2-7)$$

которое принято сокращённо записывать как $x \mapsto \Phi_e x$, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_e x = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом используются следующие соглашения: произведением ab строки a на столбец b , высота которого равна ширине строки, считают один элемент

$$(a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_sb_s, \quad (2-8)$$

а произведением $P = AB$ таблицы A из m строк ширины s на таблицу B из n столбцов высоты s считают таблицу из m строк и n столбцов, в пересечении i -той строки и j -того столбца которой стоит произведение i -той строки из A на j -тый столбец из B , вычисленное по формуле (2-8):

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{v=1}^s a_{iv}b_{vj}. \quad (2-9)$$

Таблица из m строк и n столбцов называется *матрицей* размера $m \times n$. Матрица

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения* φ в базисе $e = (e_1, e_2)$, а её определитель

$$\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

называется *определителем отображения* φ и обозначается $\det \varphi$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Докажите для любых $u, v \in V$ равенство $s(\varphi(u), \varphi(v)) = s(u, v) \cdot \det \Phi_e$ и выведите из него, что а) число $\det \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \det \Phi_e \in \mathbb{k}$ зависит только от φ , но не от выбора базиса e б) $\varphi \in \text{GL}(V) \iff \det \varphi \neq 0$ в) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых 2×2 -матриц A и B . Проверьте также, что матрица композиции $\psi \circ \varphi$ в базисе e равна произведению матриц $\Psi_e \cdot \Phi_e$ (именно в таком порядке).

Если положить $\varphi(e) = (f_1, f_2)$, то в матричных обозначениях формулы (2-6) сократятся до $\varphi(e) = e\Phi_e$, равенство $v = e_1x_1 + e_2x_2$ — до $v = ex$, а вычисление, проделанное в (2-5) и (2-7) превратится в короткую выкладку $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = e\Phi_e x$, показывающую, что координатами вектора $\varphi(v)$ в базисе e является столбец $\Phi_e x$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Проверьте, что произведение матриц ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$ всякий раз, когда хоть одна из частей этого равенства определена.

Если на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(V)$ задан аффинный координатный репер (O, e_1, e_2) , и аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ переводит начальную точку $O \in \mathbb{A}^2$ в точку $B = \varphi(O)$

с координатами $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, а его дифференциал $\varphi = D_\varphi$ имеет в базисе $e = (e_1, e_2)$ векторного

пространства V матрицу $\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$, то действие φ на произвольную точку $X \in \mathbb{A}^2$ с

координатами $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ описывается формулой $X \mapsto B + \Phi_e X$ или, в развёрнутом виде,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \beta_2 + \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Убедитесь в этом, и выясните, как аффинное преобразование $X \mapsto B + AX$ изменяет площади ориентированных параллелограммов.

2.5. Преобразования, переводящие прямые в прямые. Биективное отображение аффинной плоскости в себя называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. Полуаффинные отображения, очевидно, образуют группу. В этом разделе мы покажем, что над полями \mathbb{Q} , \mathbb{R} и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое, все полуаффинные преобразования в действительности аффинны, а над произвольным полем \mathbb{k} каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}(\mathbb{k}^2) \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{k}^2)$ раскладывается в композицию $\varphi = \varphi_{\text{Aff}}\psi$ аффинного преобразования φ_{Aff} и преобразования

$$\psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \end{pmatrix}$$

вызванного каким-либо автоморфизмом $\psi : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$ основного поля \mathbb{k} . Над полями \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{F}_p таких «скручиваний с автоморфизмами» не возникает по той простой причине, что у этих полей нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. Мы начнём с небольшого напоминания об автоморфизмах полей.

2.5.1. Отступление об автоморфизмах полей. Биективное отображение из поля в себя

$$\psi : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \quad (2-10)$$

называется *автоморфизмом*, если оно сохраняет сложение и умножение, т. е. для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$

$$\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu) \quad \text{и} \quad \psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu).$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь, что каждое перестановочное со сложением и умножением отображение (2-10) либо инъективно, либо тождественно равно нулю, и автоматически обладает свойствами: $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при $\mu \neq 0$.

Из **упр. 2.7** вытекает, что ψ тождественно действует на элементах вида

$$\pm t/n \stackrel{\text{def}}{=} \pm(1 + 1 + \dots + 1)/(1 + 1 + \dots + 1) \in \mathbb{k}$$

(в числителе и знаменателе стоят суммы t и n единиц поля соответственно), ибо

$$\begin{aligned} \psi(\pm t/n) &= \pm \psi(t)/\psi(n) = \pm \psi(1 + 1 + \dots + 1)/\psi(1 + 1 + \dots + 1) = \\ &= \pm (\psi(1) + \psi(1) + \dots + \psi(1))/(\psi(1) + \psi(1) + \dots + \psi(1)) = \pm t/n. \end{aligned}$$

Поскольку в поле \mathbb{Q} и в полях вычетов \mathbb{F}_p никаких других элементов нет, у этих полей нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. В частности, всякий автоморфизм $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тождественно действует на подполе $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Кроме того, ψ является *строго монотонной функцией*, поскольку неравенство $\lambda < \mu$ влечёт равенство $\mu - \lambda = \alpha^2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, откуда $\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$, и $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8 (по анализу). Пусть строго монотонная функция $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(x) = x$ при $x \in \mathbb{Q}$. Покажите, что $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, поле вещественных чисел \mathbb{R} тоже не имеет нетождественных автоморфизмов. Напротив, поле комплексных чисел \mathbb{C} имеет нетождественный автоморфизм *комплексного сопряжения* $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$. Аналогичные автоморфизмы имеются и у других полей алгебраических чисел.

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Покажите что множество чисел $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ является полем и укажите нетождественный автоморфизм этого поля.

2.5.2. Дифференциал полуаффинного преобразования. В силу своей биективности, каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ переводит параллельные прямые в параллельные, а стало быть, параллелограммы — в параллелограммы. Поэтому из равенства $\overline{PQ} = \overline{RS}$ вытекает равенство $\overline{\varphi(P)\varphi(Q)} = \overline{\varphi(R)\varphi(S)}$. Это равенство верно, даже когда точки P, Q, R, S коллинеарны и не образуют параллелограмма: в этом случае надо выбрать вектор $\overline{XY} = \overline{PQ} = \overline{RS}$ на параллельной (PQ) прямой $(XY) \neq (PQ)$, как на **рис. 2◊1**, и использовать параллелограммы $PXYQ$ и $RXYZ$.

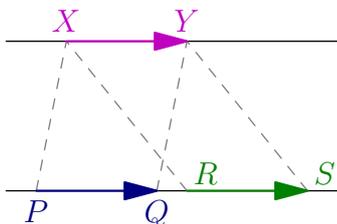


Рис. 2◊1. Корректность определения D_φ .

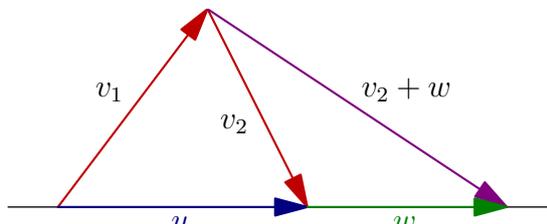


Рис. 2◊2. Аддитивность D_φ .

Таким образом, каждое полуаффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ корректно задаёт отображение векторов

$$D_\varphi : V \rightarrow V, \quad \overline{PQ} \mapsto \overline{\varphi(P)\varphi(Q)}. \quad (2-11)$$

Поскольку φ переводит параллелограмм со сторонами u, v в параллелограмм со сторонами $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$, отображение (2-11) аддитивно: $D_\varphi(u+w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w)$, причём это равенство справедливо и тогда, когда u и w пропорциональны (см. рис. 2◊2): представляя u в виде суммы векторов v_1 и v_2 , каждый из которых не пропорционален u , получаем

$$\begin{aligned} D_\varphi(u+w) &= D_\varphi(v_1+v_2+w) = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2+w) = \\ &= D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(v_1+v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Преобразование $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ однозначно восстанавливается, как только известен его дифференциал (2-11) и образ $\varphi(P)$ хоть одной точки $P \in \mathbb{A}^2$. Образ произвольной точки $Q \in \mathbb{A}^2$ при этом равен $\varphi(Q) = \varphi(P) + \overline{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi(P) + D_\varphi(\overline{PQ})$.

Предложение 2.6

Дифференциал D_φ полуаффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ полулинеен, т. е.

$$D_\varphi(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(w) \quad (2-12)$$

для некоторого зависящего лишь от φ автоморфизма $\psi : \mathbb{k} \simeq \mathbb{k}$ и любых $u, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{k}$.

Доказательство. Поскольку φ переводит прямые в прямые, D_φ переводит векторы, пропорциональные данному вектору v , в векторы, пропорциональные $D_\varphi(v)$. Поэтому каждый ненулевой вектор $v \in V$ задаёт отображение $\psi_v : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$, определяемое равенством $D_\varphi(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot D_\varphi(v)$. В силу биективности φ , все отображения ψ_v биективны. Покажем, что $\psi_u = \psi_w$ для любых двух непропорциональных векторов u, w . Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в пересекающиеся в одной точке прямые, векторы $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$ не пропорциональны и составляют базис в V . Из аддитивности D_φ вытекает, что

$$\begin{aligned} D_\varphi(\lambda(u+w)) &= \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u+w) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(w) \\ &\parallel \\ D_\varphi(\lambda u + \lambda w) &= D_\varphi(\lambda u) + D_\varphi(\lambda w) = \psi_u(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_w(\lambda) \cdot D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Из единственности разложения вектора по базису мы заключаем, что для всех $\lambda \in \mathbb{k}$ выполняются равенства

$$\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda).$$

Они выполняются и тогда, когда u и w пропорциональны, т. к. для любого непропорционального им вектора v справедливы равенства $\psi_u = \psi_v = \psi_w$. Таким образом, отображение ψ_v на самом деле не зависит от v и может быть обозначено просто через ψ . Из аддитивности D_φ вытекает, что ψ перестановочно со сложением и умножением. В самом деле, равенства

$$\begin{aligned} \psi(\lambda + \mu) \cdot D_\varphi(v) &= D_\varphi((\lambda + \mu)v) = D_\varphi(\lambda v + \mu v) = D_\varphi(\lambda v) + D_\varphi(\mu v) = \\ &= \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(v) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(v) = (\psi(\lambda) + \psi(\mu)) \cdot D_\varphi(v) \end{aligned}$$

показывают, что $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$, а из равенств

$$\psi(\lambda\mu) \cdot D_\varphi(v) = D_\varphi((\lambda\mu)v) = D_\varphi(\lambda(\mu v)) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu) \cdot D_\varphi(v)$$

мы получаем $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu)$. Тем самым, ψ это автоморфизм поля \mathbb{k} . □

Следствие 2.2

Над полями \mathbb{Q} , \mathbb{R} и \mathbb{F}_p биективное отображение $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ аффинно, если и только если оно переводит прямые в прямые. □

§3. Евклидова плоскость = комплексная прямая

Этот параграф посвящён метрической геометрии плоскости. Мы будем обсуждать длины и углы — величины, по природе своей являющиеся действительными числами и характеризующиеся специфическими для поля \mathbb{R} понятиями *неравенства* и *близости-удалённости*. Поэтому почти всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Исключения составляют н° 3.5, где обсуждаются комплексные числа, и н° 3.7, значительная часть которого имеет смысл над любым полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

Скалярным произведением (или евклидовой структурой) на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} называется симметричная билинейная положительная функция $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(v, w) \in \mathbb{R}$. При этом симметричность означает, что $(u, w) = (w, u)$ для всех $u, w \in V$, билинейность — что

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2),$$

а положительность — что $(v, v) > 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V$.

ПРИМЕР 3.1 (СТАНДАРТНАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА НА \mathbb{R}^n)

Скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ координатного пространства \mathbb{R}^n , заданное формулой

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

называется стандартным.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n билинейно, симметрично и положительно.

3.1. Расстояния и перпендикулярность. Неотрицательное число $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ называется длиной вектора v евклидова пространства V . Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|.$$

Скалярное произведение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto |v|$, как

$$(u, w) = \frac{1}{2} (|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2). \quad (3-1)$$

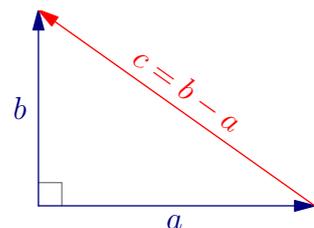


Рис. 3◊1. К теореме Пифагора.

Для пары точек p, q аффинной плоскости, ассоциированной с евклидовым пространством¹, длина вектора $\overline{pq} = q - p$ называется расстоянием между p и q . Мы обозначаем длину одним из двух способов: $|q - p| = |p, q| \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{pq}|$. Обратите внимание, что $|p - q| = |q - p|$.

¹Мы будем называть такие плоскости *евклидовыми*.

Векторы a и b называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если $(a, b) = 0$. Для перпендикулярных векторов a, b квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов a и b по *теореме Пифагора* (см. рис. 3◊1):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2. \quad (3-2)$$

Предложение 3.1

Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора a и произвольного вектора b существует единственная пара таких векторов b_a и b_{a^\perp} , что b_a пропорционален a , b_{a^\perp} перпендикулярен a , и $b = b_a + b_{a^\perp}$ (см. рис. 3◊2). Эти векторы выражаются через a и b как

$$b_a = \frac{(a, b)}{(a, a)} a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a, b)}{(a, a)} a, \quad (3-3)$$

причём $b_{a^\perp} = 0$, если и только если a и b пропорциональны, а $b_a = 0$, если и только если b перпендикулярен a .

Доказательство. Мы ищем такие векторы $b_a = \lambda a$ и $b_{a^\perp} = b - \lambda a$, что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda(a, a) = 0.$$

Поскольку $(a, a) \neq 0$, это равенство выполняется при единственном $\lambda = (a, b)/(a, a)$, и условие $b_{a^\perp} = 0$ при таком λ означает, что $(a, a) \cdot b = (a, b) \cdot a$, тогда как $b_a = 0$, если и только если $(a, b) = 0$. \square

Определение 3.2

Векторы b_a и b_{a^\perp} из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора b на одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot a$, порождённое вектором a , и *нормальной составляющей* вектора b относительно a .

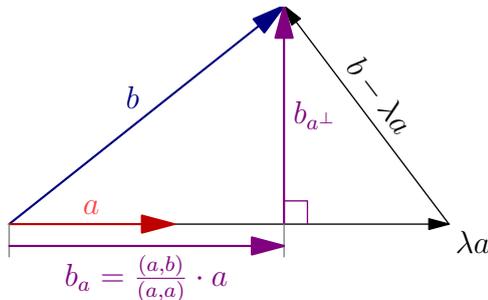


Рис. 3◊2. Ортогональная проекция b на a .

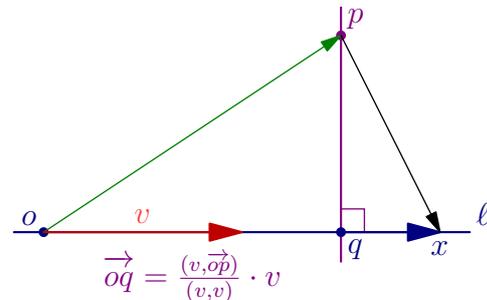


Рис. 3◊3. Перпендикуляр к прямой.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что векторы b_a и b_{a^\perp} не меняются при замене вектора a на пропорциональный вектор λa с $\lambda \neq 0$.

Следствие 3.1

Для любой прямой ℓ и точки $p \notin \ell$ следующие условия на точку $q \in \ell$ равносильны друг другу:

- 1) $|x - p| > |q - p|$ для любой точки $x \in \ell$, отличной от точки q

2) прямая (p, q) перпендикулярна прямой ℓ .

Точка $q \in \ell$ с такими свойствами существует и единственна.

Доказательство. Пусть прямая ℓ задаётся параметрическим уравнением $o + tv$, где $o \in \ell$ — произвольная точка, а v — вектор скорости прямой ℓ . Каждое из условий (1), (2) определяет на прямой ℓ единственную точку, и эти точки совпадают друг с другом. В самом деле, точка удовлетворяющая (1) очевидно единственна, если существует. Точка $q \in \ell$, такая что $\overrightarrow{q\bar{p}}$ перпендикулярен v , существует и единственна по предл. 3.1, применённому к векторам $a = v$ и $b = \overrightarrow{o\bar{p}}$, см. рис. 3◊3. При этом для любой отличной от q точки $x \in \ell$ по теореме Пифагора $|\overrightarrow{p\bar{x}}|^2 = |\overrightarrow{p\bar{q}}|^2 + |\overrightarrow{q\bar{x}}|^2 > |\overrightarrow{p\bar{q}}|^2$, откуда $|x - p| > |q - p|$. \square

Упражнение 3.3. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой.

Следствие 3.2 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)

Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|, \quad (3-4)$$

которое обращается в равенство, если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если оба вектора нулевые, обе части неравенства обращаются в нуль. Если $a \neq 0$, то длина нормальной составляющей вектора b относительно вектора a неотрицательна $(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b, b) - (a, b)^2 / (a, a) \geq 0$ и обращается в нуль, если и только если b пропорционален a . Домножая на (a, a) , получаем $(b, b)(a, a) \geq (a, b)^2$. Извлекая из обеих частей неотрицательный квадратный корень, приходим к (3-4). \square

Следствие 3.3 (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*¹ $|a + b| \leq |a| + |b|$, см. рис. 3◊4. Оно обращается в равенство, если и только если векторы a и b пропорциональны и *сонаправлены*².

Доказательство. Возводя обе части неравенства $|a + b| \leq |a| + |b|$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $(a + b, a + b) \leq (a, a) + 2|a| \cdot |b| + (b, b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство $(a, b) \leq |a| \cdot |b|$, отличающееся от неравенства Коши – Буняковского – Шварца отсутствием модуля в левой части. При $(a, b) < 0$ оно заведомо выполняется в строгой форме. При $(a, b) \geq 0$ оно выполняется по сл. 3.2 и превращается в равенство тогда и только тогда, когда $b = \lambda a$, причём $(a, b) \geq 0 \Rightarrow \lambda > 0$. \square

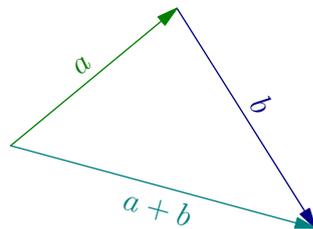


Рис. 3◊4. Неравенство треугольника.

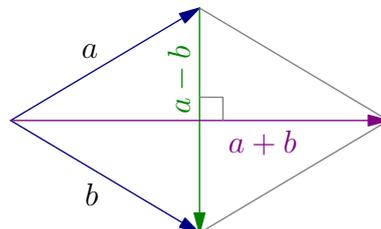


Рис. 3◊5. Диагонали ромба.

¹Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».

²Т.е. один получается из другого умножением на *положительное* число.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $(a + b, a - b) = 0$ для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$, см. рис. 3◊5.

ПРИМЕР 3.2 (ОТРЕЗОК)

Множество положительных барицентрических комбинаций двух точек a, b на вещественной плоскости обозначается $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geq 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1\}$ и называется *отрезком* с концами в точках a, b . В евклидовом пространстве отрезок также характеризуется как ГМТ x , таких что $|a - x| + |x - b| = |a - b|$, поскольку в силу неравенства треугольника это соотношение имеет место тогда и только тогда, когда векторы \overline{ax} , \overline{xb} и \overline{ab} сонаправлены, т. е. $\overline{ax} = \alpha \overline{ab}$ с $0 \leq \alpha = |x - a| / |b - a| \leq 1$.

3.2. Ортонормальные базисы. Векторы длины 1 называются *единичными*. Базис пространства \mathbb{R}^2 , образованный двумя перпендикулярными единичными векторами, называется *ортонормальным* базисом. Если векторы a и b не пропорциональны друг другу, то векторы $e_1 = a / |a|$ и $e_2 = b_{a^\perp} / |b_{a^\perp}|$, где $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a, b) / (a, a)$ — ортогональная проекция b на a , составляют ортонормальный базис.

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Покажите что каждый единичный вектор e включается ровно в два ортонормальных базиса (e, f) и $(e, -f)$ различной ориентации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2

Координаты вектора $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ в ортонормальном базисе e_1, e_2 равны его скалярным произведениям с базисными векторами: $x_1 = (u, e_1)$, $x_2 = (u, e_2)$, а скалярное произведение векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ имеет стандартный вид из прим. 3.1 на стр. 33: $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства¹ $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ на векторы e_1 и e_2 , второе — бесхитрым раскрытием скобок в $(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$. \square

ПРИМЕР 3.3 (УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ)

В координатах (x_1, x_2) относительно ортонормального базиса линейное неоднородное уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \quad (3-5)$$

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору

$$n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

и расположенную на расстоянии $|c| / |n|$ от начала координат с той же стороны, что вектор n , при $c > 0$ и с противоположной стороны — если $c < 0$. В самом деле,

уравнение (3-5) гласит, что переменный вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ имеет фиксированное скалярное произведение $(n, x) = c$ с вектором n . Это означает, что прямая (3-5) задается концами всех векторов x , которые ортогонально проектируются на вектор n в один и тот же вектор

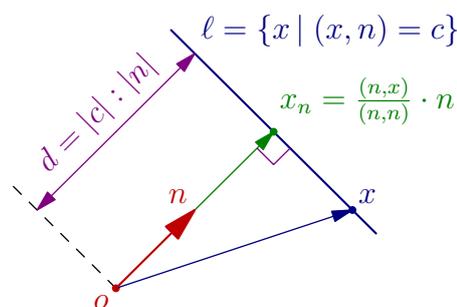


Рис. 3◊6. Прямая $(n, x) = c$.

¹Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 11.

$x_n = n \cdot (x, n) / (n, n) = n \cdot c / |n|^2$ (см. рис. 3◊6). Длина этой проекции равна $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c|/|n|$, а направление определяется знаком константы c : проекция сонаправлена с n при $c > 0$ и противоположно направлена при $c < 0$. При $c = 0$ прямая (3-5) проходит через начало координат.

В частности, *срединный перпендикуляр* к отрезку $[a, b]$, т. е. прямая перпендикулярная вектору $a - b$ и проходящая через точку $(a + b)/2$, задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2) \quad (3-6)$$

Две прямые, перпендикулярные одному и тому же вектору n и заданные уравнениями

$$(n, x) = c_1 \quad \text{и} \quad (n, x) = c_2$$

находятся друг от друга на расстоянии $|c_1 - c_2|/|n|$. Поэтому расстояние от точки a до прямой $(n, x) = c$, равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей проходящей через a прямой $(n, x) = (n, a)$, можно вычислять как $|c - (n, a)|/|n|$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых $(n_1, x) = c_1$ и $(n_2, x) = c_2$, задаются уравнениями $|n_2| \cdot (c_1 - (n_1, x)) = \pm |n_1| \cdot (c_2 - (n_2, x))$ и перпендикулярны друг другу.

Предложение 3.3 (определитель Грама)

Если e_1, e_2 образуют ортонормальный базис, и $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$, то

$$\frac{s^2(u, w)}{s^2(e_1, e_2)} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов u, w).

Доказательство. По сл. 1.2 на стр. 14 $s(u, w)/s(u, w) = \det(u, w) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. С другой стороны $(u, u) \cdot (w, w) - (u, w)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 - 2 x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Выведите из предл. 3.3 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

Следствие 3.4

Все ортонормальные базисы имеют равные по абсолютной величине площади.

Доказательство. Если векторы u, w образуют ортонормальный базис, то

$$\det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

откуда по предл. 3.3 $s(u, w) = \pm s(e_1, e_2)$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3

Функция площади на евклидовой плоскости называется *евклидовой*, если площадь всех положительно ориентированных ортонормальных базисов¹ равна единице. Всяду далее обозначения $s(u, v)$ и $s(ABC)$ по умолчанию подразумевают евклидову площадь параллелограмма и треугольника соответственно.

¹Второй вектор которых расположен в левой полуплоскости от первой координатной прямой, если смотреть вдоль первого базисного вектора.

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Покажите, что абсолютная величина евклидовой площади параллелограмма равна произведению длины основания на длину опущенной на него высоты, т. е.

$$|\det(a, b)| = |a| \cdot |b_{a^\perp}|.$$

3.3. Углы и тригонометрия. Коэффициенты x, y разложения $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$ единичного вектора f по положительно ориентированному ортонормальному базису e, e^\perp называются, соответственно, *косинусом* и *синусом* ориентированного угла¹ $\angle(e, f)$, так что

$$f = e \cdot \cos \angle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \angle(e, f) \quad (3-7)$$

(см. рис. 3◊7). Согласно лем. 1.2 на стр. 11 и предл. 3.2

$$\cos \angle(e, f) = (e, f) = s(f, e^\perp) \quad \text{и} \quad \sin \angle(e, f) = s(e, f) = (e^\perp, f). \quad (3-8)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Пусть вектор f^\perp образует положительный ортонормальный базис с вектором f . Покажите, что

$$f^\perp = -e \cdot \sin \angle(e, f) + e^\perp \cdot \cos \angle(e, f). \quad (3-9)$$

и $\cos \angle(f, e^\perp) = \sin \angle(e, f)$, $\sin \angle(f, e^\perp) = \cos \angle(e, f)$.

Из равенства $1 = (f, f) = x^2 + y^2$ вытекает основное тригонометрическое тождество $\cos^2 \angle(e, f) + \sin^2 \angle(e, f) = 1$ и неравенства $-1 \leq \cos \angle(e, f) \leq 1$, $-1 \leq \sin \angle(e, f) \leq 1$. Подставляя (3-7) и (3-9) в разложение произвольного единичного вектора $g = f \cdot \cos(\angle(f, g)) + f^\perp \cdot \sin(\angle(f, g))$ по ортонормальному базису f, f^\perp , получаем²

$$\begin{aligned} (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, g) \\ \sin \angle(e, g) \end{pmatrix} &= g = (f, f^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) & -\sin \angle(e, f) \\ \sin \angle(e, f) & \cos \angle(e, f) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. для любой тройки единичных векторов e, f, g справедливы формулы сложения углов:

$$\begin{aligned} \cos \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \sin \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g). \end{aligned} \quad (3-10)$$

Ориентированный угол $\angle(a, b)$ между произвольными векторами a и b равен углу между сонаправленными с ними единичными векторами $a/|a|$ и $b/|b|$. Поэтому

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} \quad \text{и} \quad \sin \angle(a, b) = \frac{s(a, b)}{|a| \cdot |b|}. \quad (3-11)$$

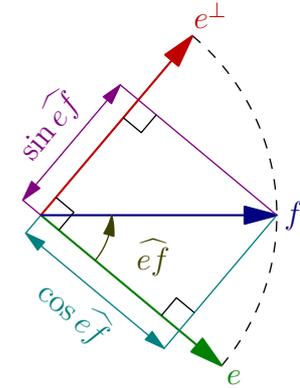


Рис. 3◊7.

¹Угол считается с плюсом, если он проходит против ЧС, и с минусом — если по ЧС.

²Мы пользуемся матричными обозначениями из н° 2.4 на стр. 28.

В частности, мы получаем ориентированную версию школьной формулы для площади:

$$s(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \sin \sphericalangle(a, b). \quad (3-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что для любых векторов $u, w \in V$ справедлива евклидова теорема косинусов: $|u + w|^2 = |u|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |u| \cdot |w| \cdot \cos \sphericalangle(u, w)$.

ПРИМЕР 3.4 (окружности)

ГМТ x , удалённых от данной точки o на заданное расстояние R , называется *окружностью* радиуса R с центром o и задаётся уравнением $(x - o, x - o) = R^2$. Поместим начало отсчёта в точку o и отложим от неё векторы $\pm r$ длины R как на рис. 3◊8. Равенство

$$(b + r, b - r) = |b|^2 - |r|^2$$

показывает, что точка b лежит на окружности, если и только если диаметр $[-r, r]$ виден из точки b под прямым углом. С другой стороны, точка b лежит на окружности, если и только если векторы r и b составляют ромб, что равносильно равенству углов $\sphericalangle(r, b) = 2\sphericalangle(r, r + b)$

(см. рис. 3◊8). Отсюда вытекает, что дуга видна из любой не лежащей на ней точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра:

$$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a, r) - \sphericalangle(b, r) = 2(\sphericalangle(a + r, r) - \sphericalangle(b + r, r)) = 2\sphericalangle(a + r, b + r).$$

В частности, окружность, последовательно проходящая через точки a, b, c, d существует тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов четырёхугольника $abcd$ равна полуокружности π .

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь прямым вычислением, что следующие три равенства равносильны друг другу: а) $|a| = |b|$ б) $(a - b) \perp (a + b)$ в) $\cos \sphericalangle(a, b) = 2 \cos^2 \sphericalangle(a, a + b) - 1$ (правая часть (в) равна косинусу двойного угла $\sphericalangle(a, a + b)$).

ПРИМЕР 3.5 (двойное отношение и углы)

Формула (3-12) позволяет переписать двойное отношение четырёх прямых $(pa), (pb), (pc), (pd)$ как

$$[(pa), (pb), (pc), (pd)] = \frac{s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pc})}{s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc})} : \frac{s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pd})}{s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pd})} = \frac{\sin \sphericalangle apc}{\sin \sphericalangle cpb} : \frac{\sin \sphericalangle apd}{\sin \sphericalangle dpb},$$

что лишний раз подтверждает его независимость от выбора точек a, b, c, d на прямых. Если же точки a, b, c, d и p лежат на одной окружности с центром в точке o , как на рис. 3◊9, то в силу предыдущего прим. 3.4 двойное отношение

$$[(pa), (pc), (pb), (pd)] = \frac{\sin \sphericalangle apb} \cdot \sin \sphericalangle dpb}{\sin \sphericalangle apd} \cdot \sin \sphericalangle cpb}$$

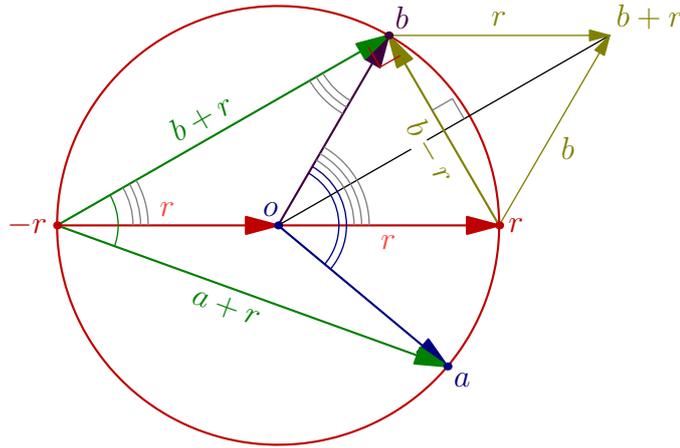


Рис. 3◊8. Окружность и углы.

не зависит от выбора точки p . Оно называется *двойным отношением четырёх точек окружности* и обозначается $[a, c, b, d]$. Если пары точек a, c и b, d диаметрально противоположны, как на рис. 3◊10, и $\varphi = \frac{1}{2}\sphericalangle aob = \sphericalangle arp = \sphericalangle cpd$, то

$$[a, c, b, d] = -\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \sphericalangle aob. \quad (3-13)$$

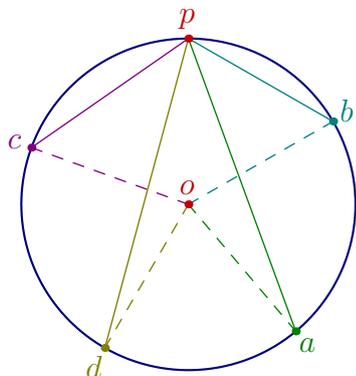


Рис. 3◊9. Двойное отношение на окружности.

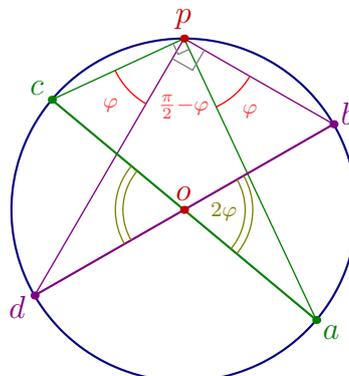


Рис. 3◊10. $[a, c, b, d] = -\operatorname{tg}^2 \varphi$.

3.4. Движения. Отображение $F : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е. $|p - q| = |F(p) - F(q)|$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Поскольку каждый отрезок $[a, b]$ является ГМТ x , таких что¹ $|a - x| + |x - b| = |a - b|$, каждое движение биективно переводит любой отрезок $[a, b]$ в отрезок $[F(a), F(b)]$ той же длины. Поэтому все движения биективны и переводят прямые в прямые. По сл. 2.2 на стр. 32 движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение F однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними, т. е. покажите, что в этих трёх случаях единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

Движения образуют в аффинной группе $\operatorname{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства $A(V)$ и обозначается $\operatorname{Isom}(V) \subset \operatorname{Aff}(A)$. Группа параллельных переносов T , очевидно, содержится в $\operatorname{Isom}(V)$.

3.4.1. Линейные ортогональные преобразования. Если произвольным образом зафиксировать начальную точку $O \in A(V)$, по предл. 2.5 разложить движение $F : A(V) \rightarrow A(V)$ в композицию $F = \tau_v \circ \varphi_O$ параллельного переноса на вектор $v = \overline{OF(O)}$ и оставляющего точку O на месте отображения $\varphi_O : X \mapsto O + \varphi(\overline{OX})$, построенного по линейному преобразованию $\varphi = DF : V \rightarrow V$ векторного пространства V , то преобразование $\varphi_O = \tau_{-v} \circ F$ тоже будет движением. Поэтому линейный автоморфизм $\varphi \in \operatorname{GL}(V)$ сохраняет длины векторов, а значит², и скалярные произведения:

$$(\varphi(u), \varphi(w)) = (|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2)/2 = (|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2)/2 = (v, w)$$

¹См. прим. 3.2 на стр. 36.

²См. 3-1 на стр. 33.

для всех $u, w \in V$. Такие линейные преобразования евклидова пространства V называются *ортогональными* или *изометрическими*. Поскольку ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно с точностью до знака сохраняет евклидову площадь, а значит имеет определитель¹ ± 1 . Ортогональные преобразования определителя $+1$ сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*, а преобразования определителя -1 меняют ориентацию и называются *несобственными*.

Пример 3.6 (отражения)

Всякий ненулевой вектор $n \in V$ задаёт несобственное ортогональное преобразование, которое называется *отражением*² относительно проходящей через начальную точку O перпендикулярно вектору n прямой $\ell = n^\perp$, задаваемой уравнением $(n, x) = 0$. Мы будем обозначать это отражение через σ_ℓ или же σ_n , где вектор n нормален к прямой³. Отражение σ_ℓ переводит вектор $v \in V$ в такой вектор $\sigma_\ell(v)$, ортогональная составляющая которого относительно вектора n та же, что и у v , а ортогональная проекция на n имеет противоположный знак (см. рис. 3◊11), т. е. $\sigma_\ell(v)_{n^\perp} = v_{n^\perp}$, а $\sigma_\ell(v)_n = -v_n$, или, что то же самое,

$$\sigma_n(v) = v - 2 \frac{(n, v)}{(n, n)} \cdot n. \quad (3-14)$$

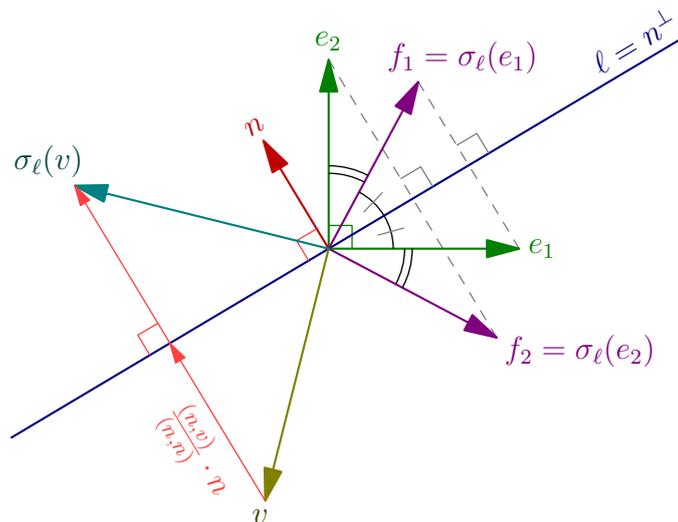


Рис. 3◊11. Отражение σ_ℓ .

Упражнение 3.13. Проверьте прямым вычислением, что σ_ℓ сохраняет скалярные произведения, и что для пропорциональных векторов $m = \lambda n$ формула (3-14) задаёт одно и то же преобразование $\sigma_m = \sigma_n = \sigma_\ell$, где $\ell = m^\perp = n^\perp$.

¹См. упр. 2.4 на стр. 29.

²В школьном курсе его также называют *осевой симметрией*.

³Если, как в этом примере, отражение понимается как линейное преобразование *векторного* пространства V , то второе обозначение σ_n обычно удобнее, хотя и не вполне корректно: пользуясь им, следует помнить, что $\sigma_n = \sigma_m$, когда m и n пропорциональны. Если отражение рассматривается на *аффинной* евклидовой плоскости, то удобнее первое обозначение σ_ℓ , поскольку аффинная прямая не задаётся однозначно своим вектором нормали.

Каждое несобственное ортогональное преобразование φ является отражением: если φ переводит единичный вектор e_1 в вектор f_1 , то φ переводит вектор e_2 , дополняющий e_1 до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор f_2 , дополняющий f_1 до отрицательно ориентированного базиса, как на рис. 3◊11. Отражение $\sigma_{f_1-e_1}$ относительно той диагонали ромба, натянутого на векторы e_1 и f_1 , что перпендикулярна¹ диагонали $f_1 - e_1$, соединяющей их концы, переводит e_1 в f_1 , а e_2 — в вектор, образующий с f_1 отрицательно ориентированный ортонормальный базис, то есть — по упр. 3.5 — в f_2 . Поэтому $\sigma_{f_1-e_1} = \varphi$. Из сказанного также вытекает, что любые два вектора e, f одинаковой длины переводятся друг в друга отражением (см. рис. 3◊11), матрица которого в положительно ориентированном базисе (e_1, e_2) с сонаправленным e вектором e_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1). \quad (3-15)$$

ПРИМЕР 3.7 (поворот)

Каждое собственное линейное ортогональное преобразование $\varphi : V \rightarrow V$ является поворотом: если φ переводит единичный вектор e_1 в f_1 , то вектор e_2 , дополняющий e_1 до положительно ориентированного ортонормального базиса, перейдёт в вектор f_2 , дополняющий f_1 тоже до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3◊12, и именно так действует на e_1 и e_2 поворот на ориентированный угол $\vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1)$. Матрица такого поворота в базисе e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \vartheta = \sphericalangle(e_1, f_1) \quad (3-16)$$

Мы будем обозначать поворот на угол ϑ против ЧС через ρ_ϑ или через $\rho_{O,\vartheta}$, если важно указать неподвижную точку поворота.

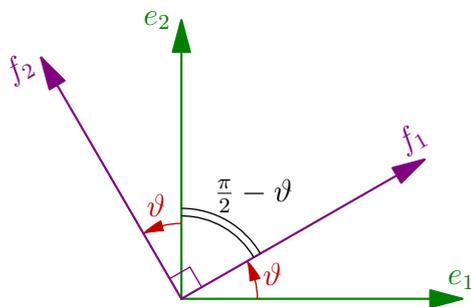


Рис. 3◊12. Поворот.

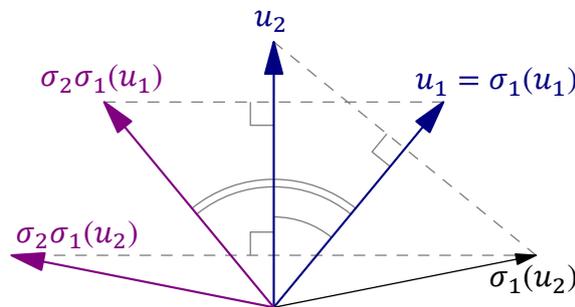


Рис. 3◊13. Композиция отражений.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Убедитесь прямым вычислением, что любая вещественная матрица размера 2×2 , столбцы которой образуют ортонормальный базис в \mathbb{R}^2 относительно стандартной евклидовой структуры², имеет либо вид (3-15), либо вид (3-16).

ПРИМЕР 3.8 (композиция отражений)

Из рис. 3◊13 видно, что последовательное выполнение отражений σ_1, σ_2 — сначала относительно прямой с вектором скорости u_1 , а затем — относительно прямой с вектором скорости

¹См. упр. 3.4 на стр. 36.

²См. прим. 3.1 на стр. 33.

u_2 — приводит к повороту в направлении от u_1 к u_2 на удвоенный угол между этими векторами: если выбрать в качестве базиса в V векторы u_1 и u_2 , то каждый из них повернётся на указанный угол, а поскольку и поворот, и композиция отражений являются *линейными* преобразованиями пространства V , из того, что они одинаково действуют на базис, вытекает, что они одинаково действуют и на любой другой вектор¹.

3.4.2. Движения аффинной евклидовой плоскости. Согласно предыдущему, всякое собственное движение G аффинной евклидовой плоскости является композицией $G = \tau_u \circ \varrho_{O,\vartheta}$ поворота вокруг некоторой точки O со сдвигом на некий вектор u , а всякое несобственное движение F — композицией $F = \tau_w \circ \sigma_\ell$ отражения относительно некой прямой ℓ со сдвигом на некоторый вектор w .

В первом случае, если поворот $\varrho_{O,\vartheta}$ происходит на ненулевой угол ϑ , движение G имеет неподвижную точку C — конец вектора u , отложенного на плоскости так, чтобы он был виден из точки O под нормальным углом² $-\vartheta$, см.

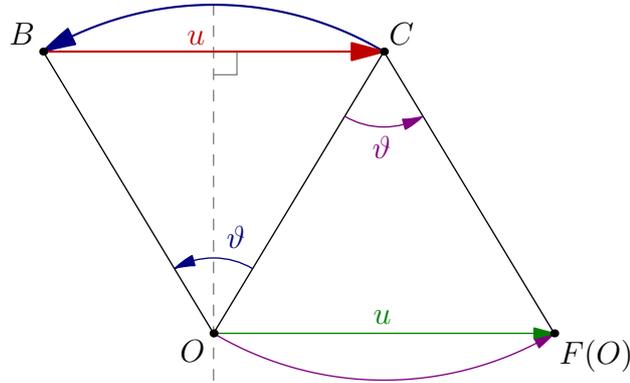


Рис. 3◊14. $G = \tau_u \circ \varrho_{O,\vartheta} = \varrho_{C,\vartheta}$.

рис. 3◊14. Стало быть, $G = \varrho_{C,\vartheta}$ является поворотом на угол ϑ вокруг C , ибо и G и $\varrho_{C,\vartheta}$ оставляют C на месте, одинаково действуют на O и являются собственными.

Упражнение 3.15. Найдите координаты точки C относительно положительно ориентированного ортонормального репера (O, u_1, u_2) , в котором u_1 сонаправлен u .

Во втором случае, движение $F = \tau_w \circ \sigma_\ell$ является композицией $F = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ отражения относительно сдвинутой на половину вектора w прямой $\tau_{w/2}(\ell)$ и коммутирующего с обоими отражениями сдвига на ортогональную проекцию w_ℓ вектора w на прямую ℓ , ибо обе композиции одинаково действуют на аффинный репер (O, v, n) , в котором $O \in \ell$ — любая точка, а $v, n \in V$ — единичные векторы скорости и нормали к прямой ℓ , см. рис. 3◊15. Движение вида $\lambda_{v,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v$, где $v \parallel \ell$, называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения скользящей симметрией предпочтительнее тем, что отражение и сдвиг в нём перестановочны друг с другом, а само представление единственно: прямая ℓ однозначно определяется преобразованием F как геометрическое место середин отрезков $[X, F(X)]$, а значит, и сдвиг $\tau_v = F \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ F$ тоже однозначно определяется по F . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

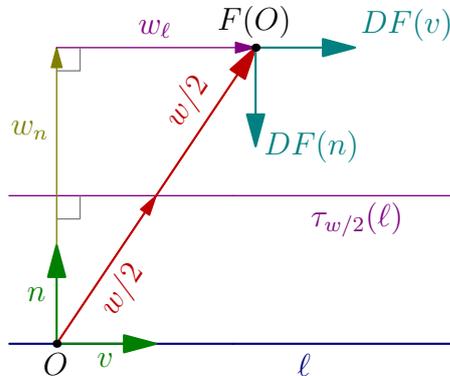


Рис. 3◊15. $F = \tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$. Значит, и сдвиг $\tau_v = F \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ F$ тоже однозначно определяется по F . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

ТЕОРЕМА 3.1 (ТЕОРЕМА ШАЛЯ³)

Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобствен-

¹См. н° 2.4 на стр. 28.

²Т.е. в виде диагонали $u = \overline{BC}$ ромба с вершиной в O и ориентированным углом $\sphericalangle(b, c) = -\vartheta$, где $\overline{OB}, c = \overline{OC}$.

ное — скользящей симметрией. □

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Покажите, что композиция отражения относительно прямой ℓ_1 с последующим отражением относительно параллельной ей прямой ℓ_2 является сдвигом на удвоенное расстояние между этими прямыми вдоль вектора их общей нормали, направленного от ℓ_1 к ℓ_2 .

Следствие 3.5

Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — трёх. □

3.5. Комплексные числа. На евклидовой плоскости с фиксированным ортонормальным репером имеется структура поля. Это поле обозначается \mathbb{C} и называется *полем комплексных чисел*. Начало координат является нулём поля \mathbb{C} и обозначается через 0 . Базисные векторы принято обозначать 1 и i , первый из них является единицей поля \mathbb{C} . Точки $z \in \mathbb{C}$ отождествляются с их *радиус-векторами* $\vec{z} = \vec{OZ}$, и в разложении такого вектора по базису $1, i$ единицу обычно не пишут. Таким образом, запись

$$z = x + yi = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot 1 + y \cdot i$$

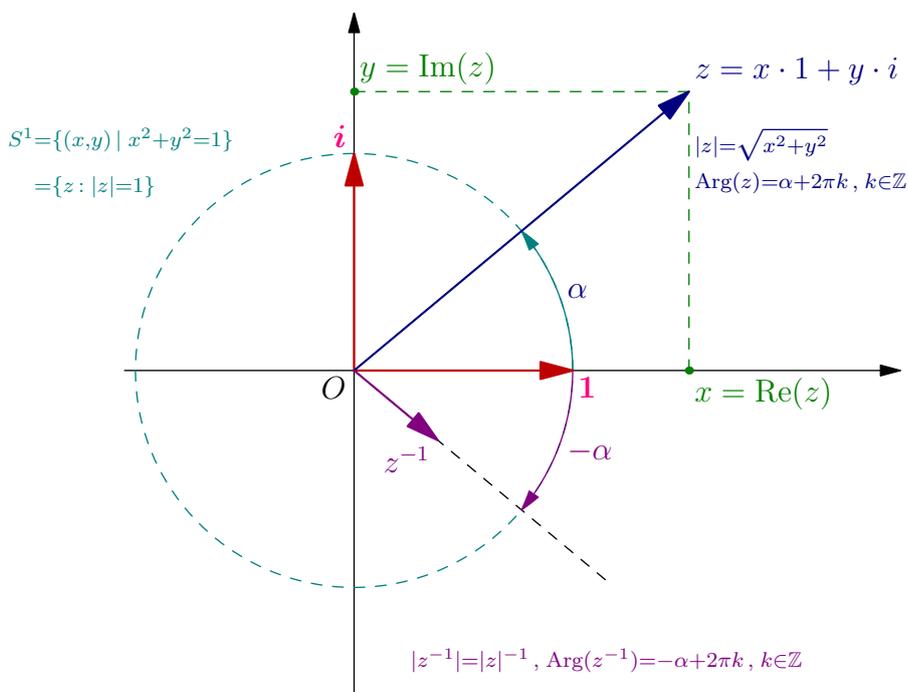


Рис. 3◊16. Комплексное число $z = x + iy$.

означает комплексное число $z \in \mathbb{C}$ с координатами (x, y) относительно раз и навсегда зафиксированного ортонормального репера $(0, \vec{1}, \vec{i})$. Это число находится на расстоянии $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ от начала координат и образует ориентированный угол $\alpha = \sphericalangle(1, z)$ с первым базисным вектором 1 , см. рис. 3◊16. Длина $|z|$ называется *модулем*, а ориентированный угол α — *аргументом*

³Michel Floréal Chasles (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

числа z . Аргумент также обозначают $\text{Arg}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, имея при этом в виду ориентированную длину дуги единичной окружности — вещественное число, определённое с точностью до целого числа оборотов. Координаты x и y называют *действительной* и *мнимой* частями числа $z \in \mathbb{C}$ и обозначают через $\text{Re}(z) = x$, $\text{Im}(z) = y$.

Сложение комплексных чисел определяется как сложение радиус-векторов: $z_1 + z_2$ есть точка, радиус вектор которой равен сумме радиус-векторов точек z_1 и z_2 . В координатах это описывается формулой $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$. Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 определяется как число, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$|z_1 z_2| \stackrel{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \{\vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \text{Arg}(z_1), \vartheta_2 \in \text{Arg}(z_2)\}$$

По сложению комплексные числа образуют абелеву группу, изоморфную группе векторов евклидовой плоскости. Ненулевые комплексные числа образуют абелеву группу по умножению. Нейтральным элементом является первый базисный вектор 1. Обратным к ненулевому $z \in \mathbb{C}$ является число с обратным модулем и противоположным аргументом: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$, см. рис. 3◊16. Чтобы убедиться в том, что \mathbb{C} поле, остаётся проверить дистрибутивность, т. е. что $a(b + c) = ab + ac$ для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$. На геометрическом языке это означает, что отображение умножения $\lambda_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az$, на фиксированное число $a \in \mathbb{C}$ аддитивно, т. е. $\lambda_a(b + c) = \lambda_a(b) + \lambda_a(c)$. Но это отображение — *поворотная гомотетия*, т. е. композиция поворота на угол $\text{Arg}(a)$ вокруг точки 0 и умножения всех векторов евклидовой плоскости на вещественное число $|a|$. Поскольку и поворот, и гомотетия линейны, линейно и отображение λ_a . Мы получаем

Предложение 3.4

Комплексные числа образуют поле. □

3.5.1. Алгебраическое представление комплексных чисел. Порождённая первым базисным вектором координатная прямая $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$ составляет подполе, изоморфное полю вещественных чисел: при ограничении на эту прямую правило умножения комплексных чисел превращается в обычное правило умножения вещественных чисел¹. Разложение $z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + yi$ вектора $z \in \mathbb{C}$ по базису превращается в равенство в поле \mathbb{C} , если понимать в нём числа $x, y \in \mathbb{R}$ как точки координатной прямой $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$, а сложение и умножение — как сложение и умножение комплексных чисел. Из определения умножения вытекает, что второй базисный вектор i удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$. Пользуясь этим соотношением и дистрибутивностью, можно описать произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ алгебраической формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3-17)$$

Обратное к числу $z = x + iy$ число z^{-1} так же легко выражается через x и y :

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{|z|^2} - \frac{iy}{|z|^2}, \quad (3-18)$$

откуда $\text{Re}(z^{-1}) = \text{Re}(z)/|z|^2$ и $\text{Im}(z^{-1}) = -\text{Im}(z)/|z|^2$. Число $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = x + iy$. В терминах комплексного сопряжения формулу для обратного

¹Т. е. в «минус на минус даёт плюс» и т. п.

числа можно записать в виде $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$. Геометрически, комплексное сопряжение $z \mapsto \bar{z}$ представляет собою симметрию комплексной плоскости относительно вещественной оси OX . С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля \mathbb{C} , т. е. $\overline{\bar{z}} = z$ и $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ для всех $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.17. Покажите, что следующие свойства автоморфизма $\varphi : \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ эквивалентны: а) $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ б) φ является линейным преобразованием двумерного векторного пространства \mathbb{C} над полем \mathbb{R} в) φ либо тождественен, либо является комплексным сопряжением.

3.6. Преобразования подобия. Отображение $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ евклидовой аффинной плоскости в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все длины в фиксированное число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа $\gamma = \gamma(\varphi)$, зависящая только от φ и называемая *коэффициентом подобия* φ , что $|\varphi(p) - \varphi(q)| = \gamma|p - q|$ для всех точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Подобия образуют группу, которая называется *группой подобий*. Все движения являются подобиями с коэффициентом 1. Те же аргументы, что и для движений¹, показывают, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть являются аффинными преобразованиями.

УПРАЖНЕНИЕ 3.18. Убедитесь в этом, а также в том, что подобия переводят окружности в окружности.

Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

ЛЕММА 3.1

Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

Доказательство. Беря композицию подобия φ с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства. Тогда для любых двух векторов u, w

$$\begin{aligned} 4(\varphi(u), \varphi(w)) &= |\varphi(u) + \varphi(w)|^2 - |\varphi(u) - \varphi(w)|^2 = \\ &= |\varphi(u + w)|^2 - |\varphi(u - w)|^2 = \gamma^2(|u + w|^2 - |u - w|^2) = 4\gamma^2(u, w), \end{aligned} \quad (3-19)$$

откуда $\cos \angle(\varphi(u), \varphi(w)) = (\varphi(u), \varphi(w)) : (|\varphi(u)| \cdot |\varphi(w)|) = (u, w) : (|u| \cdot |w|) = \cos \angle(u, w)$, т. е. $\angle(\varphi(u), \varphi(w)) = \pm \angle(u, w)$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5

Каждое собственное подобие вещественной плоскости \mathbb{C} является аффинным преобразованием комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, т. е. имеет вид $z \mapsto az + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$. Каждое несобственное подобие является полуаффинным преобразованием вида $z \mapsto a\bar{z} + b$. Наоборот, все такие преобразования являются подобиями. В частности, группа собственных подобий вещественной евклидовой плоскости изоморфна аффинной группе комплексной прямой.

¹См. п.° 3.4 на стр. 40.

Доказательство. Пусть φ — собственное подобие. Беря композицию φ со сдвигом, мы можем и будем считать, что φ оставляет нуль на месте. Поскольку преобразование φ сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число γ , оно является поворотной гомотетией, т. е. умножением на некоторое комплексное число, что доказывает первое утверждение. Если φ — несобственное подобие, то композиция φ с отражением относительно действительной оси, т. е. преобразование $z \mapsto \varphi(\bar{z})$ является собственным подобием и по доказанному имеет вид $z \mapsto az + b$. Поэтому $\varphi(z) = a\bar{z} + b$. \square

Следствие 3.6

Для любых двух пар различных точек $a \neq b$ и $c \neq d$ имеется единственное собственное подобие переводящее a в c и b в d .

Доказательство. Система уравнений $c = za + w$, $d = zb + w$ имеет в поле \mathbb{C} единственное решение $z = \frac{c-d}{a-b}$, $w = \frac{ad-bc}{a-b}$. \square

Следствие 3.7

Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

Доказательство. Аффинное преобразование $z \mapsto az + b$ с нетождественным дифференциалом $a \neq 1$ имеет неподвижную точку $c = b/(1-a)$ и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки. \square

3.7. Проективная прямая и круговые преобразования. Рассмотрим двумерное векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{k} . Множество одномерных векторных подпространств в V называется *проективной прямой* над полем \mathbb{k} и обозначается $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$ или $\mathbb{P}(V)$. Таким образом, точками проективной прямой $\mathbb{P}(V)$ являются ненулевые векторы $v \in V$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или, что то же самое, проходящие через начальную точку 0 прямые $p_v = \{tv \mid t \in \mathbb{k}\}$ на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(V)$. Иначе точки проективной прямой $\mathbb{P}(V)$ можно воспринимать как *направления* на аффинной плоскости $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их в виде «обычных» точек, внутрь плоскости \mathbb{A}^2 следует поместить экран — какую-нибудь не проходящую через начальную точку 0 аффинную прямую $U \subset \mathbb{A}^2$, как на рис. 3◊17, и сопоставить проходящей через 0 прямой p точку её пересечения $u_p = p \cap U$ с этим экраном. Всякий такой экран $U \subset \mathbb{A}(V)$ называют *аффинной картой* на проективной прямой $\mathbb{P}(V)$, а точки $u_p = p \cap U$ называются *изображениями* точек $p \in \mathbb{P}_1$ в аффинной карте U . В любой аффинной карте $U \subset \mathbb{A}(V)$ изображаются все точки проективной прямой $\mathbb{P}(V)$ за исключением одной — направления самой прямой U , т. е. одномерного векторного подпространства в V , порождённого вектором скорости прямой U . Эта единственная невидная в карте U точка обозначается u_∞ и называется *бесконечно удалённой* точкой аффинной карты U . Таким образом, как множество, проективная

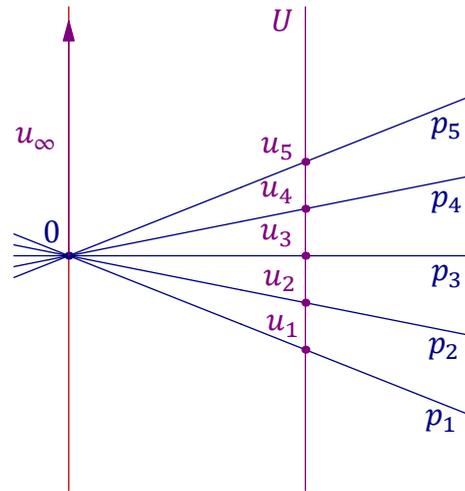
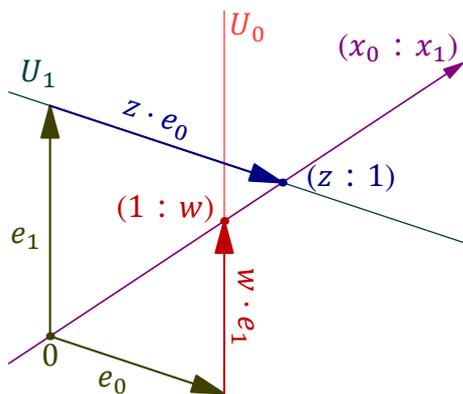


Рис. 3◊17. Изображения u_i точек p_i проективной прямой $\mathbb{P}(V)$ в аффинной карте $U \subset \mathbb{A}(V)$.

прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{A}^1 \sqcup \infty$ является дизъюнктивным объединением аффинной прямой \mathbb{A}^1 и ещё одной, бесконечно удалённой точки ∞ .

3.7.1. Однородная и аффинные координаты. Если фиксировать в векторном пространстве V какой-нибудь базис e_0, e_1 , то точка проективной прямой, изображающая класс пропорциональности ненулевого вектора $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$, однозначно характеризуется отношением координат $x_0 : x_1$ вектора v в этом базисе. Это отношение называется *однородной координатой* точки $x \in \mathbb{P}_1$. Оно может принимать любое значение из поля \mathbb{k} , а также значение $\infty \stackrel{\text{def}}{=} x_0 : 0$, где $x_0 \neq 0$, отвечающее классу пропорциональности базисного вектора e_0 . Нулевому значению однородной координаты $0 = 0 : x_1$, где $x_1 \neq 0$, отвечает класс пропорциональности базисного вектора e_1 . Аффинная карта



$$U_1 \stackrel{\text{def}}{=} e_1 + \mathbb{k} \cdot e_0 = \{e_1 + z e_0 \mid z \in \mathbb{k}\},$$

которая проходит через конец вектора e_1 в направлении вектора e_0 и задаётся в \mathbb{A}^2 уравнением $x_1 = 1$, называется *аффинной окрестностью нуля*. Каждая точка $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$ с конечной однородной координатой $z = x_0 : x_1 \neq \infty$ видна в этой карте в виде точки $e_1 + z \cdot e_0$. Отношение $z = x_0 : x_1 \in \mathbb{k}$ называется *аффинной координатой* на \mathbb{P}_1 в окрестности нуля. Аффинная карта

Рис. 3◊18. Склейка аффинных карт

$$z \leftrightarrow w = 1/z.$$

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} e_0 + \mathbb{k} \cdot e_1 = \{e_0 + w e_1 \mid w \in \mathbb{k}\},$$

которая проходит через конец вектора e_0 в направлении вектора e_1 и задаётся в \mathbb{A}^2 уравнением $x_0 = 1$, называется *аффинной окрестностью бесконечности*. Каждая точка $x = e_0 \cdot x_0 + e_1 \cdot x_1$ с ненулевой однородной координатой $x_0 : x_1 \neq 0$ видна в этой карте в виде точки $e_0 + w \cdot e_1$, где $w = x_1 : x_0 = 1/z \in \mathbb{k}$. Число w называется *аффинной координатой* на \mathbb{P}_1 в окрестности бесконечности. состоит из всех точек вида $e_1 + z \cdot e_0$. Координата $z \in \mathbb{k}$ точки такого вида называется *аффинной координатой* в окрестности нуля. Пересечение карт $U_0 \cap U_1$ состоит из всех $x \in \mathbb{P}_1$ с конечными ненулевыми однородными координатами $x_0 : x_1 = z : 1 = 1 : w$. Аффинные координаты z и w таких точек отличны от нуля и обратны друг другу: $w = 1/z$, см. рис. 3◊18.

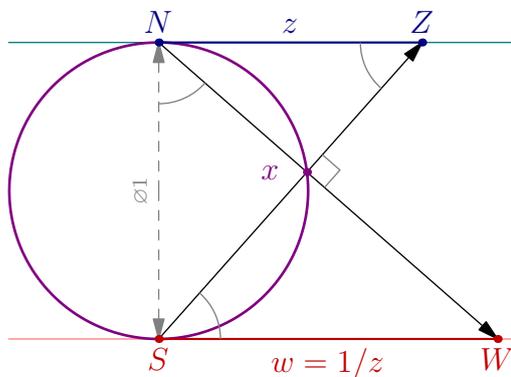


Рис. 3◊19. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Таким образом, проективную прямую \mathbb{P}_1 можно воспринимать как результат склейки двух аффинных прямых \mathbb{A}^1 , на которых зафиксированы аффинные координаты z и w соответственно. Склейка производится по дополнениям до начал координат и отождествляет точки с координатами z и $w = 1/z$.

Пример 3.9 (окружность $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$)

Если основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, то результат описанной выше склейки можно представлять себе как окружность диаметра 1, склеенную из двух диаметрально противоположных касательных

прямых, каждая из которых проектируется на окружность из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания, как на рис. 3◊19. В самом деле, беря точки касания за начала координат на каждой из касательных, из подобия прямоугольных треугольников NSW и ZNS на рис. 3◊19 мы заключаем, что точка Z с координатой z на верхней касательной и точка W с координатой w на нижней проектируются в одну и ту же точку окружности, если и только если $w = 1/z$. Такое отождествление пополненной числовой прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \sqcup \infty$ с окружностью хорошо согласуется с тем представлением о бесконечности, которое принято в математическом анализе: стремление к бесконечности координаты z на верхней числовой прямой с рис. 3◊19 означает стремление к нулю координаты $w = 1/z$ на нижней, и маленькие ε -окрестности точки S на окружности выглядят на верхней числовой прямой в виде дополнений до больших отрезков $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$, которые используются как «окрестности бесконечности» в анализе.

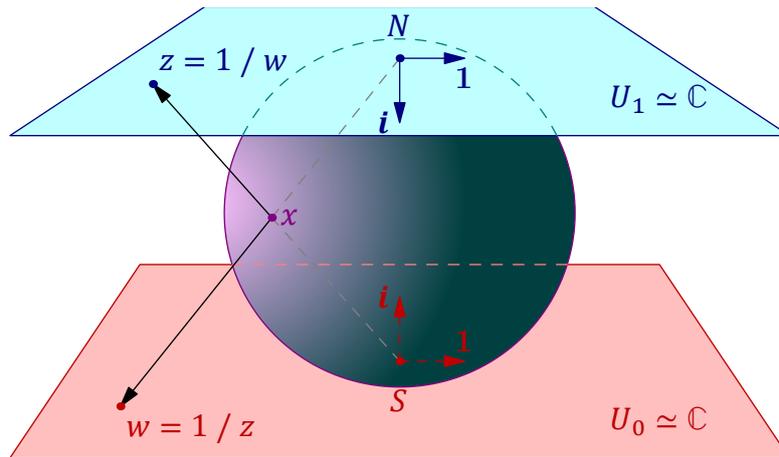


Рис. 3◊20. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Пример 3.10 (сфера Римана $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$)

При $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ в результате склейки двух аффинных прямых $A^1 = \mathbb{C}$ вдоль дополнений до нуля по правилу $z \leftrightarrow 1/z$ получится сфера, поскольку, как и в предыдущем примере, сфера диаметра 1 является результатом склейки друг с другом двух диаметрально противоположных касательных плоскостей, каждая из которых стереографически проектируется на сферу из точки, диаметрально противоположной к точке своего касания со сферой, как на рис. 3◊20. В самом деле, если за начала отсчёта в каждой из плоскостей принять точку касания, а векторы $1, i \in \mathbb{C}$ направить так¹, как на рис. 3◊20, то комплексные числа z и w из разных плоскостей проектируются в одну и ту же точку сферы, если и только если² $\text{Arg } z = -\text{Arg } w$ и $|z| = 1/|w|$, т. е. когда $w = 1/z$ в \mathbb{C} . По этой причине комплексную проективную прямую $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ часто называют *сферой Римана*, а также *полполненной комплексной плоскостью*.

3.7.2. Дробно линейные преобразования. Группа $GL(V)$ линейных автоморфизмов пространства V переводит одномерные векторные подпространства в одномерные подпространства и таким образом действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$. В терминах однородных

¹Обратите внимание, что ориентации плоскостей при этом согласованы в том смысле, что одну из них можно непрерывным перекатыванием по поверхности сферы совместить с другой так, что ориентации будут одинаковыми.

²Первое очевидно из рис. 3◊20, второе — из рассмотрения сечения рис. 3◊20 плоскостью NxS , которое было представлено на рис. 3◊19 выше.

координат, линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$, действующее на базис e_0, e_1 по правилу¹

$$\varphi : (e_0, e_1) \mapsto (e_0, e_1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

переводит точку $x \in \mathbb{P}_1$ с однородными координатами $x_0 : x_1$ в точку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}.$$

В терминах аффинной координаты $z = x_0 / x_1$ в окрестности нуля, это действие описывается формулой $z \mapsto (az + b) / (cz + d)$ и называется *дробно линейным преобразованием*. Два линейных отображения $\varphi, \psi : V \rightarrow V$ задают одно и то же дробно линейное преобразование, если и только если они пропорциональны, т. е. различаются на гомотетию: $\psi = \gamma\varphi$, где $\gamma \in \mathbb{k} \setminus 0$. Согласно [упр. 2.1](#) любые три различные точки на \mathbb{P}_1 переводятся в любые три различные точки единственным дробно линейным преобразованием. Например, дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки p, q, r в $\infty, 0, 1$ имеет вид

$$z \mapsto \frac{z - q}{z - p} : \frac{r - q}{r - p}.$$

Образ точки s при таком преобразовании равен *двойному отношению*²

$$\frac{s - q}{s - p} : \frac{r - q}{r - p} = \frac{r - p}{q - r} : \frac{s - p}{q - s} = [p, q, r, s]. \quad (3-20)$$

Упражнение 3.19. Не опираясь на [предл. 2.4](#) на стр. 26, докажите, что две упорядоченных четвёрки точек на \mathbb{P}_1 тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием, когда их двойные отношения одинаковы.

3.7.3. Группа Мёбиуса. Дробно линейные преобразования комплексной проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, а также преобразования вида $z \mapsto (a\bar{z} + b) / (c\bar{z} + d)$, которые являются композициями дробно линейных преобразований с симметрией $z \mapsto \bar{z}$ относительно действительной оси, называются, соответственно, *собственными* и *несобственными мёбиусовыми преобразованиями*. По [упр. 3.19](#) каждое собственное мёбиусово преобразование сохраняет двойные отношения четвёрок различных точек

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}$$

и однозначно определяется своим действием на любые три различные точки. Несобственные мёбиусовы преобразования комплексно сопрягают двойные отношения.

Упражнение 3.20. Покажите, что четыре различных комплексных числа лежат на одной прямой или окружности, если и только если их двойное отношение вещественно.

Поэтому мёбиусовы преобразования переводят прямые и окружности в прямые или окружности.

¹Т. е. переводящее векторы e_0 и e_1 , соответственно, в векторы $e_0 \cdot a + e_1 \cdot c$ и $e_0 \cdot b + e_1 \cdot d$. Разъяснение матричных обозначений см. в [н° 2.4](#) на стр. 28.

²См. [н° 1.6.2](#) на стр. 22.

3.7.4. Иверсии. Для произвольной окружности $C \subset \mathbb{C}$ радиуса r с центром в точке $c \in \mathbb{C}$ мёбиусово преобразование $\sigma_C: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, действующее по правилу

$$\sigma_C: z \mapsto c + \frac{r^2}{z - c} = c + \frac{r^2}{|z - c|^2} \cdot (z - c), \quad (3-21)$$

называется *инверсией* относительно окружности C . Инверсия σ_C оставляет на месте все точки окружности C , переводит друг в друга центр c и ∞ , а каждую конечную точку $z \neq c$ отображает в такую точку z' луча $]c, z)$, что $|z' - c| \cdot |z - c| = r^2$. Например, инверсия σ_S относительно единичной окружности с центром в нуле $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ действует по правилу $z \mapsto 1/\bar{z}$, сохраняя аргументы и оборачивая модули. Будучи мёбиусовым преобразованием, любая инверсия переводит прямые и окружности в прямые или окружности.

УПРАЖНЕНИЕ 3.21. Убедитесь, что каждая проходящая через c прямая преобразуется инверсией в себя, не проходящая через c прямая ℓ — в проходящую через c окружность с центром на опущенном из c перпендикуляре к ℓ , а не проходящая через c окружность S — в окружность с центром на линии центров S и C .

Предложение 3.6

Каждая инверсия σ_C сохраняет абсолютные величины углов¹ между прямыми и окружностями, но меняет ориентацию этих углов на противоположную, см. [рис. 3♦21](#).

Доказательство. Так как через любые три различные неколлинеарные точки проходит единственная окружность, каждая окружность, проходящая через инверсные относительно заданной окружности C точки z и $z' = \sigma_C(z)$ переводится инверсией σ_C в себя. Для любой проходящей через точку z прямой ℓ существует единственная проходящая через z и z' окружность, касающаяся прямой ℓ в точке z . Угол между двумя такими окружностями, касающимися прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точке z , равен углу, под которым эти же окружности пересекаются в точке z' , причём эти углы имеют противоположную ориентацию, см. [рис. 3♦21](#). Это доказывает предложение для углов с вершиной вне окружности C . Для углов с вершиной на C предложение вытекает из того, что инверсия σ_C является композицией инверсии относительно окружности вдвое меньшего радиуса с тем же центром c и гомотетии с центром в c и коэффициентом 4. □

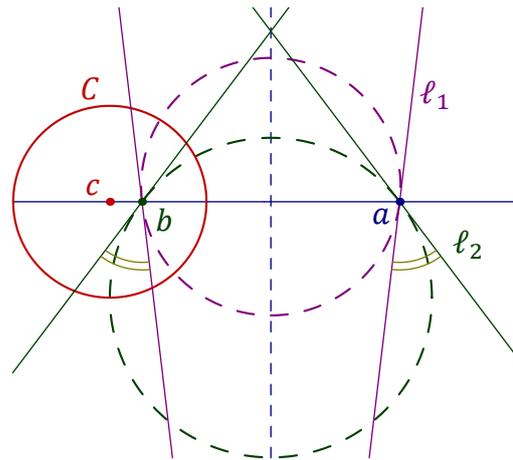


Рис. 3♦21. Инверсия сохраняет абсолютные величины углов и обращает их ориентацию.

Следствие 3.8

Точки a и b тогда и только тогда инверсны относительно окружности C , когда все проходящие через a и b окружности, а также прямая (ab) перпендикулярны окружности C , см. [рис. 3♦22](#).

¹Под углом между пересекающимися окружностями (соотв. прямой и окружностью) понимается угол между их касательными (соотв. между прямой и касательной к окружности) в точке их пересечения.

Доказательство. Если точки a и b инверсны, то любая проходящая через них окружность S переводится инверсией σ_C в себя, поскольку через точки a, b и $S \cap C$ проходит единственная окружность. Поскольку инверсия σ_C меняет ориентацию окружности S на противоположную, угол между окружностями S и C в каждой из точек пересечения $C \cap S$ равен смежному с ним углу, т. е. является прямым. Наоборот, пусть прямая (ab) и какая-нибудь проходящая через точки a и b окружность S перпендикулярны окружности C . Первое означает, что точки a, b, c коллинеарны, а второе — что степень¹ центра c окружности C относительно этой окружности S с одной стороны равна квадрату радиуса r^2 окружности C , а с другой стороны — произведению $|c, a| \cdot |c, b|$, откуда $|c, a| \cdot |c, b| = r^2$, см. рис. 3◊23. \square

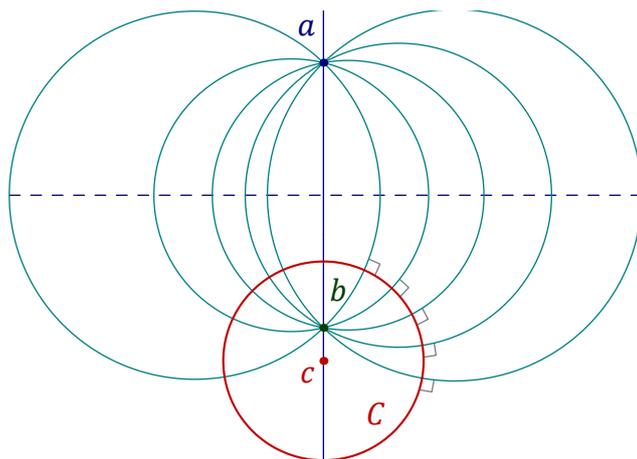


Рис. 3◊22. Отражение относительно окружности.

УПРАЖНЕНИЕ 3.22 (ТЕОРЕМА О СТЕПЕНИ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ). Покажите, что для любой проходящей через точку c прямой, пересекающей окружность радиуса ϱ с центром в точке p в точках² a и b , как на рис. 3◊23, выполняется равенство $|c, a| \cdot |c, b| = |c, p|^2 - \varrho^2$.

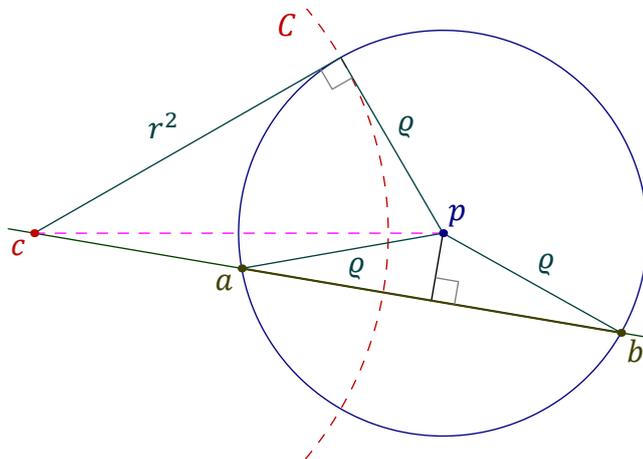


Рис. 3◊23. Степень $|c, p|^2 - r^2$ точки c относительно окружности радиуса ϱ с центром в точке p равна $r^2 = |c, a| \cdot |c, b|$.

¹Напомним, что степенью точки c относительно окружности радиуса ϱ с центром в точке p называется разность $|c, p|^2 - r^2$, см. рис. 3◊23, а также н° 6.5.2 на стр. 101 ниже.

²Если прямая касается окружности в точке t , то мы полагаем $a = b = t$.

Замечание 3.1. Предыдущее сл. 3.8 оправдывает другое общепринятое название для инверсии σ_C — «отражение относительно окружности C », ибо точки a и b симметричны относительно прямой ℓ , если и только если все проходящие через a и b окружности перпендикулярны ℓ , ср. рис. 3◊22 и рис. 3◊24.

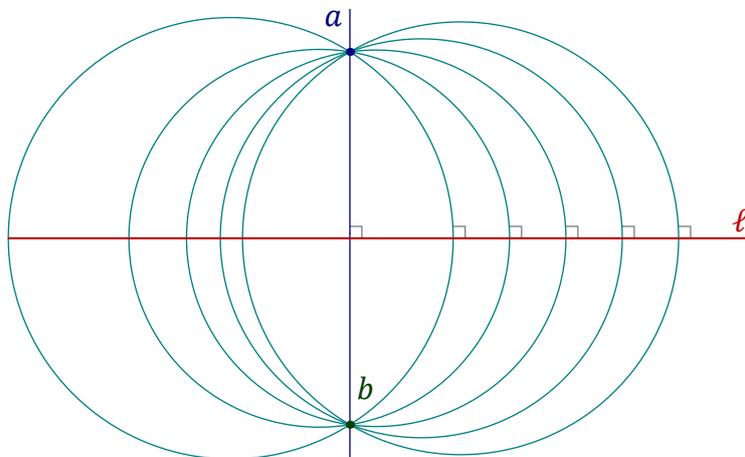


Рис. 3◊24. Отражение относительно прямой.

Упражнение 3.23. Пусть прямая или окружность D инверсна прямой или окружности E относительно окружности C . Покажите, что отражения σ_C , σ_D и σ_E связаны соотношением

$$\sigma_C \sigma_D \sigma_C = \sigma_E.$$

ТЕОРЕМА 3.2 (ГРУППА КРУГОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ)

Группа мёбиусовых преобразований комплексной проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ порождается¹ отражениями относительно прямых и окружностей. При этом собственные мёбиусовы преобразования сохраняют углы и ориентацию, а несобственные сохраняют абсолютные величины углов и обращают ориентацию.

Доказательство. Формула (3-21) показывает, что инверсии являются несобственными мёбиусовыми преобразованиями.

Упражнение 3.24. Убедитесь, что отражения относительно прямых также являются несобственными мёбиусовыми преобразованиями.

Поэтому группа, порождённая отражениями относительно прямых и окружностей, лежит в мёбиусовой группе. С другой стороны, собственные дробно линейные преобразования суть композиции преобразований вида $z \mapsto 1/z$, $z \mapsto az$ и $z \mapsto a + z$. Первое из них является композицией инверсии с отражением, последнее — композицией двух отражений относительно параллельных прямых. Поворотная гомотетия $z \mapsto az$ есть композиция поворота, раскладывающегося в композицию двух отражений, и гомотетии, которая является композицией двух инверсий относительно концентрических окружностей.

Упражнение 3.25. Каков радиус окружности, инверсия относительно которой в композиции с последующей инверсией относительно окружности единичного радиуса с тем же центром является гомотетией с коэффициентом γ относительно этого центра?

¹Т. е. любой элемент этой группы является композицией конечного числа отражений относительно окружностей и прямых

Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение следует из того, что собственное мёбиусово преобразование является композицией поворотов, гомотетий, параллельных переносов и преобразования $z \mapsto 1/z$, и все эти преобразования сохраняют углы и ориентацию, а несобственное мёбиусово преобразование является композицией отражения относительно действительной оси с последующим собственным мёбиусовым преобразованием. \square

Упражнение 3.26. Напишите какое-нибудь собственное мёбиусово преобразование, переводящее единичный круг $|z| \leq 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

§4. Многомерие

4.1. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над любым полем \mathbb{k} . Будем говорить, что вектор $v \in V$ *линейно выражается* через векторы w_1, w_2, \dots, w_m , если $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \mathbb{k}$. Набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V , если каждый вектор $v \in V$ линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства V , если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i . Коэффициенты x_i единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

называются *координатами* вектора v в базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Например, в координатном векторном пространстве \mathbb{k}^n из [прим. 1.2](#) на стр. 9 n векторов

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4-1)$$

с единицей на i -том месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор $v \in \mathbb{k}^n$ линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (4-2)$$

Базис (4-1) называется *стандартным* базисом координатного пространства \mathbb{k}^n . Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы в V состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Таким образом, $\dim \mathbb{k}^n = n$.

4.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \quad (4-3)$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент $\lambda_i \neq 0$, то векторы v_1, v_2, \dots, v_m называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если $\lambda_m \neq 0$ в линейной зависимости (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. В частности, любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим: $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$ для произвольного $v \in V$.

ЛЕММА 4.1

Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_\nu\}$ является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает другое выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i . Наоборот, любые два различных разложения $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ влекут линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$. \square

ЛЕММА 4.2 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если векторы w_1, w_2, \dots, w_m порождают пространство V , а $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ линейно независимы, то $m \geq k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_m,$$

полученный заменой первых k из них на векторы u_i , тоже порождает V .

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Так как векторы u_i линейно независимы, $u_1 \neq 0$ и среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Поскольку вектор w_1 линейно выражается через u_1 и w_2, \dots, w_m :

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m,$$

векторы $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ порождают V . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i, w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$ порождают V . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m.$$

В силу линейной независимости векторов u_ν вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы u_1, u_2, \dots, u_i . Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов w_j . Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m$. Тем самым, эти векторы линейно порождают V , что воспроизводит индуктивное предположение. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.1 (ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ)

Все базисы любого конечномерного векторного пространства V состоят из одинакового количества векторов, и каждый порождающий V набор векторов содержит в себе некоторый базис, а каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если набор векторов порождает V , то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису. Если задан линейно независимый набор векторов и в пространстве V есть вектор, который линейно не выражается через этот набор, то, добавляя такой вектор к набору, мы получим линейно независимый набор векторов на единицу большей длины. По лем. 4.2 длины линейно независимых наборов в конечномерном векторном пространстве ограничены сверху. Поэтому после конечного числа таких добавлений мы получим порождающий линейно независимый набор, т. е. базис. \square

Следствие 4.2

В n -мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов являются базисами.

Доказательство. По лем. 4.2 при замене любого базиса любыми n линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По сл. 4.1 любой порождающий набор из n векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из n векторов, он совпадает с исходным набором. \square

Предложение 4.1

Всякое n -мерное векторное пространство V над полем \mathbb{k} изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . Линейные изоморфизмы $\mathbb{k}^n \simeq V$ взаимно однозначно соответствуют базисам в V .

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм $F : V \simeq \mathbb{k}^n$, то векторы¹ $v_i = F(e_i)$ образуют базис пространства V , и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств $F(e_i) = G(e_i)$ для всех i вытекает, что и для любого вектора $v = \sum x_i e_i \in V$

$$F(v) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(v).$$

Наоборот, для любого базиса v_1, v_2, \dots, v_n пространства V отображение

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow V, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

линейно, биективно и переводит e_i в v_i для всех i . \square

Пример 4.1 (пространство функций)

Множество \mathbb{k}^X всех функций $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ на произвольном множестве X со значениями в произвольном поле \mathbb{k} образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : x &\mapsto f_1(x) + f_2(x) \\ \lambda f : x &\mapsto \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

Для n -элементного множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ пространство функций \mathbb{k}^X изоморфно отображается на координатное пространство \mathbb{k}^n сопоставлением функции f набора её значений $(f(1), f(2), \dots, f(n))$. Этому изоморфизму отвечает базис из δ -функций $\delta_i : X \rightarrow \mathbb{k}$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

4.2. Линейные отображения $F : U \rightarrow W$ между двумя векторными пространствами U и W над полем \mathbb{k} также образуют векторное пространство, в котором

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v).$$

Оно обозначается $\text{Hom}(U, W)$ или $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$, когда надо подчеркнуть, о каком поле речь.

¹Здесь и далее $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{k}^n$ обозначает стандартный базис в \mathbb{k}^n из формулы форм. (4-1) на стр. 55.

4.2.1. Матричные обозначения. Если зафиксировать базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W, \quad (4-4)$$

и для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ разложить $F(u_j)$ по базису w_1, w_2, \dots, w_m

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij}, \quad (4-5)$$

то коэффициенты (f_{ij}) этих разложений, организованные в прямоугольную таблицу по тем же правилам¹, как и в п° 2.4 на стр. 28

$$(F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}. \quad (4-6)$$

называются *матрицей оператора F в базисах (4-4)*. Таблица (4-6) сокращённо обозначается² F_{wu} или (f_{ij}). Она полностью описывает действие линейного отображения F на любой вектор $v = \sum u_j x_j \in U$, поскольку

$$F(v) = F\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij} x_j. \quad (4-7)$$

Если обозначить через

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad F(u) = (F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)), \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

строки из векторов, а через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

столбцы координат векторов v и $F(v)$ в базисах u и w соответственно, то связь между ними можно описать при помощи матричного умножения равенствами

$$v = ux, \quad F(v) = wy, \quad F(u) = wF_{wu},$$

и вычисление (4-7) сократится до $F(v) = F(ux) = F(u)x = wF_{wu}x$, откуда $y = F_{wu}x$.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении их на числа матрицы этих отображений поэлементно складываются и умножаются на числа.

¹Напомним, что координаты вектора $F(u_j)$ записываются в j -тый столбец.

²Индексы w и u в обозначении F_{wu} указывают на зависимость этой матрицы от выбранных базисов. Для элемента, стоящего в пересечении i -той строки и j -того столбца матрицы F_{wu} , мы всегда используем обозначение f_{ij} , в котором для экономии места уже нет указаний на базисы, в которых написана матрица.

Предложение 4.2

При любом выборе базисов $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ отображение

$$\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}), \quad F \mapsto F_{wu}, \quad (4-8)$$

является линейным изоморфизмом векторного пространства $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$ линейных отображений $F : U \rightarrow W$ с векторным пространством $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^{mn}$ матриц размера $m \times n$. В частности, $\dim \text{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$.

Доказательство. Вычисление (4-7) и упр. 4.1 показывают, что отображение (4-8) линейно и инъективно. Поскольку любая матрица (f_{ij}) задаёт по формуле (4-7) линейное отображение $F : U \rightarrow W$, отображение (4-8) сюръективно. \square

4.2.2. Ядро и образ. С каждым линейным отображением $F : V \rightarrow W$ связаны векторные подпространства

$$\text{im } F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\} \subset W \quad (4-9)$$

$$\ker F \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\} \subset V. \quad (4-10)$$

соответственно называемые *образом* и *ядром* линейного отображения F .

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Убедитесь, что оба множества $\ker F$ и $\text{im } F$ действительно являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства $F(v_1) = F(v_2)$ и $F(v_1 - v_2) = 0$ для линейного отображения F эквивалентны, два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \text{im } F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. Иными словами,

$$F^{-1}(F(v)) = v + \ker F,$$

т. е. полный прообраз любого вектора $w \in \text{im } F$ является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$ на произвольный вектор $v \in F^{-1}(w)$. В частности, мы получаем

Предложение 4.3

Линейное отображение F инъективно тогда и только тогда, когда $\ker F = 0$. \square

Предложение 4.4

Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \rightarrow W$

$$\dim \ker F + \dim \text{im } F = \dim V. \quad (4-11)$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in \ker F$, дополним его векторами e_1, e_2, \dots, e_m до базиса в V и покажем, что векторы $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$ образуют базис в $\text{im } F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означает, что $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, т. е. является линейной комбинацией векторов u_i , что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. \square

Следствие 4.3

Следующие свойства линейного отображения $F : V \rightarrow V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 4.4, а их одновременное выполнение равносильно (1) по предл. 4.3. \square

4.3. Подпространства. Пересечение любого множества подпространств в произвольном векторном пространстве V также является подпространством в V .

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается $\operatorname{span}(M)$. Это наименьшее по включению векторное подпространство в V , содержащее M . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M . В самом деле, все такие линейные комбинации, очевидно, образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих M .

Пример 4.2 (гиперплоскости)

Линейная оболочка $H = \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ произвольных $(n-1)$ линейно независимых векторов в n -мерном векторном пространстве V является $(n-1)$ -мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в V . Если дополнить векторы v_i некоторым вектором v_n до базиса в V и обозначить через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ координаты относительно этого базиса, гиперплоскость H можно описать как ГМТ x удовлетворяющих линейному уравнению $x_n = 0$. Наоборот, ядро любого ненулевого линейного отображения $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}$ представляет собою гиперплоскость, обозначаемую

$$\operatorname{Ann} \xi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}.$$

В самом деле, если $\xi \neq 0$, то $\dim \operatorname{im} \xi = 1$, а значит, $\dim \ker \xi = (n-1)$ по предл. 4.4. Таким образом, гиперплоскости в V это в точности множества решений линейных однородных уравнений $\xi(x) = 0$ для ненулевых линейных отображений $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Покажите, что никакое векторное пространство над бесконечным полем не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

4.3.1. Сумма подпространств. Объединение векторных подпространств обычно не является векторным пространством. Например, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости \mathbb{K}^2 , но сумма лежащих в них векторов может не лежать в их объединении, например: $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством, если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается

$$\sum_{\nu} U_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span} \bigcup_{\nu} U_{\nu}.$$

Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \text{ и т. д.}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ называются *транскверсальными*, если $U_1 \cap U_2 = 0$. Сумма транскверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Транскверсальные подпространства U_1 и U_2 с $U_1 \oplus U_2 = V$, называются *дополнительными*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ транскверсальны тогда и только тогда, когда каждый вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет *единственное* представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$.

Доказательство. Равенство $u'_1 + u'_2 = u''_1 + u''_2$, где $u'_i, u''_i \in U_i$, влечёт равенство

$$u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2,$$

левая часть которого лежит в U_1 , а правая — в U_2 . Поэтому $u'_1 - u''_1 = u''_2 - u'_2 \in U_1 \cap U_2$. Если $U_1 \cap U_2 = 0$, то $u'_1 = u''_1$ и $u'_2 = u''_2$. Если же пересечение $U_1 \cap U_2$ содержит ненулевой вектор u , то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет два различных разложения $0 = 0 + 0 = u + (-u)$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2 (ПРЯМАЯ СУММА НАБОРА ПОДПРОСТРАНСТВ)

Сумма конечного набора подпространств $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ с $u_i \in U_i$. Иначе можно сказать, что сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ является прямой тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов u_1, u_2, \dots, u_m , где $u_i \in U_i$, линейно независим.

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств U_i была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое подпространство U_i было транскверсально сумме всех остальных подпространств.

Например, если векторы e_1, e_2, \dots, e_n образуют базис пространства V , то V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами e_i .

4.3.2. Размерность суммы и пересечения. Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство U в конечномерном пространстве V тоже конечномерно, и $\dim U \leq \dim V$. Разность $\text{codim}_V U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6

Для любых конечномерных подпространств U_1, U_2 в произвольном¹ векторном пространстве V выполняется равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

¹Не обязательно конечномерном.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис u_1, u_2, \dots, u_k в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами v_1, v_2, \dots, v_r и w_1, w_2, \dots, w_s до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i , так и векторы w_j . Переносим $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_r$ в одну часть, а w_1, w_2, \dots, w_s — в другую, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2 , означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. \square

Следствие 4.4

Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V).$$

В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.6](#) и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$. \square

Следствие 4.5

Трансверсальные векторные подпространства U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V дополнительны тогда и только тогда, когда $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Доказательство. При $U_1 \cap U_2 = 0$, равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. \square

4.4. Двойственность. Линейные отображения $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ называются *линейными функционалами*¹ на пространстве V . Они образуют векторное пространство, традиционно обозначаемое

$$V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$$

и называемое *двойственным* или *сопряжённым* к V .

Пример 4.3 (функционалы вычисления)

Пусть X — любое множество, и $V = \mathbb{k}^X$ — пространство всех функций $X \rightarrow \mathbb{k}$, как в [прим. 4.1](#) на стр. 57. С каждой точкой $x \in X$ связан *функционал вычисления*²

$$\text{ev}_x : \mathbb{k}^X \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f(x),$$

переводящий функцию $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ в её значение $f(x) \in \mathbb{k}$ в точке x .

Упражнение 4.7. Убедитесь, что отображения $\text{ev}_x : \mathbb{k}^X \rightarrow \mathbb{k}$ линейны и образуют занумерованный точками $x \in X$ базис пространства V^* , двойственного к пространству $V = \mathbb{k}^X$.

¹А также *линейными формами* или *ковекторами*.

²Обозначение ev происходит от «evaluation».

4.4.1. Двойственный базис. С каждым базисом e_1, e_2, \dots, e_n пространства V связан набор координатных функционалов $e_i^* \in V^*$. Функционал e_i^* сопоставляет вектору $v = \sum x_i e_i \in V$ значение i -той координаты этого вектора:

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_i.$$

В частности, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \quad (4-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$ линейны.

Координатные функционалы $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ образуют базис пространства V^* , т. к. каждая линейная форма $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ единственным способом линейно выражается через них — а именно, с коэффициентами, равными значениям $\varphi(e_i)$ этой формы на базисных векторах пространства V . В самом деле, поскольку два линейных отображения $\varphi : V \rightarrow \mathbb{k}$ и $\psi = \sum x_i e_i^* : V \rightarrow \mathbb{k}$ равны тогда и только тогда, когда равны их значения на базисных векторах, и поскольку $\psi(e_i) = x_i$, равенство $\varphi = \sum x_i e_i^*$ равносильно равенствам $\varphi(e_i) = x_i$ для всех i . В частности, $\dim V = \dim V^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3

Базисы $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$ называются *двойственными* базисами двойственных пространств V и V^* .

4.4.2. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{}$.** Конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления*

$$ev_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}, \quad \varphi \mapsto \varphi(v).$$

Поскольку число $\varphi(v) \in \mathbb{k}$ линейно зависит как от v , так и от φ , сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт *каноническое*¹ линейное отображение

$$ev : V \rightarrow V^{**}, \quad v \mapsto ev_v, \quad (4-13)$$

которое переводит любой базис e_1, e_2, \dots, e_n пространства V в базис пространства V^{**} , двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^* . Такое отождествление $V \simeq V^{**}$ позволяет рассматривать любую линейную форму $\Phi : V^* \rightarrow \mathbb{k}$ как функционал вычисления значений на некотором векторе $v \in V$, который однозначно определяется по форме Φ , а любой базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства V^* — как набор координатных функционалов e_i^* для однозначно задаваемого формами φ_v базиса² e_1, e_2, \dots, e_n в пространстве V . Чтобы подчеркнуть симметрию между векторами и ко векторами, мы будем называть число

$$\langle \varphi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = ev_v(\varphi) \in \mathbb{k} \quad (4-14)$$

свёрткой ко вектора φ с вектором v .

¹Т. е. не прибегающее к фиксации каких-либо дополнительных данных (базиса, скалярного произведения и т. п.)

²А именно, для двойственного к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ базиса в $V^{**} = V$

4.4.3. Аннуляторы. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, $\xi \in M$, на вектор $x \in V$. Множество всех решений этой системы обозначается

$$\text{Ann}(M) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall \xi \in M\} \subset V$$

и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ по всем $\xi \in M$, аннулятор произвольного множества ковекторов $M \subset V^*$ всегда является векторным подпространством в V .

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\text{Ann}(N) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in N\} \subset V^*.$$

Алгебраически, $\text{Ann}(N)$ это множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, решения которых содержат все векторы из N . Геометрически — это множество всех проходящих через N гиперплоскостей в V . Вместе с тем, как и выше, $\text{Ann}(N) \subset V^*$ есть множество решений системы однородных уравнений $e_{v_i}(y) = 0$, $v_i \in N$, на ковектор $y \in V^*$ или, что то же самое, пересечение гиперплоскостей $\text{Ann}(v) \subset V^*$ по всем $v \in N$. В частности, $\text{Ann}(N)$ является векторным подпространством в V^* .

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Убедитесь, что аннулятор любого множества совпадает с аннулятором его линейной оболочки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7

$\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ и дополним его векторами w_1, w_2, \dots, w_m до базиса в V (таким образом, $\dim V = k + m$) и обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in V^*$$

двойственный базис. Тогда $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \text{Ann } U$, поскольку для любого $v = \sum x_i u_i \in U$

$$w_v^*(v) = w_v^*(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k) = \sum x_i \cdot w_v^*(u_i) = 0.$$

Так как любой ковектор $\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \text{Ann } U$ имеет $y_i = \varphi(u_i) = 0$, базисные ковекторы $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$ линейно порождают $\text{Ann } U$, а значит, образуют там базис. Тем самым, $\dim \text{Ann } U = m = \dim V - \dim U$. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.6

$\text{Ann Ann } U = U$ для любого подпространства $U \subset V$.

Доказательство. $U \subset \text{Ann Ann } U$ и по [предл. 4.7](#) $\dim \text{Ann Ann } U = \dim U$. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Для любого подпространства $U \subset V^*$ также выполняются равенства

$$\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V \quad \text{и} \quad \text{Ann Ann } U = U.$$

Они получаются, если в [предл. 4.7](#) и [сл. 4.6](#) взять в них V двойственное пространство V^* и воспользоваться каноническим отождествлением V^{**} с V .

Замечание 4.2. На языке линейных уравнений предл. 4.7 означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m . А сл. 4.6 утверждает, что любая линейная форма, зануляющаяся на множестве решений произвольно заданной системы линейных однородных уравнений линейно выражается через уравнения этой системы.

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Покажите, что $\text{Ann Ann } N = \text{span} N$ для любого подмножества $N \subset V$.

ТЕОРЕМА 4.1

Соответствие $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* . Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \text{Ann } U \supset \text{Ann } W,$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V . Равенство $\text{Ann Ann } U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto \text{Ann } U} \\ \xleftarrow{\text{Ann } W \mapsto W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W , соответственно, подпространства $\text{Ann } W$ и $\text{Ann } U$ и воспользоваться равенствами $\text{Ann Ann } W = W$ и $\text{Ann Ann } U = U$, получим обратную импликацию $\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} = \text{Ann} \left(\sum_{\nu} U_{\nu} \right) \quad (4-15)$$

очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_{ν} , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности. Если взять в (4-15) в качестве подпространств U_{ν} пространства $\text{Ann } U_{\nu}$, получаем равенство $\bigcap_{\nu} U_{\nu} = \text{Ann} \left(\sum_{\nu} \text{Ann } U_{\nu} \right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, получаем равенство $\text{Ann} \left(\bigcap_{\nu} W_{\nu} \right) = \sum_{\nu} \text{Ann } W_{\nu}$. \square

4.5. Аффинные пространства. Пусть множество A является аффинным пространством¹ над векторным пространством V . Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$P(p, U) = p + U = \{ \tau_u(p) \mid u \in U \}$$

называется проходящим через точку p аффинным подпространством в A с направляющим векторным подпространством U . Размерность аффинного пространства $P(p, U)$ по определению полагается равной размерности $\dim U$ его направляющего векторного подпространства.

¹См. н° 1.4 на стр. 14.

Пример 4.4 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает \mathbb{K} . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегает \mathbb{K} . К таким аффинным подпространствам в полной мере применимо всё сказанное в §1.

Предложение 4.8

Следующие условия на аффинные подпространства $\Pi(p, U)$ и $\Pi(q, U)$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ равносильны друг другу:

$$\begin{aligned} 1) \overline{pq} \in U & \quad 2) \Pi(p, U) = \Pi(q, U) \\ 3) \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U) \neq \emptyset & \quad 4) p \in \Pi(q, U) \quad 5) q \in \Pi(p, U). \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Если $\overline{pq} \in U$, то любая точка вида $q + u$ с $u \in U$ может быть записана в виде $p + w$ с $w = \overline{pq} + u \in U$, и обратно, любая точка вида $p + w$ с $w \in U$ может быть записана в виде $p + u$ с $u = w - \overline{pq} \in U$. Тем самым, $\Pi(p, U) = \Pi(q, U)$.

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка $r = p + u' = q + u'' \in \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U)$, где $u' = \overline{pr}$ и $u'' = \overline{qr}$ лежат в U . Тогда и $\overline{pq} = \overline{pr} + \overline{rq} = u' - u'' \in U$. \square

Предложение 4.9

Следующие условия на $k + 1$ точек p_0, p_1, \dots, p_k любого аффинного пространства A над произвольным векторным пространством V равносильны друг другу:

- 1) точки p_0, p_1, \dots, p_k не содержатся ни в каком $(k - 1)$ -мерном аффинном подпространстве
- 2) векторы $\overline{p_0 p_1}, \overline{p_0 p_2}, \dots, \overline{p_0 p_k}$ линейно независимы
- 3) через точки p_0, p_1, \dots, p_k проходит единственное k -мерное аффинное подпространство

Доказательство. Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость k векторов из (2) равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k - 1$, что в свою очередь означает, что в V найдётся $(k - 1)$ -мерное векторное подпространство U , содержащее все векторы $\overline{p_0 p_i}$. По предл. 4.8 последнее означает, что $(k - 1)$ -мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i .

Покажем, что (2) равносильно (3). По предл. 4.8 прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i означает, что все векторы $\overline{p_0 p_i}$ содержатся в U . А линейная независимость этих векторов означает, что они составляют базис в любом содержащем их k -мерном подпространстве $U \subset V$, а значит, любое такое подпространство представляет собою их линейную оболочку. \square

Предложение 4.10

Аффинные подпространства $p + U$ и $q + W$ пересекаются, если и только если $\overline{pq} \in U + W$, и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством $U \cap W$.

Доказательство. Равенство $\overline{pq} = u + w$ равносильно равенству $p + u = q - w$, означающему, что точка $r = p + u = q - w \in (p + U) \cap (q + W)$. Любая другая лежащая в этом пересечении точка $r' = p + u' = q - w'$ отличается от предыдущей на вектор $\overline{rr'} = u' - u = w - w' \in U \cap W$. Наоборот, для любого вектора $v \in U \cap W$ точка $r + v$, очевидно, лежит в $(p + U) \cap (q + W)$. \square

Предложение 4.11

Если векторное подпространство $U \subset V$ является множеством решений системы однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает некоторое подмножество $M \subset V^*$, то аффинное подпространство $\Pi(p, U) = p + U \subset \mathbb{A}(V)$ является множеством решений системы неоднородных линейных уравнений вида $\xi(x) = \xi(p)$, где ξ пробегает то же самое подмножество $M \subset V^*$. Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений на переменную точку $x \in \mathbb{A}(V)$ вида $\xi(x) = c_\xi$, где ξ пробегает какое-нибудь подмножество $M \subset V^*$, а $c_\xi \in \mathbb{k}$ — некоторые константы, либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида $p + U$, где $U = \text{Ann } M \subset V$, а p — любое фиксированное решение системы¹.

Доказательство. В силу линейности функций $\xi : V \rightarrow \mathbb{k}$ равенства $\xi(x) = \xi(p)$ и $\xi(\overline{px}) = 0$ равносильны друг другу. \square

4.6. Фактор пространства. Если зафиксировать векторное подпространство $U \subset V$, то проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ аффинное подпространство $v + U$ можно алгебраически трактовать как класс эквивалентности вектора v по модулю сдвигов на векторы из подпространства U . В курсе алгебры такой класс обычно обозначается через

$$[v]_U = v \pmod{U} = v + U = \{w \in V \mid w - v \in U\}$$

и называется *смежным классом* вектора v по модулю U . На множестве всех смежных классов по модулю U имеется естественная структура векторного пространства со сложением и умножением на числа по формулам $[v]_U + [w]_U \stackrel{\text{def}}{=} [v + w]$ и $\lambda[v]_U \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda v]$.

Упражнение 4.11. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем \mathbb{k} .

Пространство смежных классов подпространства U обозначается V/U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U . Отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его класс $[v]$, линейно и сюръективно.

На геометрическом языке, точками аффинного пространства $\mathbb{A}(V/U)$ являются всевозможные аффинные подпространства в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Пример 4.5 (Фактор по ядру)

Каждое линейное отображение $F : V \rightarrow W$ задаёт изоморфизм $V/\ker F \simeq \text{im } F$, сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \text{im } F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F.$$

Пример 4.6 (линейная оболочка как фактор)

Линейная оболочка $W = \text{span}(w_1, w_2, \dots, w_n) \subset V$ любого набора из n векторов w_i произвольного пространства V является образом линейного оператора $F : \mathbb{k}^n \rightarrow V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{k}^n$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого оператора $U = \ker F \subset \mathbb{k}^n$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между векторами w_i в W в том смысле,

¹Т.е. такая точка p , что $\xi(p) = c_\xi$ для всех $\xi \in M$.

что вектор $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \mathbb{k}^n$ лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ в W . Изоморфизм $W = \text{im } F \simeq \mathbb{k}^n / U$ из предыдущего [прим. 4.5](#) означает в этом случае, что векторы $w \in W$ суть классы вычетов линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ по модулю тех комбинаций, которые являются линейными зависимостями между векторами w_i .

Предложение 4.12

Если векторы v_1, v_2, \dots, v_k дополняют некоторый базис u_1, u_2, \dots, u_m подпространства U до базиса во всём пространстве $V \supset U$, то их классы $[v_1], [v_2], \dots, [v_k]$ образуют базис фактор пространства V/U . В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это частный случай [предл. 4.4](#) на стр. 59 (и её доказательства), относящийся к отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$. \square

Предложение 4.13

Для любого подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы

$$(V/U)^* \simeq \text{Ann } U \quad \text{и} \quad U^* \simeq V^* / \text{Ann } U.$$

Доказательство. Если форма $\varphi \in \text{Ann } U$, то для любых $u \in U$ и $v \in V$ выполняются равенства $\varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v)$. Поэтому правило $\tilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$ корректно задаёт линейную форму $\tilde{\varphi}$ на факторе V/U . Отображение $\text{Ann } U \rightarrow (V/U)^*$, $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$, линейно и имеет нулевое ядро. Так как размерности пространств одинаковы, это изоморфизм. Для доказательства второго изоморфизма рассмотрим оператор $V^* \rightarrow U^*$, переводящий линейную форму на V в её ограничение на $U \subset V$. Поскольку ядро этого оператора это $\text{Ann } U$, его образ изоморфен $V^* / \text{Ann } U \subset U^*$. Так как размерности обоих пространств одинаковы, это вложение является изоморфизмом. \square

Пример 4.7 (ранг матрицы)

Столбцы a_1, a_2, \dots, a_n произвольной матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ являются векторами координатного пространства \mathbb{k}^m . Размерность порождённого ими подпространства $U \subset \mathbb{k}^m$ называется *рангом* матрицы A и обозначается $\text{rk } A$. Любой максимальный по включению линейно независимый набор столбцов является базисом в пространстве U и состоит ровно из $\text{rk } A$ столбцов.

В i -той строке матрицы A стоят вычисленные на векторах a_1, a_2, \dots, a_n значения ковекторов e_i^* из двойственного к стандартному базису e_1, e_2, \dots, e_m в \mathbb{k}^m базиса $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ двойственного пространства \mathbb{k}^{m*} . Согласно [предл. 4.13](#), ограничения функционалов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^* . Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \text{rk } A$ векторов. Но линейная независимость функционалов $e_i^*|_U$, равно как и возможность линейно выразить один из них через другие, равносильна линейной независимости значений этих функционалов на порождающих пространство U векторах a_1, a_2, \dots, a_n и, соответственно, возможности линейно выразить строку значений одного из функционалов через строки значений других. Иными словами, ограничения ковекторов $e_{i_1}^*, e_{i_2}^*, \dots, e_{i_{\text{rk } A}}^*$ на подпространство U тогда и только тогда составляют базис в U^* , когда строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{\text{rk } A}$ составляют базис в линейной оболочке строк матрицы A в пространстве \mathbb{k}^n . Мы заключаем, что строки любой $m \times n$ матрицы A порождают в координатном пространстве \mathbb{k}^n подпространство той же размерности, которую имеет подпространство в \mathbb{k}^m , порождённое столбцами матрицы A . Этот факт известен как *теорема о ранге матрицы*.

4.7. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \rightarrow W$ канонически связано двойственное отображение

$$F^* : W^* \rightarrow U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \quad (4-16)$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлению и переводящее линейную форму $\xi : W \rightarrow \mathbb{k}$ в линейную форму $F^*\xi \stackrel{\text{def}}{=} \xi \circ F : U \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) = \xi(Fv)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.12. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

Линейные отображения F и F^* играют по отношению к другу абсолютно симметричные роли и однозначно определяют друг друга при помощи соотношения

$$\forall v \in W, \forall \xi \in U^* \quad \langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle. \quad (4-17)$$

Из этого соотношения немедленно вытекают равенства

$$F^{**} = F, \quad \ker F = \text{Ann im}(F^*), \quad \ker(F^*) = \text{Ann im } F.$$

Если во втором и третьем равенстве перейти к аннуляторам обеих частей, получатся двойственные равенства

$$\text{im}(F^*) = \text{Ann ker } F \quad \text{и} \quad \text{im } F = \text{Ann ker}(F^*). \quad (4-18)$$

Сравнивая эти равенства с изоморфизмами из [предл. 4.13](#), мы заключаем, что векторные пространства $\text{im } F \subset U$ и $\text{im}(F^*) \subset W^*$ канонически двойственны друг другу, и свёртка вектора $Fv \in \text{im } F$ с ковектором $F^*\xi \in \text{im } F^*$ задаётся формулой

$$\langle F^*\xi, Fv \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle, \quad (4-19)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.13. Убедитесь, что эта формула корректна, т. е. не зависит от выбора ковектора $\psi \in W^*$ и вектора $v \in U$, использованных для записи элементов из $\text{im } F^*$ и $\text{im } F$.

Точно также, подпространство $\ker F \subset U$ двойственно фактор пространству $U^* / \text{im}(F^*)$, а подпространство $\ker(F^*) \subset W^*$ двойственно фактор пространству $W / \text{im } F$, и спаривание между векторами и ковекторами задаются формулами

$$\langle \psi + \ker F^*, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, v \rangle \quad \text{и} \quad \langle \xi, w + F(U) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, w \rangle,$$

где $\psi + \ker F^* \in U^* / \text{im}(F^*)$, $v \in \ker F$, $\xi \in \ker^*$, $w + F(U) \in W / \text{im } F$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.14. Проверьте корректность обеих формул, т. е. независимость правых частей от выбора представителей $\psi \in U^*$ и $w \in W$ в классах $\psi + \ker F^*$ и $w + F(U)$.

По этой причине фактор по образу линейного отображения F называется *коядром* отображения F и обозначается $\text{coker}(F) \stackrel{\text{def}}{=} W / \text{im } F$. Тем самым, имеются равенства

$$(\ker F)^* = \text{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\text{coker } F)^* = \ker(F^*).$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.15. Убедитесь, что матрица (f_{ij}) отображения F в произвольно выбранных базисах пространств U, W и матрица (f_{ij}^*) двойственного отображения F^* в двойственных к выбранным базисам пространств W^*, U^* транспонированы друг другу, т. е. $f_{ij}^* = f_{ji}$.

ПРИМЕР 4.8 (ЕЩЁ РАЗ О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Каждая матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k})$ является матрицей линейного отображения

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\text{im } F$ отображения F . Согласно [упр. 4.15](#), двойственное отображение $F^* : \mathbb{k}^{m^*} \rightarrow \mathbb{k}^{n^*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей, столбцы которой суть строки матрицы A . Таким образом, линейная оболочка строк матрицы A совпадает с образом $\text{im } F^*$ отображения F^* . Поскольку

$$\dim \text{im } F^* = m - \dim \ker F^* = m - \dim \text{Ann im } F = \dim \text{im } F,$$

мы ещё раз видим, что размерности линейных оболочек строк и столбцов у любой прямоугольной матрицы одинаковы (ср. с [прим. 4.7](#) на стр. 68).

§5. Объёмы и определители

5.1. Объём n -мерного ориентированного параллелепипеда в n -мерном векторном пространстве V (или *форма объёма* на V) это ненулевая функция $\omega : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ со следующими двумя свойствами¹:

- 1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega(\dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots) = \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)$
- 2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda \omega(\dots, v_i, \dots).$$

На геометрическом языке эти свойства означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, \dots, v_n , как на [рис. 5◊1](#), умножается на λ при умножении любого из рёбер на λ , и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n - 1)$ -мерных граней друг относительно друга в направлении одного из рёбер, параллельных этим граням (двумерная параллельная проекция происходящего на плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, вдоль дополнительного $(n - 2)$ -мерного подпространства, порождённого всеми остальными рёбрами, изображена на [рис. 5◊2](#)).

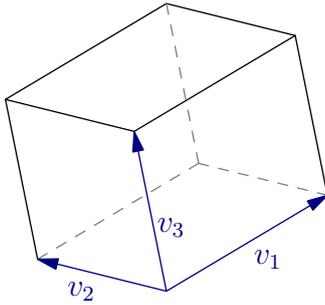


Рис. 5◊1. Параллелепипед.

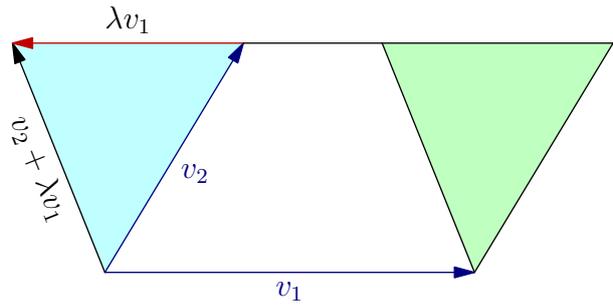


Рис. 5◊2. Параллельный перекосяк.

Дословно также, как [лем. 1.3](#) на [стр. 13](#) доказывается

Лемма 5.1

На n -мерном векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{K} всякая форма n -мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

- 1) если векторы v_1, v_2, \dots, v_n линейно зависимы, то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$
- 2) форма ω кососимметрична, т. е. обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают
- 3) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega(\dots, \lambda v + \mu w, \dots) = \lambda \omega(\dots, v, \dots) + \mu \omega(\dots, w, \dots). \quad (5-1)$$

¹Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

4) форма ω знакопеременна¹: $\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)$.

Доказательство. Если векторы v_1, v_2, \dots, v_n линейно зависимы, скажем,

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0$. Это доказывает первое свойство. Второе свойство является частным случаем первого. Свойство (3) очевидно выполняется, когда оба набора аргументов в правой части (5-1) линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части равенства (5-1) зануляются. Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства V . Тогда $w = \rho v + u$, где u является линейной комбинацией остальных $(n - 1)$ аргументов, и левая часть (5-1) равна $\omega(\dots, (\lambda + \mu\rho) \cdot v + \mu u, \dots) = (\lambda + \mu\rho) \cdot \omega(\dots, v, \dots)$, а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu\omega(\dots, \rho v + u, \dots) = \mu\rho \cdot \omega(\dots, v, \dots)$. Тем самым, правая часть совпадает с левой. Знакопеременность следует из кососимметричности и аддитивности по каждому аргументу: $0 = \omega(\dots, (u + w), \dots, (u + w), \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$. \square

5.1.1. Описание кососимметричных n -линейных форм. Функция от k векторов

$$V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k},$$

линейная по каждому из векторов при фиксированных остальных, называется k -линейной формой на векторном пространстве V .

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь, что k -линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы.

Покажем, что пространство n -линейных кососимметричных форм на n -мерном векторном пространстве V одномерно. Пусть ω является такой формой. Зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис e_1, e_2, \dots, e_n и выразим значение $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ на произвольном наборе векторов через $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Пусть $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$, где $C = (c_{ij})$ — матрица размера $n \times n$, в j -том столбце которой стоят координаты вектора v_j в базисе e , т. е.

$$v_j = \sum_{i=1}^n e_i \cdot c_{ij}.$$

Тогда в силу линейности формы ω по каждому из аргументов

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega\left(\sum_{i_1} c_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} c_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \dots \cdot c_{i_n n} \cdot \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}). \end{aligned} \quad (5-2)$$

Так как при совпадении двух аргументов ω обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму дают только такие (i_1, i_2, \dots, i_n) , где каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ встречается ровно один раз, т. е. всевозможные перестановки набора $(1, 2, \dots, n)$. Всякую такую перестановку

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

¹Т. е. умножается на -1 при перестановке любых двух аргументов.

можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g: \{1, 2, \dots, n\} \simeq \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i.$$

Таким образом, множество перестановок есть не что иное как группа всех биективных отображений из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя. Эта группа обозначается S_n и называется n -той симметрической группой. Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется транспозицией i -того и j -того элементов.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Поскольку при транспозиции аргументов форма ω меняет знак, для любой перестановки g

$$\omega(e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_n}) = \pm \omega(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Перестановка g называется *чётной*, если она представима в виде композиции чётного числа транспозиций, и *нечётной*, если её можно разложить в композицию нечётного числа транспозиций. Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g , не зависит от способа разложения. Мы докажем это в н° 5.3 на стр. 76 ниже, а сейчас закончим вычисление (5-2). Определим знак $\text{sgn}(g)$ перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ равенством

$$\text{sgn}(g) = \begin{cases} +1, & \text{если } g \text{ чётна,} \\ -1, & \text{если } g \text{ нечётна.} \end{cases} \quad (5-3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Убедитесь, что $\text{sgn}(gh) = \text{sgn}(g)\text{sgn}(h)$, т. е. отображение $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

Из вычисления (5-2) вытекает, что

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \dots c_{g_n n}. \quad (5-4)$$

Поскольку правая сумма зависит только от матрицы C , но не от формы ω , мы заключаем, что значение произвольной кососимметричной n -линейной формы на произвольном наборе векторов однозначно вычисляется, как только задано значение формы ω на каком-нибудь одном базисе пространства V . В частности, любые две такие формы ω_1, ω_2 пропорциональны, и для всех наборов векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$$\frac{\omega_1(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, e_2, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

где e_1, e_2, \dots, e_n — любой фиксированный базис пространства V . Тем самым, правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса точно так же, как левая не зависит от выбора векторов v_1, v_2, \dots, v_n . Нам остаётся убедиться, что при любом выборе константы $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{k}$ формула (5-4) действительно определяет кососимметричную n -линейную форму на V , т. е. что сумма, стоящая в правой части этой формулы, является кососимметричной функцией от столбцов матрицы C и линейна по каждому столбцу при фиксированных остальных. Это будет сделано в предл. 5.1 ниже.

5.2. Определители. Функция

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \quad (5-5)$$

называется *определителем* квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ размера $n \times n$. Формула (5-5) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице C по n элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Множество клеток, в которых стоят выбранные элементы, является графиком биективного отображения $j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк. Выбранные n элементов перемножаются, и произведению приписывается знак, равный знаку соответствующей перестановки $j \mapsto g_j$. Полученные таким образом $n!$ произведений со знаками складываются. Так, определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \quad (5-6)$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \quad (5-7)$$

$$- c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \quad (5-8)$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции). Из этого описания вытекает, что определитель не меняется при отражении матрицы C относительно *главной диагонали*, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. Такое отражение называется *транспонированием*, и матрица $C^t = (c_{ij}^t)$ с $c_{ij}^t \stackrel{\text{def}}{=} c_{ji}$ называется *транспонированной* к матрице $C = (c_{ij})$. При транспонировании строки и столбцы меняются ролями, и равенство

$$\det C^t = \det C \quad (5-9)$$

выполняется в силу того, что $\det C^t$ является суммой произведений тех же самых n -ок элементов, задающих всевозможные биекции $j \mapsto g_j$, только каждое произведение берётся теперь со знаком $\text{sgn}(g^{-1})$ обратной к g биекции из множества строк в множество столбцов.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность.

Предложение 5.1

Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое очевидно из формулы (5-5): каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, а значит, линейна и вся сумма. Если i -тый столбец матрицы C совпадает с j -тым, то в сумме (5-5) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, поскольку $\text{sgn}(h) = -\text{sgn}(g)$, а $c_{h_1 1} c_{h_2 2} \cdots c_{h_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j i} \cdots c_{g_i j} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_i i} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n}$. \square

Следствие 5.1

Пространство n -линейных кососимметричных форм на n -мерном векторном пространстве одномерно.

Доказательство. Выберем в V базис e_1, e_2, \dots, e_n и для любого набора векторов

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$$

положим $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C$. По предл. 5.1 форма ω кососимметрична и n -линейна. Она ненулевая, поскольку $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. Как мы видели в н° 5.1.1 выше, все прочие n -линейные кососимметричные формы пропорциональны ω . \square

Следствие 5.2

На каждом n -мерном векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{K} существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n -мерного объёма ω . Если векторы e_1, e_2, \dots, e_n образуют базис V , а векторы v_1, v_2, \dots, v_n , линейно выражающихся через базис как $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det C \quad (5-10)$$

для любой формы объёма ω на V .

Доказательство. Из лем. 5.1 на стр. 71 вытекает, что всякая форма объёма n -линейна и кососимметрична. Наоборот, всякая n -линейная кососимметричная форма является формой объёма: свойства (1), (2) со стр. 71 очевидным образом вытекают из линейности и кососимметричности. \square

Следствие 5.3

Определитель $n \times n$ -матрицы является n -линейной кососимметричной функцией от её строк.

Доказательство. Это следует из предл. 5.1 и равенства (5-9). \square

5.2.1. Определитель произведения матриц. Напомню, что произведение матриц задаётся формулами (2-8) и (2-9) на стр. 28.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Пусть векторы u_1, u_2, \dots, u_k линейно выражаются через v_1, v_2, \dots, v_m по формуле $(u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \cdot A$, а векторы v_1, v_2, \dots, v_m линейно выражаются через векторы w_1, w_2, \dots, w_n по формуле $(v_1, v_2, \dots, v_m) = (w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot B$, где A и B — некоторые матрицы с элементами из поля \mathbb{K} размеров $m \times k$ и $n \times m$ соответственно. Убедитесь, что $(u_1, u_2, \dots, u_k) = (w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot BA$, и покажите, что умножение матриц ассоциативно, т. е. $(AB)C = A(BC)$ всякий раз когда хотя бы одна из частей этого равенства определена.

Предложение 5.2

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых квадратных матриц A и B одинакового размера. В частности, $\det(AB) = \det(BA)$.

Доказательство. Рассмотрим столбцы матрицы A как векторы из координатного пространства \mathbb{K}^n и обозначим их через v_1, v_2, \dots, v_n . Если они линейно зависимы, то размерность их линейной оболочки меньше n . Поскольку j -тый столбец матрицы AB является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из j -того столбца матрицы B , все столбцы матрицы AB лежат в линейной оболочке столбцов матрицы A . Тем самым, размерность их линейной оболочки тоже меньше n , и они также линейно зависимы. Стало быть, обе части равенства

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ в этом случае нулевые. Если векторы v_i линейно независимы, то они образуют в \mathbb{K}^n базис. Обозначим через e_1, e_2, \dots, e_n стандартный базис пространства \mathbb{K}^n , а через ω_e и ω_v такие две формы объёма на \mathbb{K}^n , что $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ и $\omega_v(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$. По сл. 5.2 эти две формы пропорциональны друг другу. Так как $\omega_e(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(A)$, для любых векторов $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{K}^n$ выполняется равенство

$$\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(A) \cdot \omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n). \quad (5-11)$$

Для векторов $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot AB$, на которых наши формы объёма принимают значения $\omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(B)$ и $\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(AB)$, формула (5-11) превращается в требуемое равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. \square

5.3. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки. В этом разделе мы дадим другое, заведомо корректное определение знака перестановки и покажем, что получающийся в результате знак совпадает со знаком из форм. (5-3) на стр. 73.

Назовём упорядоченную пару чисел (i, j) , в которой $1 \leq i < j \leq n$, *инверсной парой* перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ пар (i, j) с $1 \leq i < j \leq n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Число $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g . Число $\text{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g .

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

ЛЕММА 5.2

$\text{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\text{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ и транспозиции σ_{ij} .

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (5-12)$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j , стоящих на i -том и j -том местах перестановки g . В этих двух перестановках пара (i, j) , а также $2(j-i-1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. \square

Следствие 5.4

Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\text{sgn}(g) = (-1)^m$. В частности, чётность числа m не зависит от выбора разложения g в композицию транспозиций, а знак перестановки совпадает с тем, что использовался в форм. (5-3) на стр. 73. \square

5.3.1. Правило ниточек. Чётность числа инверсий может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*¹. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 5◊3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни

¹Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак явно заданной длинной перестановки — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Тем не менее, он оказывается полезен во многих вычислениях, с которыми мы столкнёмся далее.

одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными¹. Тогда чётность числа инверсий равна чётности числа точек пересечения нитей.

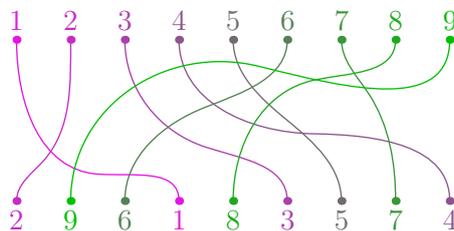


Рис. 5◊3. $\text{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей* перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad \text{и} \quad (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

5.4. Правила Крамера. Если воспринимать столбцы $n \times n$ матрицы C как векторы координатного пространства \mathbb{k}^n и обозначить их $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$, про определитель $\det C$ можно думать как про n -линейную кососимметричную функцию от этих векторов. В этом случае мы пишем $\det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ вместо $\det C$. Непосредственным обобщением лем. 1.2 со стр. 11 является

Предложение 5.3 (первое правило Крамера)

Векторы v_1, v_2, \dots, v_n образуют базис в \mathbb{k}^n , если и только если $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i -тая координата произвольного вектора $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}. \quad (5-13)$$

Доказательство. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ не образуют базиса, то они линейно зависимы, и, скажем, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Тогда $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = 0$ в силу полилинейности и кососимметричности определителя. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ образуют базис, то каждый вектор $w \in \mathbb{k}^n$ обладает единственным разложением вида

$$w = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Применение к обеим частям этого равенства линейного функционала

$$V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

приводит к требуемому равенству

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) = x_i \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

¹Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

Остаётся показать, что в этом случае $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$. Пусть базис v_1, v_2, \dots, v_n и стандартный базис e_1, e_2, \dots, e_n линейно выражаются друг через друга по формулам

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot D \quad \text{и} \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C.$$

Тогда $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot D = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot CD$, и из единственности разложения векторов по базису вытекает, что

$$CD = E \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

это *единичная матрица*, с единицами на главной диагонали и нулями в остальных местах.

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. Убедитесь, что $\det E = 1$ и $AE = A$, $EB = B$ для любых матриц A, B на которые возможно умножить матрицу E .

По [предл. 5.2](#) на стр. 75 $\det C \cdot \det D = \det E = 1$, откуда $\det C = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$. □

ПРИМЕР 5.1 (УРАВНЕНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Пусть n точек $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ аффинного пространства, ассоциированного с n -мерным координатным векторным пространством V , не лежат в одном $(n-2)$ -мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно [предл. 4.9](#) через них проходит единственная гиперплоскость, и точка x лежит в этой гиперплоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overrightarrow{p_n p_1}, \overrightarrow{p_n p_2}, \dots, \overrightarrow{p_n p_{n-1}}$, что в свою очередь равносильно равенству $\det(x - p_n, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = 0$. В силу полилинейности определителя, это уравнение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x , которое можно переписать как

$$\det(x, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = \det(p_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Например, аффинная плоскость $p + \lambda u + \mu v$ в координатном пространстве \mathbb{k}^3 (точка p и векторы u, v фиксированы, а параметры λ, μ пробегает \mathbb{k}) задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$.

5.4.1. Обратная матрица. Квадратная матрица C называется *обратимой*, если существует такая матрица C^{-1} , что $CC^{-1} = C^{-1}C = E$. Матрица C^{-1} называется *обратной* к C и однозначно определяется матрицей C , поскольку для любых двух обратных к C матриц C_1^{-1}, C_2^{-1} выполняются равенства $C_1^{-1} = C_1^{-1} \cdot E = C_1^{-1} \cdot C \cdot C_2^{-1} = E \cdot C_2^{-1} = C_2^{-1}$.

Предложение 5.4

Матрица C обратима, если и только если $\det C \neq 0$, и в этом случае

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^{\vee}, \tag{5-14}$$

где матрица¹ C^{\vee} имеет в i -той строке и j -том столбце число, равное взятому со знаком $(-1)^{i+j}$ определителю $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы, которая получается из матрицы C удалением j -той строки и i -того столбца².

¹ Она называется *присоединённой* к матрице C .

² Обратите внимание, что индексы i и j переставились!

Доказательство. Если матрица C обратима, то $\det C \cdot \det C^{-1} = \det (C \cdot C^{-1}) = \det E = 1$, откуда $\det C \neq 0$. Если $\det C \neq 0$, то по [предл. 5.3](#) столбцы v_1, v_2, \dots, v_n матрицы C образуют базис координатного пространства \mathbb{k}^n . Поскольку

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot E = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C C^{-1} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot C^{-1},$$

в j -том столбце матрицы C^{-1} стоят коэффициенты разложения

$$e_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

стандартного базисного вектора e_j по базису v_1, v_2, \dots, v_n . По правилу Крамера коэффициент x_i , стоящий в i -той строке и j -том столбце матрицы C^{-1} , равен

$$\frac{\det (v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(C)}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i -том столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j -той строке. Делая $i - 1$ транспозиций столбцов и $j - 1$ транспозиций строк, переставляем её в верхний левый угол:

$$\begin{aligned} \det (v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) &= (-1)^{i-1} \det (e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \dots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \dots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \dots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \dots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \dots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \dots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \dots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \dots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ненулевой вклад в определитель этой матрицы дают только перестановки, оставляющие элемент 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n - 1) \times (n - 1)$ -матрицы, получающейся выкидыванием из написанной выше матрицы первой строки и первого столбца, т. е. удалением j -той строки и i -того столбца в матрице C . \square

ПРИМЕР 5.2

Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

УПРАЖНЕНИЕ 5.9. Проверьте прямым перемножением, что в обоих случаях произведение обратной матрицы на исходную равно E .

5.4.2. Присоединённая матрица. Введённая в предл. 5.4 на стр. 78 матрица $C^\vee = (c_{ij}^\vee)$ с элементами $c_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$, где $(n-1) \times (n-1)$ -матрица

$$C_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \cdots & c_{2,i-1} & c_{2,i+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j-1,1} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ c_{j+1,1} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

получается выкидыванием j -той строки и i -того столбца из матрицы C , называется *присоединённой* к матрице $C = (c_{ij})$. Из форм. (5-14) на стр. 78 вытекают равенства

$$C \cdot C^\vee = C^\vee \cdot C = \det(C) \cdot E, \quad (5-15)$$

справедливые для любой¹ матрицы C , в том числе с $\det C = 0$. Формулы (5-15) являются частным случаем *соотношений Лапласа*, которые в полной общности доказываются в н° 5.6.2 ниже. Сравнение (i, i) -тых диагональных элементов в матрицах (5-15) приводит к равенствам

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki} = \det(C), \quad (5-16)$$

которые называются *разложениями определителя по i -той строке и по i -тому столбцу* соответственно. Например, раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{21} (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}) + c_{31} (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})$$

что согласуется с прямым вычислением со стр. 74.

5.4.3. Однородная система n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Решения системы n линейно независимых линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5-17)$$

¹Убедиться в этом можно, например, так. Приравнявая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (5-15), мы получаем набор из n^2 полиномиальных тождеств в кольце многочленов от n^2 переменных c_{ij} с целыми коэффициентами. Чтобы доказать, что данный многочлен с целыми коэффициентами от N переменных нулевой, достаточно убедиться, что он тождественно равен нулю на некотором всюду плотном подмножестве в \mathbb{R}^N . Поскольку вещественные матрицы с ненулевым определителем всюду плотны в \mathbb{R}^{n^2} , и для них равенство (5-15) выполнено, то оно выполнено и как формальное буквенное тождество над кольцом многочленов от независимых переменных c_{ij} с коэффициентами в \mathbb{Z} .

на неизвестные¹ (x_0, x_1, \dots, x_n) образуют в координатном пространстве \mathbb{k}^{n+1} одномерное векторное подпространство — аннулятор n -мерного подпространства в \mathbb{k}^{n+1*} , порождённого строками $n \times (n+1)$ -матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов уравнений (5-17). Положим

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (5-18)$$

(матрица в правой части имеет размер $n \times n$ и получается из матрицы A выкидыванием столбца с номером i).

Предложение 5.5 (второе правило Крамера)

Уравнения (5-17) линейно независимы, если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в таком случае этот вектор является базисным в пространстве решений системы (5-17).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i -той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \dots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (5-17). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (5-18) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in \mathbb{k}^{n+1*}$ линейно независимы, то по лемме о замене² ими можно заменить некоторые n ковекторов стандартного базиса в \mathbb{k}^{n+1*} . Пусть это будут последние n векторов. Коль скоро ковекторы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

образуют базис в \mathbb{k}^{n+1*} , определитель матрицы, составленной из строк их координат, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке $(1, 0, \dots, 0)$, видим, что он равен A_0 . Тем самым, $A_0 \neq 0$. \square

Пример 5.3 (пересечение плоскостей в $\mathbb{A}(\mathbb{k}^3)$)

Две непараллельных плоскости, заданных в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

¹Обратите внимание, что они нумеруются с нуля, и всего их $n+1$.

²См. лем. 4.2 на стр. 56.

с непропорциональными левыми частями $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{k}^{3*}$, пересекаются по прямой с вектором скорости $v = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d. \end{cases}$$

5.5. Объём и барицентрические координаты. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задан набор из $n + 1$ точек p_0, p_1, \dots, p_n , не лежащих в одной гиперплоскости. Поместим это пространство внутрь $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{k} \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1, 0) + V$, параллельной векторному подпространству $V \subset \mathbb{k} \oplus V$ и проходящей через точку $(1, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$. Рассмотрим в \mathbb{A}^{n+1} аффинный координатный репер с началом в точке $o = (0, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$ и базисными векторами $e_0 = \overline{op_0}, e_1 = \overline{op_1}, e_2 = \overline{op_2}, \dots, e_n = \overline{op_n}$. Гиперплоскость Π проходит через концы этих базисных векторов и, стало быть, задаётся уравнением $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$. Поэтому координаты (x_0, x_1, \dots, x_n) точки $a \in \Pi$ можно воспринимать как набор весов с суммой 1, такой что центр тяжести точек p_i , взятых с весами x_i , оказывается в точке a :

$$x_0 \overline{ap_0} + x_1 \overline{ap_1} + \dots + x_n \overline{ap_n} = \overline{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_i e_i = 0.$$

Этот набор весов называют *барицентрическими координатами* точки a относительно точек p_0, p_1, \dots, p_n . Мы заключаем, что каждая точка $a \in \mathbb{A}^n$ имеет единственные барицентрические координаты и наоборот, каждый набор весов с суммой 1 однозначно задаёт в \mathbb{A}^n точку с такими барицентрическими координатами. Координата x_i вектора \overline{oa} в базисе из $e_i = \overline{op_i}$ вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega(\overline{op_0}, \dots, \overline{op_{i-1}}, \overline{oa}, \overline{op_{i+1}}, \dots, \overline{op_n})}{\omega(\overline{op_0}, \dots, \overline{op_n})} \quad (5-19)$$

и представляет собою отношение $(n + 1)$ -мерных объёмов двух пирамид¹ с общей вершиной o и основаниями $[p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n]$ и $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, лежащими в одной не проходя-

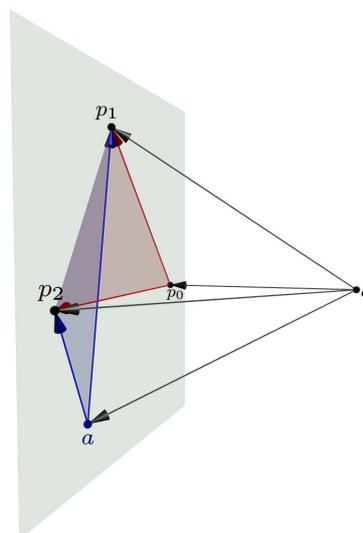


Рис. 5♦4. Барицентрические координаты как отношения объёмов.

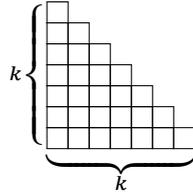
¹По определению, ориентированный объём пирамиды (или симплекса) с вершиной o и основанием в концах выпущенных из o векторов v_1, v_2, \dots, v_n полагают равным делённому на $n!$ объёму параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, \dots, v_n . Над полем \mathbb{R} правильность такого определения объясняется в упр. 5.10 на стр. 83.

щей через o гиперплоскости Π , как на рис. 5◊4. Из следующей ниже лем. 5.3 вытекает, что это отношение равно отношению n -мерных объёмов оснований этих пирамид.

УПРАЖНЕНИЕ 5.10 (Объёмы ступенчатых пирамид). Положим $\Pi_k^1 \stackrel{\text{def}}{=} k$ и далее, по индукции, для каждого $n \geq 2$ обозначим через

$$\Pi_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$$

количество n -мерных кубиков в n -мерной «ступенчатой пирамиде» высоты k , образованной k ступенчатыми $(n - 1)$ -мерными пирамидами убывающей высоты, поставленными в стопку вдоль n -той координатной оси. Например, при $n = 2$ двумерная ступенчатая пирамида высоты k имеет вид



и состоит из $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 = k(k + 1) / 2$ квадратиков¹. Явно выразите Π_k^n через n и k и найдите отношение объёма параллелепипеда к объёму симплекса, натянутого на вершину этого параллелепипеда и все вершины, соединённые с ней ребром.

ЛЕММА 5.3

Для любого k -мерного подпространства U в m -мерном векторном пространстве W и таких векторов $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_{m-k} \in W$, что векторы

$$w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k$$

составляют базис пространства W , выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)}, \quad (5-20)$$

в котором ω_k и ω_m это любые ненулевые формы k -мерного и m -мерного объёмов в пространствах U и W соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы u_1, u_2, \dots, u_k линейно независимы и составляют базис в U . Согласно предл. 5.3 на стр. 77,

$$\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0.$$

Определим на подпространстве U ещё одну форму объёма ω' равенством

$$\omega'(v'_1, v'_2, \dots, v'_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v'_1, v'_2, \dots, v'_k)$$

для любых векторов $v'_1, v'_2, \dots, v'_k \in U$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.11. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на U .

¹По этой причине число $\Pi_k^2 = \binom{k+1}{2}$ называется k -тым треугольным числом и часто обозначается T_k .

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе u_1, u_2, \dots, u_k ,

$$\frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega'(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega'(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)}.$$

□

Следствие 5.5

Барицентрические координаты (x_0, x_1, \dots, x_n) точки $a \in \mathbb{A}^n$ относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ равны отношениям

$$x_i = \frac{\det(\overline{ap}_0, \dots, \overline{ap}_{i-1}, \overline{ap}_{i+1}, \dots, \overline{ap}_n)}{\det(\overline{p_i p}_0, \dots, \overline{p_i p}_{i-1}, \overline{p_i p}_{i+1}, \dots, \overline{p_i p}_n)}, \quad (5-21)$$

в числителе которых стоит ориентированный объём n -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы, ведущие из точки a во все точки p_v , кроме p_i , а в знаменателе — объём аналогичного параллелепипеда на векторах, идущих из p_i во все остальные точки p_v .

Доказательство. Подставим в числитель дроби из формулы (5-19) для каждого $v \neq i$

$$\overline{op}_v = \overline{oa} + \overline{ap}_v$$

и, пользуясь тем, что объём полилинеен зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем числитель к виду $\omega(\overline{ap}_0, \dots, \overline{ap}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{ap}_{i+1}, \dots, \overline{ap}_n)$. Аналогично, подставляя в знаменатель $\overline{p_i p}_v = \overline{p_i p}_i + \overline{p_i p}_v$ при $v \neq i$, преобразуем его в

$$\omega(\overline{p_i p}_0, \dots, \overline{p_i p}_{i-1}, \overline{p_i p}_i, \overline{p_i p}_{i+1}, \dots, \overline{p_i p}_n).$$

Так как $\overline{p_i p}_i$ отличается от \overline{oa} на линейную комбинацию векторов $\overline{p_i p}_v$, знаменатель равен $\omega(\overline{p_i p}_0, \dots, \overline{p_i p}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{p_i p}_{i+1}, \dots, \overline{p_i p}_n)$. Итак,

$$x_i = \frac{\omega(\overline{ap}_0, \dots, \overline{ap}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{ap}_{i+1}, \dots, \overline{ap}_n)}{\omega(\overline{p_i p}_0, \dots, \overline{p_i p}_{i-1}, \overline{oa}, \overline{p_i p}_{i+1}, \dots, \overline{p_i p}_n)}.$$

Остаётся применить лем. 5.3 для $k = n$, $U = V$, $m = n + 1$, $W = \mathbb{k} \oplus V$, $w_1 = \overline{oa}$, $u_v = \overline{p_i p}_v$ и $v_v = \overline{ap}_v$, где v пробегает отличные от i значения от 0 до n . □

5.6. Алгебраическое отступление: грасмановы многочлены. Полезным инструментом для работы с определителями являются *грасмановы многочлены*. Они определяются точно также, как и обычные многочлены от n переменных с коэффициентами в поле \mathbb{k} , с той лишь разницей, что грасмановы переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ не коммутируют, а *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям¹

$$\forall i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0, \quad (5-22)$$

¹Если $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Если же $\text{char} \mathbb{k} = 2$ (т. е. $-1 = 1$), соотношения $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ означают, что переменные ξ_i коммутируют друг с другом, и именно соотношение на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает в этом случае грасмановы переменные от обычных.

где символ « \wedge » обозначает грассманово умножение, чтобы отличать его от обычного коммутативного умножения. Поскольку квадраты переменных равны нулю, все грассмановы мономы *линейны* по каждой входящей в них переменной и с точностью до знака исчерпываются мономами, в которых номера переменных строго возрастают слева направо:

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_m}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_m, \quad (5-23)$$

Если переставить переменные посредством биекции $g \in S_m$, знак грассманова монома изменится по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \text{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_m}. \quad (5-24)$$

Таким образом, алгебра грассмановых многочленов $\mathbb{k}\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ представляет собою векторное пространство размерности 2^n над полем \mathbb{k} с базисом из мономов (5-23), занумерованных всевозможными строго возрастающими подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Эти базисные мономы перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{при } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{при } I \cap J \neq \emptyset \end{cases} \quad (5-25)$$

где знак тасующей перестановки, упорядочивающей по возрастанию индексы

$$i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k,$$

у которых $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, равен¹

$$\text{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k) = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_m+m(m+1)/2}.$$

Единственный моном нулевой степени $\xi_\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 1$, отвечающий подмножеству $I = \emptyset$, является единицей грассмановой алгебры. Единственный моном старшей степени

$$\xi_{\text{top}} = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$$

аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (5-23), занумерованные k -элементными подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Произвольные мономы степеней m и k коммутируют по правилу

$$\begin{aligned} (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_m}) \wedge (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_k}) &= \\ &= (-1)^{km} (\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_k}) \wedge (\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_m}), \end{aligned}$$

поскольку для переноса каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i требуется m транспозиций. Тем самым, для любых двух однородных грассмановых многочленов f и g выполняется равенство

$$f \wedge g = (-1)^{\deg f \deg g} g \wedge f. \quad (5-26)$$

В частности, однородные многочлены чётной степени коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

УПРАЖНЕНИЕ 5.12. Опишите *центр*² грассмановой алгебры.

¹См. упр. 5.7 на стр. 77.

²Т.е. все грассмановы многочлены, перестановочные с каждым элементом грассмановой алгебры

5.6.1. Линейные замены грасмановых переменных. Обозначим через

$$V \subset \mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$$

векторное пространство однородных грасмановых многочленов первой степени, а через

$$\Lambda^k V \subset \mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$$

пространство однородных многочленов степени k . Как векторное пространство над \mathbb{k} , грасманова алгебра распадается в конечную прямую сумму

$$\mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V,$$

где $\Lambda^1 V = V$, а $\Lambda^0 V = \mathbb{k} \cdot 1$ это одномерное подпространство констант.

Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in V$ линейно выражаются через векторы w_1, w_2, \dots, w_k по формуле $(v_1, v_2, \dots, v_\ell) = (w_1, w_2, \dots, w_k) \cdot C$, где C — произвольная матрица размера $k \times \ell$ с элементами из поля \mathbb{k} , то их грасмановы произведения $v_J = v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \dots \wedge v_{j_m} \in \Lambda^m V$ линейно выражаются через произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$\begin{aligned} v_J &= v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \dots \wedge v_{j_m} = \left(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m} \cdot \sum_{g \in S_m} \operatorname{sgn}(g) c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \dots c_{i_{g(m)} j_m} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}, \end{aligned}$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$ -подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I , а индекс $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ пробегает все наборы из m возрастающих номеров $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ -тым *минором* m -того порядка в матрице C . Таким образом, IJ -тый элемент матрицы, выражающей грасманов монот v_J через грасмановы мономы w_I равен IJ -тому минору m -того порядка в матрице выражающей векторы v через векторы w . Получающаяся матрица размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ -тый минор (c_{IJ}) матрицы C , обозначается $\Lambda^m C$ и называется m -той *внешней степенью* матрицы C .

5.6.2. Соотношения Лапласа. Для каждого набора возрастающих индексов

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

положим $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$, $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$ и условимся обозначать через

$$\hat{J} = (\hat{j}_1, \hat{j}_2, \dots, \hat{j}_{n-m}) = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$$

дополнительный к J набор возрастающих индексов, так что $\deg \hat{J} = n - m$. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A размера $n \times n$ и линейные грасмановы многочлены

$$\alpha_j = \xi_1 \cdot a_{1j} + \xi_2 \cdot a_{2j} + \dots + \xi_n a_{nj}, \quad (5-27)$$

коэффициентами которых являются столбцы матрицы A . Для любых двух наборов I, J одинаковой степени $\deg I = \deg J = m$ грасмановы произведения $\alpha_J = \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_m}$ и

$\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$. Перемножая эти два произведения по формуле (5-25), получаем

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (5-28)$$

Подставляя в это равенство выражения (5-27) векторов α_j через стандартные базисные векторы ξ_j , в левой части будем иметь

$$\left(\sum_K \xi_K a_{KJ} \right) \wedge \left(\sum_L \xi_L a_{L\hat{I}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{K\hat{I}},$$

где K пробегает все индексы длины $\deg K = m$, а в правой — нуль при $I \neq J$ и

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$$

при $I = J$. Таким образом, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ выполняются соотношения Лапласа

$$\sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{K\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (5-29)$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A . При $I = J$ соотношение (5-29) даёт формулу для вычисления определителя¹ через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m , сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J , и дополнительные к ним миноры $a_{j\hat{K}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{KJ} :

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K| + |J|} a_{KJ} a_{K\hat{J}}. \quad (5-30)$$

Произведение $(-1)^{|K| + |J|} a_{K\hat{J}}$ называется алгебраическим дополнением к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|K| + |J|} a_{K\hat{J}}$. При $I \neq J$ соотношение (5-29) с точностью до знака имеет вид

$$\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{KI} = 0 \quad (5-31)$$

и называется теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения, т. к. левая часть в (5-31) отличается от (5-30) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения \hat{a}_{KJ} , а на дополнения \hat{a}_{KI} к минорам a_{KI} , сосредоточенным в тех же строках K , но в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Упражнение 5.13. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (5-32)$$

¹С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n -мерного параллелепипеда через объёмы его m -мерных и $(n - m)$ -мерных граней.

Если согласованно занумеровать все m -элементные подмножества и все $(n - m)$ -элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и \hat{J} имели одинаковые номера, то все соотношения Лапласа можно записать в виде одного равенства на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$:

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E, \quad (5-33)$$

где через $\Lambda^{n-m} \hat{A}^t$ обозначена матрица, (IJ) -тый элемент которой равен

$$\hat{a}_{IJ}^t = \hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{ji}.$$

ПРИМЕР 5.4 (ПРИСОЕДИНЁННАЯ МАТРИЦА)

При $m = 1$ наборы $I = (i)$ и $K = (k)$ содержат по одному элементу, и миноры $a_{KI} = a_{ki}$ это просто матричные элементы матрицы A , так что $\Lambda^1 A = A$. Алгебраическое дополнение

$$\hat{a}_{ki} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+k} a_{\hat{k}\hat{i}}$$

к элементу a_{ki} представляет собою умноженный на $(-1)^{k+j}$ минор порядка $(n - 1)$, равный определителю матрицы $A_{\hat{k}\hat{i}}$, которая получается из A вычёркиванием k -й строки и i -го столбца. Таким образом, матрица $\Lambda^{n-1} \hat{A}^t = A^\vee$ это в точности *присоединённая* к A матрица из н° 5.4.2 на стр. 80, а матричное соотношение (5-33) превращается в форм. (5-15) на стр. 80

$$A \cdot A^\vee = A^\vee \cdot A = \det(A) \cdot E = \begin{pmatrix} \det(A) & & & 0 \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix}.$$

Формулы (5-30) и (5-32) доставляют разложения определителя по j -тому столбцу и по i -той строке соответственно:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{\hat{k}\hat{j}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \det A_{\hat{i}\hat{k}}. \quad (5-34)$$

ПРИМЕР 5.5 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПУЧКА МАТРИЦ)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB) . Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, а её определитель $\det(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)$ является однородным многочленом степени n от α и β . Покажем, что коэффициент этого многочлена при $\alpha^k \beta^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ}, \quad (5-35)$$

где суммирование идёт по всем k -элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Для этого рассмотрим линейные грассмановы многочлены

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot A \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, \dots, b_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot B.$$

Они удовлетворяют равенству

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge (\alpha a_2 + \beta b_2) \wedge \dots \wedge (\alpha a_n + \beta b_n) = \det(\alpha A + \beta B) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n.$$

Слагаемые, содержащие $\alpha^k \beta^{n-k}$, возникают в левой части при выборе первого слагаемого в некоторых k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n - k$ скобках. Если первое слагаемое выбирается в скобках с номерами i_1, i_2, \dots, i_k , считая слева направо, то коэффициент при $\alpha^k \beta^{n-k}$ получается равным

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_k, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_{n-k}) \cdot a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k} \wedge b_{\hat{i}_1} \wedge b_{\hat{i}_2} \wedge \dots \wedge b_{\hat{i}_{n-k}} = \\ & = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \left(\sum_J \xi_J a_{JI} \right) \wedge \left(\sum_K \xi_K b_{K\hat{I}} \right) = \\ & = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \sum_{JK} a_{JI} \cdot b_{K\hat{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_K = \left(\sum_J (-1)^{|I| + |J|} a_{JI} \cdot b_{j\hat{I}} \right) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n \end{aligned}$$

Коэффициент при $\alpha^k \beta^{n-k}$ в $\det(\alpha A + \mu B)$ получается суммированием этих подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (5-35).

Полагая в этой формуле $\alpha = 1$, $\beta = t$ и $B = E$, получаем разложение

$$\begin{aligned} \det(tE + A) &= t^n + \sum_{k=1}^n t^{n-k} \cdot \sum_{\#I=k} a_{II} = \\ &= t^n + t^{n-1} \cdot \sum_i a_{ii} + t^{n-1} \cdot \sum_{i < j} (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji}) + \dots + t \cdot \sum_i \hat{a}_{ii} + \det A, \end{aligned}$$

в котором коэффициент при t^{n-k} равен сумме определителей всех $k \times k$ подматриц матрицы A , главная диагональ¹ которых содержится в главной диагонали матрицы A . Они называются *главными диагональными минорами* k -того порядка. Коэффициент при t^{n-1} , равный сумме элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A , называется *следом* матрицы A и обозначается

$$\operatorname{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (5-36)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.14. Покажите, что $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ и $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ji} = \operatorname{tr}(BA)$.

Используя след и обозначения из формулы (5-33), определитель пучка матриц можно записать в виде

$$\det(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = \sum_{k=0}^n \operatorname{tr}(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{A}^t) \cdot \alpha^k \beta^{n-k}, \quad (5-37)$$

¹Напомню, что *главной* называется диагональ, идущая из левого верхнего угла квадратной матрицы в правый нижний.

§6. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

6.1. Евклидовы пространства. Напомню¹, что векторное V над полем вещественных чисел \mathbb{R} называется *евклидовым*, если на нём задано симметричное билинейное скалярное произведение, сопоставляющее паре векторов $u, w \in V$ число $(u, w) = (w, u) \in \mathbb{R}$ так, что скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны. Ограничение скалярного произведения на любое подпространство в V задаёт евклидову структуру на этом подпространстве. В частности, линейная оболочка любой пары непропорциональных векторов в любом евклидовом пространстве представляет собою обычную «школьную» евклидову плоскость, подробно обсуждавшуюся нами в §3. В частности, для любых двух векторов каждого евклидова пространства выполняется неравенство Коши – Буняковского – Шварца²

$$(v, v) \cdot (w, w) \geq (v, w)^2, \quad (6-1)$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов u и w , и вытекающее из него³ неравенство треугольника

$$\forall u, w \quad \sqrt{(u, u)} + \sqrt{(w, w)} \geq \sqrt{(u + w, u + w)}, \quad (6-2)$$

равенство в котором равносильно сонаправленности⁴ векторов u и w . Это позволяет определить в каждом евклидовом пространстве *длину* вектора и *угол* между двумя векторами:

$$|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)} \quad (6-3)$$

$$\cos \sphericalangle(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v, w)}{|v| \cdot |w|}. \quad (6-4)$$

Поскольку $|v \pm w|^2 = (v \pm w, v \pm w) = (v, v) \pm 2(v, w) + (w, w)$, скалярное произведение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \rightarrow \mathbb{R}$ посредством формул

$$(v, w) = (|v + w|^2 - |v - w|^2)/4 = (|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2)/2. \quad (6-5)$$

Пример 6.1 (стандартная евклидова структура на \mathbb{R}^n)

Напомню⁵, что в стандартной евклидовой структуре на координатном пространстве \mathbb{R}^n скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ задаётся формулой

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (6-6)$$

Неравенство (6-1) для такого скалярного произведения имеет вид

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2$$

и называется *неравенством Коши – Буняковского*. Оно справедливо для любых двух наборов вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n и обращается в равенство тогда и только тогда,

¹См. *опр. 3.1* на стр. 33.

²См. *сл. 3.2* на стр. 35.

³См. *сл. 3.3* на стр. 35.

⁴Т. е. пропорциональности с *положительным* коэффициентом.

⁵См. *прим. 3.1* на стр. 33.

когда эти наборы пропорциональны. Длина вектора в \mathbb{R}^n вычисляется по n -мерной теореме Пифагора:

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Пример 6.2 (пространство непрерывных функций)

Зададим скалярное произведение непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (6-7)$$

Упражнение 6.1. Выведите из известных вам свойств интегралов от непрерывных функций, что это произведение билинейно и положительно.

Формула (6-7) является прямым обобщением формулы (6-6), если воспринимать функции как «континуальные наборы координат», номера которых суть точки отрезка. В пространстве непрерывных функций неравенство (6-1) имеет вид

$$\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$$

и называется *неравенством Шварца*. Оно выполняется для любых двух непрерывных функций f и g и обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти функции отличаются скалярным множителем. Длина функции вычисляется по «континуальной» теореме Пифагора

$$|f|^2 = \int_a^b f^2(x) dx.$$

6.1.1. Уравнение гиперплоскости.

Для заданных ненулевого вектора a в евклидовом пространстве V и произвольного числа $d \in \mathbb{R}$ линейное неоднородное уравнение на вектор $x \in V$

$$(a, x) = d \quad (6-8)$$

задаёт в аффинном пространстве $A(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ в ту же сторону, что и конец вектора a , если $d > 0$, и в противоположную сторону, если $d < 0$ (см. рис. 6◊1). Действительно, вектор x удовлетворяет (6-8), если и только если его ортогональная проекция¹ на вектор a равна

$$a_x = a \cdot \frac{(a, x)}{(a, a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{d}{|a|}.$$

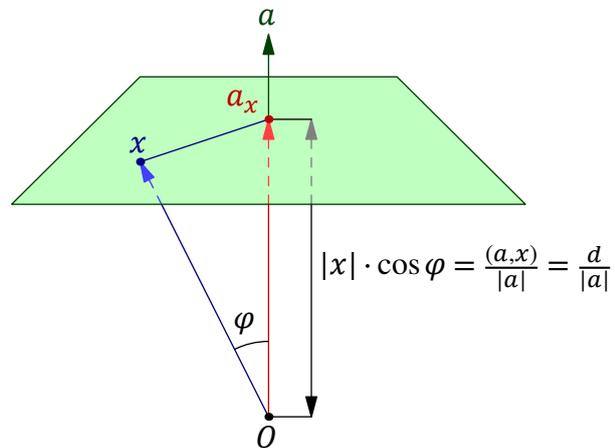


Рис. 6◊1. ГМТ $x : (a, x) = d$.

¹См. формулу (3-3) на стр. 34.

Это фиксированный вектор длины $|a_x| = |d| / |a|$, сонаправленный с a при $d > 0$ и противоположно направленный к a при $d < 0$. В координатном пространстве \mathbb{R}^n уравнение (6-8) выглядит как $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$, где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Пример 6.3 (Срединный перпендикуляр)

Рассмотрим в евклидовом аффинном пространстве A^n произвольную пару различных точек $p_0 \neq p_1$. Покажем, что ГМТ $x \in A^n$, равноудалённых от p_0 и p_1 , представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overline{p_0p_1}$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$ — середину отрезка $[p_0, p_1]$. Эта гиперплоскость называется *срединным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_1]$. Равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений

$$(\overline{xp_0}, \overline{xp_0}) = (\overline{xp_1}, \overline{xp_1}),$$

т. е. равенству $(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x)$, где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки $O \in A^n$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем $(p_0, p_0) - 2(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2(p_1, x)$ или

$$2(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0). \quad (6-9)$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overline{p_0p_1} = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, ибо последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1 .

Упражнение 6.2. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (6-9).

6.1.2. Ортогонализация. Набор векторов евклидова пространства называют *ортогональным*, если любые два вектора в нём ортогональны друг другу. Любой ортогональный набор ненулевых векторов v_1, v_2, \dots, v_k линейно независим, поскольку скалярно умножая равенство

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

на v_i , получаем $\lambda_i(v_i, v_i) = 0$, откуда все $\lambda_i = 0$. Ортогональный набор векторов называют *ортонормальным*, если все векторы в нём имеют длину 1. По предыдущему, всякий ортонормальный набор векторов e_1, e_2, \dots, e_k является базисом своей линейной оболочки, и коэффициенты разложения векторов по этому базису равны скалярным произведениям с соответствующими базисными векторами: если $v = \sum x_i e_i$, то $(e_i, v) = x_i$ в силу ортонормальности векторов e_i . Скалярное произведение векторов $u = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$, разложенных по ортонормальному базису e_1, e_2, \dots, e_k , равно $(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$.

Предложение 6.1

В линейной оболочке любых векторов u_1, u_2, \dots, u_m , не все из которых нулевые, существует такой ортонормальный базис e_1, e_2, \dots, e_k , что каждый вектор u_i лежит в линейной оболочке первых i базисных векторов e_1, e_2, \dots, e_i .

Доказательство. В качестве первого вектора в искомом базисе возьмём $e_1 = u_s / |u_s|$, где u_s — первый слева ненулевой вектор в наборе u_1, u_2, \dots, u_m . Тогда $|e_1| = 1$ и e_1 порождает то же одномерное пространство, что и векторы u_1, u_2, \dots, u_s . Допустим по индукции, что уже построены ортонормальные векторы e_1, e_2, \dots, e_i , линейная оболочка которых совпадает с линейной

оболочкой векторов u_1, u_2, \dots, u_k , где $k \geq i$. Положим

$$w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{v=1}^i (u_{k+1}, e_v) \cdot e_v \quad (6-10)$$

(см. рис. 6◊2). Вектор w_{i+1} ортогонален всем векторам e_1, e_2, \dots, e_i , поскольку скалярно умножая обе части равенства (6-10) на любой вектор e_v с $1 \leq v \leq i$, получаем

$$(w_{i+1}, e_v) = (u_{k+1}, e_v) - (u_{k+1}, e_v)(e_v, e_v) = 0.$$

Если $w_{i+1} = 0$, то вектор u_{k+1} лежит в линейной оболочке векторов e_1, e_2, \dots, e_i и можно переходить к следующему шагу с тем же i и $k+1$ вместо k . Если $w_{i+1} \neq 0$, то полагаем $e_{i+1} = w_{i+1}/|w_{i+1}|$ и получаем ортонормальный набор векторов e_1, e_2, \dots, e_{i+1} , линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой векторов u_1, u_2, \dots, u_{k+1} . \square

Замечание 6.1. Описанный выше процесс построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

Следствие 6.1

В любом евклидовом пространстве существует ортонормальный базис. \square

6.2. Матрицы Грама. Слюбыми двумя наборами векторов евклидова пространства

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \dots, u_m) \\ w &= (w_1, w_2, \dots, w_k) \end{aligned} \quad (6-11)$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений, поместив скалярное произведение (u_i, w_j) в пересечение i -той строки и j -того столбца. Полученная матрица обозначается

$$G_{uw} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, w_j)) \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R})$$

и называется *матрицей Грама* наборов u и w . Если воспринимать эти наборы как матрицы, элементами которых являются векторы, и под произведением двух векторов понимать их скалярное произведение, т. е. положить $ab \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$ для любых $a, b \in V$, то матрицу Грама можно описать при помощи умножения матриц равенством

$$G_{uw} = u^t w,$$

где $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ это строка из векторов, а u^t — столбец из векторов, транспонированный к строке $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. Если наборы векторов u и w линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ по формулам $u = e \cdot C_{eu}$ и $w = f \cdot C_{fw}$, где $C_{eu} \in \text{Mat}_{r \times m}(\mathbb{R})$ и $C_{fw} \in \text{Mat}_{s \times k}(\mathbb{R})$ некие матрицы, то матрица Грама G_{uw} пересчитывается через матрицу Грама G_{ef} по формуле

$$G_{uw} = u^t w = (e C_{eu})^t f C_{fw} = C_{eu}^t e^t f C_{fw} = C_{eu}^t G_{ef} C_{fw}. \quad (6-12)$$

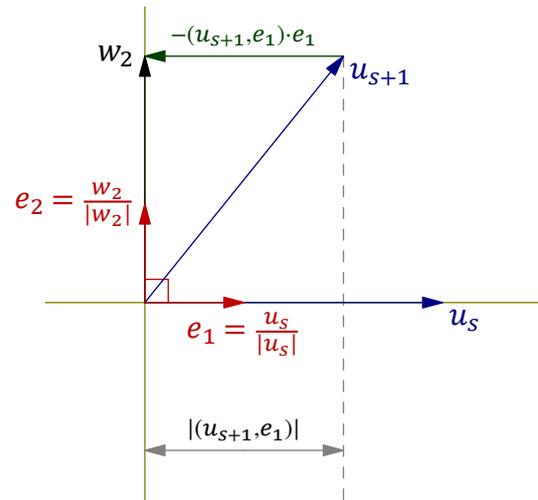


Рис. 6◊2. Второй шаг ортогонализации.

При $w = u$ мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора u_1, u_2, \dots, u_m . В этом случае обозначение G_{uu} сокращается до $G_u \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, u_j)) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Определитель этой квадратной матрицы называется *определителем Грама* векторов u_1, u_2, \dots, u_m и обозначается $\Gamma_u \stackrel{\text{def}}{=} \det G_u$. Ортонормальность векторов e_1, e_2, \dots, e_m означает, что их матрица Грама $G_e = E$, и в этом случае $\Gamma_e = \det E = 1$.

Предложение 6.2

Если векторы u_1, u_2, \dots, u_m образуют базис в подпространстве U , а векторы e_1, e_2, \dots, e_m составляют в том же подпространстве U ортонормальный базис, то $\Gamma_u = \det^2 C_{eu}$, где C_{eu} — матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов u в базисе e , т. е.

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot C_{eu}.$$

Доказательство. По формуле (6-12) имеем $G_u = C_{eu}^t G_e C_{eu} = C_{eu}^t E C_{eu} = C_{eu}^t C_{eu}$. Следовательно, $\Gamma_u = \det G_u = \det C_{eu}^t \cdot \det C_{eu} = \det^2 C_{eu}$. \square

Следствие 6.2

Определитель Грама любого набора векторов неотрицателен, и его обращение в нуль равносильно линейной зависимости этих векторов.

Доказательство. Если векторы v_1, v_2, \dots, v_m линейно независимы, то они составляют базис в своей линейной оболочке, и $\Gamma_v = \det^2 C_{ev} > 0$. Если же $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i , то умножая это равенство скалярно на v_v , получаем при каждом v равенство $\lambda_1(v_v, v_1) + \lambda_2(v_v, v_2) + \dots + \lambda_m(v_v, v_m) = 0$, означающее, что столбцы матрицы Грама $G_v = ((v_i, v_j))$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Поэтому $\Gamma_v = \det G_v = 0$. \square

Следствие 6.3

Все ортонормальные базисы n -мерного евклидова пространства имеют одинаковый по абсолютной величине объём¹. Если зафиксировать форму объёма так, чтобы абсолютная величина объёма ортогонального базиса равнялась единице, квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные векторы v_1, v_2, \dots, v_n будет равен определителю Грама Γ_v этих векторов.

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь ортонормальный базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и рассмотрим форму объёма, равную нём единице. Тогда квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные n векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C_{ev}$, равен $\det^2 C_{ev} = \Gamma_v$. В частности, квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на любой ортонормальный базис f равен $\Gamma_f = \det E = 1$. \square

6.2.1. Евклидов объём и ориентация. Ортонормальные базисы равного объёма называются *коориентированными*. Ортонормальные базисы противоположного по знаку объёма называются *противоположно ориентированными*. Любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет. В каждом евклидовом пространстве V имеются ровно две (различающиеся знаком) формы объёма, такие что объёмы всех ортонормальных базисов равны ± 1 . Выбор одной из них в качестве формы объёма называется *выбором*

¹Относительно любой ненулевой формы объёма.

ориентации на V . Ориентация координатного пространства \mathbb{R}^n , принимающая значение $+1$ на стандартном базисе (e_1, e_2, \dots, e_n) , называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы (v_1, v_2, \dots, v_n) , вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* (неориентированного) параллелепипеда. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\text{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_v} = \sqrt{\det(v_i, v_j)}. \quad (6-13)$$

6.3. Евклидова двойственность. С каждым вектором v евклидова пространства V связан линейный функционал скалярного умножения на v

$$g_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto (u, v).$$

Сопоставление векторам $v \in V$ линейных функционалов g_v задаёт линейное отображение

$$g : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto g_v. \quad (6-14)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Убедитесь в линейности функционала g_v и отображения g .

Поскольку $g_v(v) = (v, v) \neq 0$ для любого $v \neq 0$, ковектор g_v ненулевой при ненулевом $v \neq 0$. Тем самым, отображение (6-14) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Иначе говоря, любой линейный функционал на евклидовом пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Убедитесь, что матрица отображения g в произвольном базисе e пространства V и двойственном ему базисе e^* пространства V^* совпадает с матрицей Грама G_e .

6.3.1. Двойственный базис. Для любого базиса $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства V , прообразы координатных функционалов $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in V^*$, образующих двойственный к u базис пространства V^* , обозначаются $u^\times = (u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_n^\times) \in V$ и называются *евклидово двойственным* к u базисом пространства V . Векторы евклидово двойственного базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ 1, & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (6-15)$$

означающими что взаимная матрица Грама $G_{uu^\times} = u^t u^\times = E$. Согласно форм. (6-12) на стр. 93 матрица C_{uu^\times} , линейно выражающая базис u^\times через базис u по формуле $u^\times = u C_{uu^\times}$, удовлетворяет равенству $E = G_{uu^\times} = G_u C_{uu^\times}$, т. е. обратна к матрице Грама базиса u . Тем самым,

$$(u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot G_u^{-1}. \quad (6-16)$$

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Покажите, что $u_i^{\times \times} = u_i$.

По определению двойственного базиса, коэффициенты разложения произвольного вектора v по любому базису u_1, u_2, \dots, u_n равны скалярным произведениям с соответствующими векторами двойственного базиса

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times). \quad (6-17)$$

Убедиться в этом напрямую можно скалярно умножив обе части на u_i^\times для каждого i .

6.3.2. Ортогоналы. Прообраз аннулятора $\text{Ann}(U) \subset V^*$ данного подпространства $U \subset V$ при изоморфизме (6-14) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к U . По [предл. 4.7](#) на стр. 64

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Убедитесь, что $U^\perp \cap U = 0$.

Таким образом, $V = U \oplus U^\perp$, т. е. каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^\perp}, \quad \text{где } v_U \in U, v_{U^\perp} \in U^\perp. \quad (6-18)$$

Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ этого разложения называются *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство U и *нормальной составляющей* вектора $v \in V$ относительно U соответственно.

Из [сл. 4.6](#) на стр. 64 и [теор. 4.1](#) на стр. 65 вытекает, что соответствие $U \leftrightarrow U^\perp$ задаёт обративающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в V , и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств $U, W \subset V$ выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp. \quad (6-19)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Докажите все эти утверждения независимо от [сл. 4.6](#) и [теор. 4.1](#).

6.4. Ортогональное проектирование. Для любого ненулевого подпространства $U \subsetneq V$ линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \rightarrow U, \quad v = v_U + v_{U^\perp} \mapsto v_U,$$

называется *ортогональным проектированием* V на U .

Предложение 6.3

Ортогональная проекция $v_U \in U$ произвольного вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$ однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

- 1) $v - v_U \in U^\perp$
- 2) $\forall u \in U (u, v) = (u, v_U)$
- 3) $\forall u \in U u \neq v_U \Rightarrow |v - u| > |v - v_U|$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^m u_i \cdot (v, u_i^\times), \quad (6-20)$$

где u_1, u_2, \dots, u_m и $u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_m^\times$ — произвольные евклидово двойственные базисы в U .

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы v_U и $v - v_U$ являются компонентами вектора v в прямом разложении $V = U \oplus U^\perp$. Свойство (3) выполняется для ортогональной проекции v_U вектора v на U , поскольку для любого вектора $u = v_U + w \in U$ с ненулевым $w \in U$

$$(v - u, v - u) = (v_{U^\perp} - w, v_{U^\perp} - w) = (v_{U^\perp}, v_{U^\perp}) + (w, w) > (v_{U^\perp}, v_{U^\perp}).$$

А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидно, единствен, свойство (3) равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор v_U , заданный по формуле (6-20), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по $u \in U$, достаточно проверить его для всех векторов какого-нибудь базиса в U . Для базисных векторов u_i^\times получаем требуемое равенство $(v_U, u_i^\times) = \sum_i (u_i, u_i^\times) \cdot (v, u_i^\times) = (v, u_i^\times)$. \square

Следствие 6.4

В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ для любого непустого аффинного подпространства $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$ и любой точки $a \notin \Pi$ существует единственная точка $a_\Pi \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

- 1) вектор $\overline{aa_\Pi}$ перпендикулярен любому вектору \overline{pq} с $p, q \in \Pi$
- 2) $|aq| > |aa_\Pi|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от p_a .

Доказательство. Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in \mathbb{A}(V)$ с радиус-векторами $\overline{oa} \in V$. При этом аффинное подпространство Π превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in \mathbb{A}$ сопоставится её радиус-вектор $v = \overline{oa} \in V$. Остаётся применить к ним предл. 6.3. \square

Определение 6.1 (расстояние от точки до подпространства)

Точка $a_\Pi \in \Pi$ из сл. 6.4 называется *ортогональной проекцией* точки a на подпространство Π . Длина $|a - a_\Pi|$ называется *расстоянием* от точки a до подпространства Π .

УПРАЖНЕНИЕ 6.8. Покажите, что расстояние от точки p до гиперплоскости $(a, x) = d$ равно $|d - (a, p)| / |a|$.

Следствие 6.5

Для произвольного вектора $v \notin U^\perp$ минимум углов $\angle(v, u)$ по всем $u \in U$ достигается на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе, а именно, на ортогональной проекции $v_U \in U$ вектора v на подпространство U .

Доказательство. Наименьшему значению угла $\angle(v, u)$ отвечает наибольшее значение

$$\cos(\angle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|}.$$

Но $(v, u) = (v_U, u)$ по свойству (2) из предл. 6.3, а в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца¹ максимум отношения $(v_U, u) / |u| = (v_U, u / |u|)$ достигается тогда и только тогда, когда единичный вектор $u / |u|$ сонаправлен с v_U . \square

¹См. формулу (6-1) на стр. 90.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2 (УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРОМ И ПОДПРОСТРАНСТВОМ)

Для $v \notin U^\perp$ угол $\sphericalangle(v, U) \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle(v, v_U)$ называется углом между вектором v и подпространством U . Для $v \in U^\perp$ мы полагаем $\sphericalangle(v, U) \stackrel{\text{def}}{=} \pi/2$.

ПРИМЕР 6.4 (ОБЪЁМ ЧЕРЕЗ «ПЛОЩАДЬ ОСНОВАНИЯ» И «ВЫСОТУ»)

Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор из $n + 1$ векторов

$$w = (v, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (6-21)$$

и обозначим через U линейную оболочку поднабора $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, составленного из последних n векторов. Тогда вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = v_U + v_{U^\perp}$, где $v_U \in U$, а v_{U^\perp} перпендикулярен U . Естественно назвать вектор v_{U^\perp} высотой параллелепипеда $(v, u_1, u_2, \dots, u_n)$, поднятой в вершину v с основания (u_1, u_2, \dots, u_n) . В координатах относительно произвольного ортонормального базиса в линейной оболочке набора w ориентированный объём параллелепипеда w равен

$$\det(v, u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(v - v_U, u_1, u_2, \dots, u_n) = \det(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n),$$

поскольку вектор v_U является линейной комбинацией векторов u_i . Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца в матрице Грама $G_{(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n)}$ является квадрат длины $|v_{U^\perp}|^2$, стоящий в левом верхнем углу. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Vol}^2(v, u_1, u_2, \dots, u_n) &= \det^2(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, u_2, \dots, u_n)} = \\ &= |v_{U^\perp}|^2 \cdot \Gamma_u = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \text{Vol}^2(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Таким образом, неориентированный евклидов объём параллелепипеда w равен произведению евклидова объёма основания u на длину опущенной на неё высоты:

$$\text{Vol}(v, u_1, u_2, \dots, u_n) = |v_{U^\perp}| \cdot \text{Vol}(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (6-22)$$

ПРИМЕР 6.5 (ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАССТОЯНИЯ И УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРОМ И ПРОСТРАНСТВОМ)

Формула (6-22) позволяет вычислять расстояние $\rho(v, U)$ от конца вектора v до подпространства U , порождённого линейно независимыми векторами u_1, u_2, \dots, u_n , как

$$\rho(v, U) = |v_{U^\perp}| = \Gamma_w / \Gamma_u. \quad (6-23)$$

Поскольку $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin \sphericalangle(v, U)$, где $\sphericalangle(v, U)$ это угол между вектором v и подпространством¹ U , мы заключаем, что

$$\sin \sphericalangle(v, U) = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\Gamma_w}{|v| \cdot \Gamma_u}. \quad (6-24)$$

ПРИМЕР 6.6 (ВЕКТОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В \mathbb{R}^3)

Зафиксируем в \mathbb{R}^3 какой-нибудь ортонормальный базис (u_1, u_2, u_3) положительной ориентации. Ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

¹См. опр. 6.2 на стр. 98.

можно записать, раскладывая определитель по первому столбцу, как скалярное произведение

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 \cdot (-b_1 c_3 + b_3 c_1) + a_3 \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_1) = (a, [b, c])$$

вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ с вектором

$$\begin{aligned} [b, c] &\stackrel{\text{def}}{=} (b_2 c_3 - b_3 c_2, -b_1 c_3 + b_3 c_1, b_1 c_2 - b_2 c_1) = \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (6-25)$$

который называется *векторным произведением* векторов b и c . Поскольку

$$(b, [b, c]) = \det(b, b, c) = 0 \quad \text{и} \quad (c, [b, c]) = \det(c, b, c) = 0,$$

вектор $[b, c]$ перпендикулярен обоим векторам b, c , а его длина

$$|[b, c]| = \frac{(a, [b, c])}{|a| \cdot \cos \angle(a, [b, c])} = \frac{\text{Vol}(a, b, c)}{h_a} = \text{Vol}(b, c)$$

равна евклидовой площади параллелограмма, натянутого на векторы b, c . Если векторы b и c не пропорциональны, то вектор $[b, c] \neq 0$ и направлен так, что базис $[b, c], b, c$ положителен¹. Если b и c пропорциональны, то $[b, c] = 0$. Это даёт однозначное геометрическое описание вектора $[b, c]$ в терминах векторов b, c , и показывает, что он не зависит от выбора ортонормального базиса, использованного для вычисления его координат в формуле (6-25). Иначе можно сказать, что вектор $[b, c] \in V$ является прообразом ковектора

$$\omega(*, b, c) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \omega(a, b, c),$$

где ω — стандартная форма ориентированного объёма на \mathbb{R}^3 , относительно задаваемого скалярным произведением изоморфизма между \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^{3*} из форм. (6-14) на стр. 95.

Пример 6.7 (высшие векторные произведения)

Конструкция из прим. 6.6 переносится в старшие размерности следующим образом. Сопоставим каждому упорядоченному набору из $(n - 1)$ векторов v_1, v_2, \dots, v_{n-1} в n -мерном ориентированном евклидовом пространстве V вектор $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$, длина которого равна евклидову объёму неориентированного $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_i , и буде этот объём ненулевой, направление вектора $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$ перпендикулярно гиперплоскости, порождённой векторами v_i , и таково, что базис

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}], v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$$

положительно ориентирован. Иначе говоря, вектор $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] \in V$ является прообразом при изоморфизме $g : V \simeq V^*$ из форм. (6-14) на стр. 95 от ковектора

$$\omega(*, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \omega(u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}),$$

где ω — ориентирующая форма объёма на V . Таким образом, в \mathbb{R}^4 имеются *тройные произведения* $[v_1, v_2, v_3]$, в \mathbb{R}^5 — *четверные произведения* $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ и т. д.

¹Т. е. направленный вдоль вектора $[b, c]$ бравчик *ввинчивается* при повороте от b к c по кратчайшей дуге.

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Запишем координаты векторов v_1, v_2, \dots, v_{n-1} по строкам матрицы A размера $(n-1) \times n$ и обозначим через A_i взятый со знаком $(-1)^i$ определитель $(n-1) \times (n-1)$ -подматрицы, дополнительной к i -тому столбцу, как в н° 5.4.3 на стр. 80. Покажите, что

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] = (A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (6-26)$$

и что векторное произведение $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ кососимметрично и линейно по каждому из аргументов.

6.5. Сферы. ГМТ x , удалённых от заданной точки p на заданное расстояние $r > 0$, называется сферой радиуса r с центром в p и обозначается

$$S(p, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\overline{px}, \overline{px}) = r^2\}. \quad (6-27)$$

ГМТ x , удалённых от заданной точки p не далее, чем на заданное расстояние $r > 0$, называется шаром радиуса r с центром в p и обозначается

$$B(p, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\overline{px}, \overline{px}) \leq r^2\}. \quad (6-28)$$

ПРИМЕР 6.8 (ОПИСАННАЯ СФЕРА СИМПЛЕКСА)

Если точки $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ не лежат в одной гиперплоскости, то через них проходит единственная сфера, называемая описанной сферой симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$. В самом деле, ГМТ x , равноудалённых от всех точек p_i , является пересечением n аффинных гиперплоскостей — срединных перпендикуляров к n отрезкам $[p_0, p_i]$ с $1 \leq i \leq n$. Это пересечение задаётся системой из n линейных неоднородных уравнений¹

$$(\overline{p_0 p_i}, x) = \frac{(p_i, p_i) - (p_0, p_0)}{2}$$

на n -мерный вектор x . Поскольку векторы $\overline{p_0 p_i}$ линейно независимы, левые части этих уравнений линейно независимы, и по предл. 5.3 на стр. 77 такая система имеет единственное решение s , которое и является центром описанной сферы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4

Пересечение сферы (соотв. шара) радиуса r с центром в p с аффинным подпространством Π , находящимся от точки p на расстоянии ϱ , пусто при $\varrho > r$, а при $\varrho \leq r$ представляет собою сферу (соотв. шар) радиуса $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ в подпространстве Π с центром в ортогональной проекции p_Π точки p на подпространство Π . При $\varrho = r$ эта сфера (соотв. шар) вырождается в одну точку p_Π .

Доказательство. Пересечение $S(p, r) \cap \Pi$ задаётся внутри Π уравнением, которое получается подстановкой $\overline{px} = \overline{p p_\Pi} + \overline{p_\Pi x}$ в уравнение сферы (6-27) и имеет вид $(\overline{p_\Pi x}, \overline{p_\Pi x}) = r^2 - \varrho^2$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Покажите, что сфера с диаметром $[a, b]$ представляет собою ГМТ, из которых отрезок $[a, b]$ виден под прямым углом, т. е.

$$S((a+b)/2, |a-b|/2) = \{x \mid (\overline{xa}, \overline{xb}) = 0\}.$$

¹См. формулу (6-9) на стр. 92.

6.5.1. Касательные. Аффинное подпространство Π , пересекающее сферу $S(p, r)$ ровно в одной точке $q \in S(p, r)$, называется *касательным* к сфере $S(p, r)$ в точке q . Наибольшее по включению из касательных подпространств к $S(p, r)$ в заданной точке $q \in S(p, r)$ это гиперплоскость, проходящая через точку q перпендикулярно вектору \overrightarrow{pq} . Она называется *касательной гиперплоскостью* к сфере $S(p, r)$ в точке $q \in S(p, r)$ и обозначается

$$T_q S(p, r) = \{x \mid (\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{qx}) = 0\} = \{x \mid (\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{px}) = r^2\} \quad (6-29)$$

(второе описание получается из первого подстановкой $\overrightarrow{qx} = \overrightarrow{px} - \overrightarrow{pq}$).

6.5.2. Степень точки относительно сферы. Число

$$\deg_{S(p,r)} q \stackrel{\text{def}}{=} |pq|^2 - r^2$$

называется *степенью* точки q относительно сферы $S(p, r)$. Обратите внимание, что

$$\deg_{S(p,r)} q < 0 \quad \text{при } q \in B(p, r) \setminus S(p, r),$$

$$\deg_{S(p,r)} q = 0 \quad \text{при } q \in S(p, r),$$

$$\deg_{S(p,r)} q > 0 \quad \text{при } q \notin B(p, r).$$

В последнем случае степень точки q относительно сферы $S(p, r)$ есть квадрат длины отрезка опущенной на сферу из точки q касательной прямой ℓ , заключённого между точкой q и точкой касания (см. рис. 6◊3).

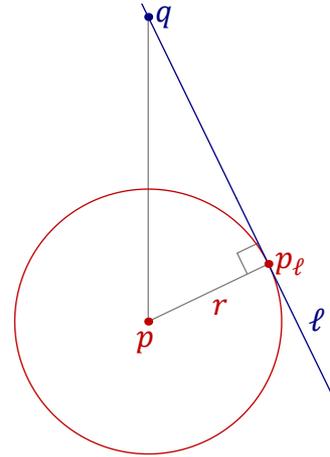


Рис. 6◊3.

Предложение 6.5

Пусть прямая ℓ проходит через точку q и пересекает сферу $S(p, r)$ в точках t_1 и t_2 или касается её в точке $t_1 = t_2$. Тогда $\deg_{S(p,r)} q = (\overrightarrow{qt_1}, \overrightarrow{qt_2}) = |qt_1| \cdot |qt_2|$ (см. рис. 6◊4).

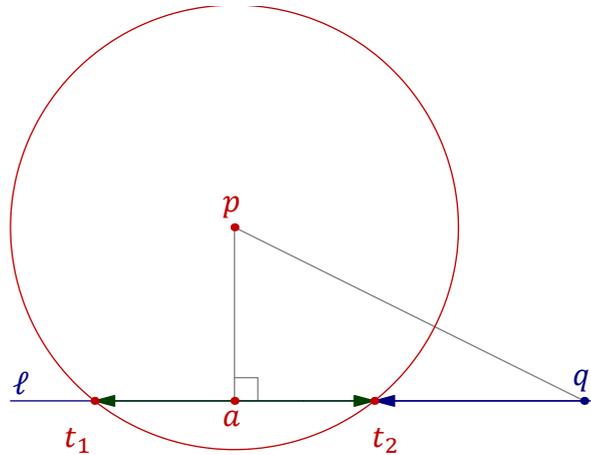


Рис. 6◊4. $\deg_{S(p,r)} q = |qt_1| \cdot |qt_2|$.

Доказательство. Обозначим через a ортогональную проекцию центра сферы p на прямую ℓ . Согласно предл. 6.4 $\overrightarrow{at_2} = -\overrightarrow{at_1}$. Поэтому $(\overrightarrow{qt_1}, \overrightarrow{qt_2}) = (|qa| + |at_1|) \cdot (|qa| - |at_1|) = |qa|^2 - |at_1|^2 = |pq|^2 - |pa|^2 - |at_1|^2 = |pq|^2 - |pt_1|^2 = \deg_{S(p,r)} q$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.11 (радикальная ось). Покажите, что ГМТ, имеющих равные степени относительно двух данных сфер $S(p_1, r_1)$ и $S(p_2, r_2)$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную линии центров (т. е. прямой (p_1, p_2)).

6.5.3. Поляры. Прямая (q, a) , проходящая через точку $q \in S(p, r)$ и произвольную точку $a \neq q$, касается сферы в точке q , если и только если $(\overline{pq}, \overline{qa}) = 0$. Подставляя в это равенство $\overline{qa} = \overline{pq} - \overline{pa}$, получаем равносильное равенство

$$(\overline{pq}, \overline{pa}) = r^2. \quad (6-30)$$

Это соотношение, рассматриваемое как линейное неоднородное уравнение на a при фиксированном $q \in S(p, r)$, задаёт касательную гиперплоскость $T_q S(p, r)$ из (6-29). Если же воспринимать (6-30) как уравнение на q при фиксированном $a \neq p$, то оно задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору \overline{pa} и пересекающую прямую (pa) в точке b с радиус вектором

$$\overline{pb} = r^2 \frac{\overline{pa}}{(\overline{pa}, \overline{pa})}$$

и удалённой от p на расстояние $r^2/|pa|$ в сторону точки a (см. рис. 6◊5). Эта гиперплоскость называется *полярной гиперплоскостью* (или *полярной*) точки a относительно сферы $S(p, r)$. В свою очередь, точка a называется *полюсом* этой гиперплоскости. Поляра точки $a \notin B(p, r)$ может быть описана как гиперплоскость, высекающая из сферы $S(p, r)$ её видимый из точки a контур¹ (см. рис. 6◊5). Точки, лежащие на сфере, характеризуются как точки, лежащие на своих полярах, а отличные от p точки внутри шара $B(p, r)$ — как точки, поляры которых не пересекают сферы.

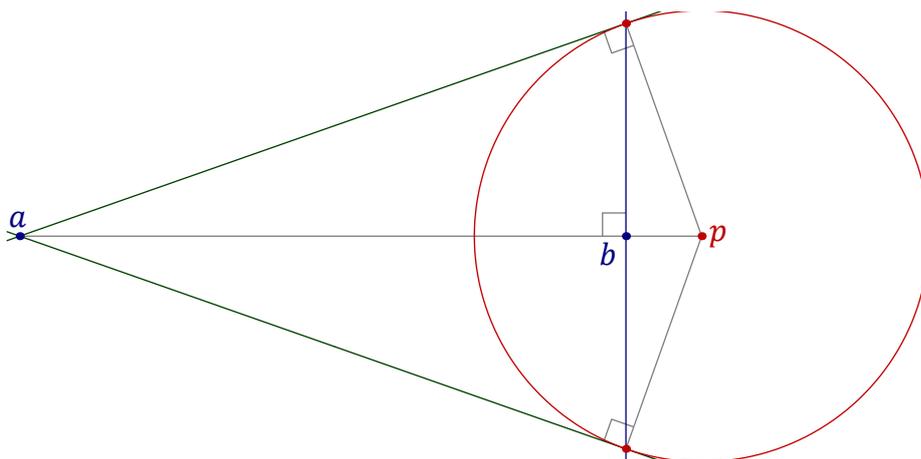


Рис. 6◊5. Полюс и поляр.

Предложение 6.6 (полярная двойственность)

Для любых точек x и y , отличных от центра сферы, точка x лежит на поляре точки y тогда и только тогда, когда точка y лежит на поляре точки x .

Доказательство. Оба условия записываются одним и тем же уравнением $(\overline{px}, \overline{py}) = r^2$. \square

Определение 6.3 (сопряжённые и инверсные точки)

Точки x и y называются *сопряжёнными* относительно сферы $S(p, r)$, если они удовлетворяющие условиям предл. 6.6, т. е. $(\overline{px}, \overline{py}) = r^2$. Сопряжённые точки a и b называются *инверсными*, если прямая (a, b) проходит через центр сферы p , т. е. $\overline{pb} = r^2 \overline{pa} / (\overline{pa}, \overline{pa})$.

¹Т. е. GMT касания со сферой всевозможных касательных, проходящих через точку a .

6.5.4. Инверсия. Отображение, переводящее каждую точку $a \neq p$ в инверсную ей точку

$$\sigma_{p,r} : \mathbb{R}^n \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus p, \quad a \mapsto p + \frac{r^2 \cdot \overline{pa}}{(\overline{pa}, \overline{pa})}, \quad (6-31)$$

называется *инверсией* относительно сферы $S(p, r)$. Инверсия является инволюцией¹ на множестве всех точек, отличных от p , и сфера $S(p, r)$ состоит в точности из неподвижных точек инверсии $\sigma_{p,r}$. Инверсия переводит в себя каждое аффинное подпространство Π , проходящее через центр сферы, и действует на нём как инверсия относительно сферы $\Pi \cap S(p, r)$.

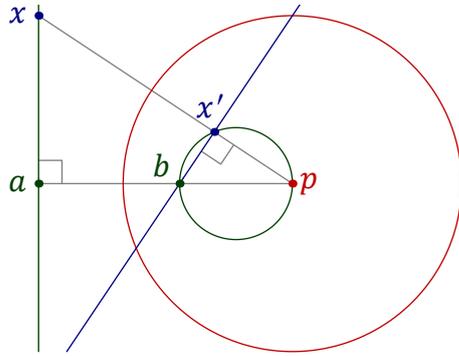


Рис. 6◊6. Сфера, инверсная плоскости.

В силу полярной двойственности каждая отличная от центра инверсии точка $b \neq p$ лежит на полярах всех сопряжённых с нею точек. Последние образуют гиперплоскость, проходящую через инверсную к b точку $a = \sigma_{p,r}(b)$ перпендикулярно вектору \overline{pa} . Поляра любой точки x из этой гиперплоскости проходит через инверсную к x точку $x' = \sigma_{p,r}(x)$ и точку b , как на рис. 6◊6. Таким образом, инверсия $\sigma_{p,r}$ переводит гиперплоскость, проходящую через точку a перпендикулярно вектору \overline{pa} , в ГМТ x' , из которых отрезок $[p, b]$ виден под прямым углом, т. е. в сферу с диаметром $[p, b]$. Поскольку инверсия обратна самой себе, то и наоборот, проходящая через точку p сфера с диаметром $[p, b]$ переходит в полярную точку b гиперплоскость, перпендикулярную вектору \overline{pb} и проходящую через точку $a = \sigma_{p,r}(b)$.

Каждая не проходящая через точку p сфера C переводится инверсией $\sigma_{p,r}$ в сферу, гомотетичную сфере C относительно p с коэффициентом r^2 / δ , где $\delta = \deg p$ это степень точки p относительно сферы C , см. рис. 6◊7. Действительно, если проходящая через p прямая пересекает S в точках x_1, x_2 , то $|px_1| \cdot |px_2| = \delta$ по предл. 6.5 на стр. 101, и для точек x'_1, x'_2 , гомотетичных точкам x_1, x_2 относительно p с коэффициентом r^2 / δ , выполняются равенства

$$\begin{aligned} |px_1| \cdot |px'_2| &= |px_1| \cdot |px_2| \cdot r^2 / \delta = r^2, \\ |px_2| \cdot |px'_1| &= |px_2| \cdot |px_1| \cdot r^2 / \delta = r^2, \end{aligned}$$

означающие, что $\sigma_{p,r}(x_1) = x'_2$, а $\sigma_{p,r}(x_2) = x'_1$. Обратите внимание, что порядок точек поменялся, и что центр сферы S не обязан переводиться инверсией $\sigma_{p,r}$ в центр сферы $\sigma_{p,r}(S)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Пусть радиусы r_1, r_2 двух сфер с центрами в точках c_1, c_2 связаны равенством $r_1^2 + r_2^2 = |c_1, c_2|^2$. Покажите, что при инверсии относительно любой из сфер вторая сфера переходит в себя, и найдите образ её центра.

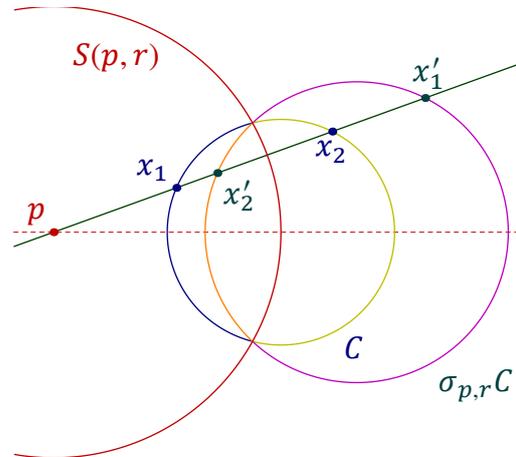


Рис. 6◊7. Инверсия $\sigma_{p,r}$ переводит сферу C в гомотетичную ей относительно точки p сферу.

¹Т. е. обратной самой себе биекцией.

Лемма 6.1

Для произвольных двух инверсий σ_1 и σ_2 относительно не проходящих через центры друг друга сфер $S_1 = S(c_1, r_1)$ и $S_2 = S(c_2, r_2)$ выполняется равенство $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_{\sigma_1(S_2)}$, означающее, что инверсия σ_1 переводит любую пару точек, инверсных относительно сферы S_2 , в пару точек, инверсных относительно сферы $\sigma_1(S_2)$ (ср. с упр. 3.23 на стр. 53).

Доказательство. Согласно сл. 3.8 на стр. 51 инверсность точек p, q относительно сферы S_2 означает, что все проходящие через p и q окружности и прямая (pq) пересекают сферу S_2 под прямым углом. Поскольку инверсия σ_1 биективно переводит эти окружности и прямую в прямую и окружности, проходящие через точки $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$, и сохраняет углы между окружностями и прямыми¹, все проходящие через $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$ окружности и прямая перпендикулярны сфере $\sigma_1(S_2)$, что означает инверсность точек $\sigma_1(p)$ и $\sigma_1(q)$ относительно сферы $\sigma_1(S_2)$. \square

Пример 6.9 (СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ)

Стереографическая проекция $s_z : S \setminus z \rightarrow E_z$ сферы $S = S(p, r)$ из лежащей на ней точки $z \in S(p, r)$ на экваториальную гиперплоскость E_z , перпендикулярную вектору \overline{zp} , совпадает с действием на сфере $S(p, r)$ инверсии $\sigma_{z, r\sqrt{2}}$ относительно сферы $S(z, r\sqrt{2})$ с центром в точке z , которая проходит через экватор $E_z \cap S(p, r)$ исходной сферы, как на рис. 6◊8. В частности, любая сфера $S' = H \cap S(p, r)$, высекаемая из сферы $S(p, r)$ произвольной не проходящей через z аффинной гиперплоскостью H , перейдет при стереографической проекции в гомотетичную сферу S' относительно точки z сферы.

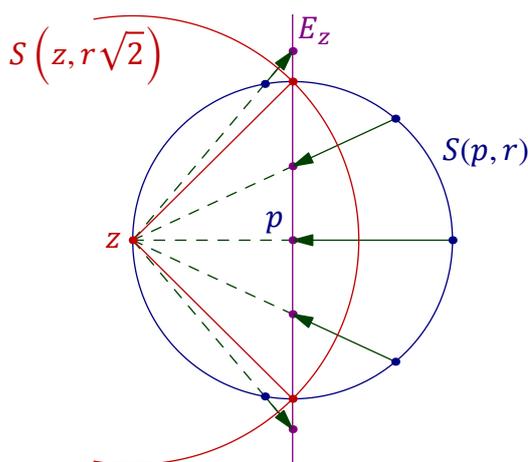


Рис. 6◊8. Стереографическая проекция $s_z : S(p, r) \setminus z \rightarrow E_z$ действует на сфере как инверсия $\sigma_{z, r\sqrt{2}}$.

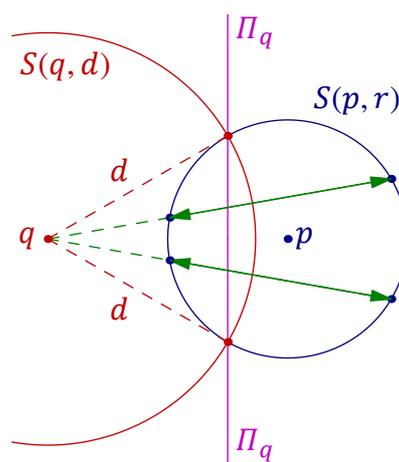


Рис. 6◊9. Инверсия сферы переставляет пары коллинеарных центру инверсии точек.

Пример 6.10 (ИНВЕРСИЯ НА СФЕРЕ)

Всякая точка q , лежащая снаружи от данной $(n-1)$ -мерной сферы $S = S(p, r) \subset \mathbb{R}^n$, определяет инволютивное² преобразование $\sigma_q : S \rightarrow S$, которое тождественно действует на точках пересечения $S \cap \Pi_q$ сферы S с полярной гиперплоскостью Π_q точки q и переводит каждую точку $x \in S \setminus \Pi_q$ во вторую, отличную от x точку пересечения сферы S с прямой (qx) , как на рис. 6◊9.

¹См. предл. 3.6 на стр. 51.

²Т. е. обратное самому себе.

Эта инволюция называется *инверсией* сферы S с центром в q , поскольку совпадает с ограничением на сферу S инверсии относительно сферы $S' = S(q, d)$ с центром в q и квадратом радиуса $d^2 = \deg_S p = |p, q|^2 - r^2$, равным степени точки q относительно сферы S . Сфера S' пересекает сферу S по той же $(n - 2)$ -мерной сфере, что и гиперплоскость Π_q , см. рис. 6◊9.

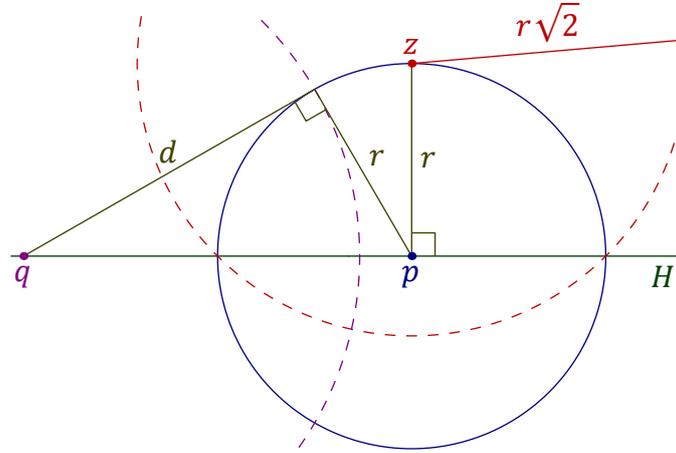


Рис. 6◊10. $(r\sqrt{2})^2 + d^2 = 2r^2 + |q, p|^2 - r^2 = |q, p|^2 + r^2 = |q, z|^2$.

Инверсия $\sigma_{q,d}$ относительно сферы S' переводит в себя каждую проходящую через точку q гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$, действуя в ней как инверсия относительно сферы $S' \cap H$. Если гиперплоскость H является экваториальной для сферы S , т. е. проходит через её центр p , то действия инверсий $\sigma_{q,d} : H \rightarrow H$ гиперплоскости H и $\sigma_q : S \rightarrow S$ сферы S переводятся одно в другое стереографической проекцией $s_z : S \setminus z \rightarrow H$ из каждой из двух точек $z \in S$ с $\overline{pz} \perp H$, как в предыдущем прим. 6.9. Действительно, проекция s_z является ограничением на сферу S инверсии $\sigma_{z,r\sqrt{2}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая переводит сферу $S' = S(q, d)$ в себя по упр. 6.12, т. к. сумма квадратов радиусов сфер $S(z, r\sqrt{2})$ и $S(q, d)$ равна квадрату расстояния между их центрами, см. рис. 6◊10. Поэтому согласно лем. 6.1 во всём пространстве \mathbb{R}^n выполнено равенство $\sigma_{z,r\sqrt{2}} \circ \sigma_{q,d} = \sigma_{q,d} \circ \sigma_{z,r\sqrt{2}}$.

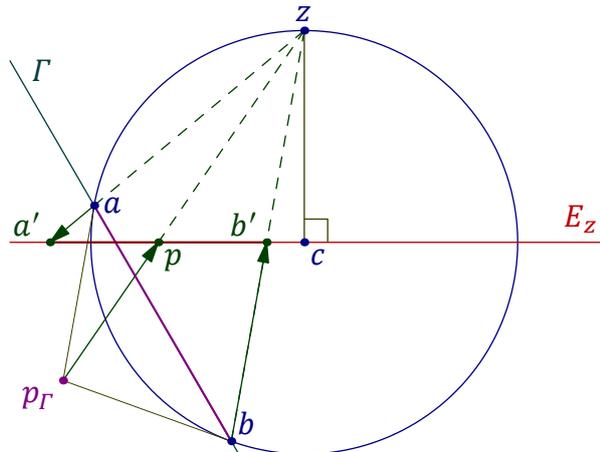


Рис. 6◊11. $|p, a'| = |p, b'|$ для $p = s_z(p_\Gamma)$, $a' = s_z(a)$, $b' = s_z(b)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Покажите, что проекция сферы $S(c, r)$ из точки $z \in S$ на перпендикулярную вектору \overline{zc} экваториальную гиперплоскость E_z переводит сферу, высекаемую из $S(c, r)$ не проходящей через c аффинной гиперплоскостью Γ , в сферу с центром в той точке гиперплоскости E_z , куда проектируется из z полюс p_Γ гиперплоскости Γ , см. рис. 6◊11.

§7. Группы ортогональных преобразований

Всюду в этом параграфе основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

7.1. Линейная ортогональная группа. Линейный эндоморфизм $F : V \rightarrow V$ евклидова векторного пространства V называется *ортогональным оператором* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов: $|Fv| = |v|$ для всех $v \in V$. Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины¹, каждый ортогональный оператор сохраняет и скалярные произведения: $(Fv, Fw) = (v, w)$ для всех $v, w \in V$. Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама². Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен ± 1 . В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства V подгруппу, которая обозначается $O(V) \subset GL(V)$ и называется *ортогональной группой* евклидова пространства V . Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы образуют подгруппу ортогональной группы. Она обозначается

$$SO(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) \cap SL(V) = \{F \in O(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной ортогональной группой* или группой *собственных* ортогональных операторов. Ортогональные операторы определителя -1 , меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

Пример 7.1 (центральная симметрия)

Оператор $-\text{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V . Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

Упражнение 7.1. Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами $\pm \text{Id}$.

Пример 7.2 (симметрии)

Как мы видели в н° 6.3.2 на стр. 96, с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Обозначим через $s_U : V \rightarrow V$ линейное отображение, тождественно действующее на U и умножающее все векторы из U^\perp на -1 , т. е. переводящее произвольный вектор $v = v_U + v_{U^\perp} \in U \oplus U^\perp = V$ в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^\perp} = v - 2v_{U^\perp}. \quad (7-1)$$

Так как $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2$, оператор s_U ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства U . При $U = 0$ получается центральная симметрия из предыдущего прим. 7.1. В общем случае оператор s_U собственный, если и только если коразмерность подпространства U в V чётна. Все операторы σ_U *инволютивны*, т. е.

$$\sigma_U^2 = \text{Id}_V.$$

¹См. формулу (6-5) на стр. 90.

²См. н° 6.2.1 на стр. 94.

7.1.1. Отражения в гиперплоскостях. Важнейшим специальным случаем симметрии является *отражение в гиперплоскости* $U = u^\perp$, перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору $u \in V$. Оно обозначается через σ_u и действует по формуле

$$\sigma_u(v) = v - 2 \frac{(u, v)}{(u, u)} \cdot u. \quad (7-2)$$

в которую превращается предыдущая формула (7-1) при $U^\perp = \mathbb{R} \cdot u$. Два отражения σ_u и σ_w совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы u и w пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$, переводятся друг в друга отражением σ_{a-b} относительно срединного перпендикуляра к отрезку $[a, b]$ в $A(V)$.

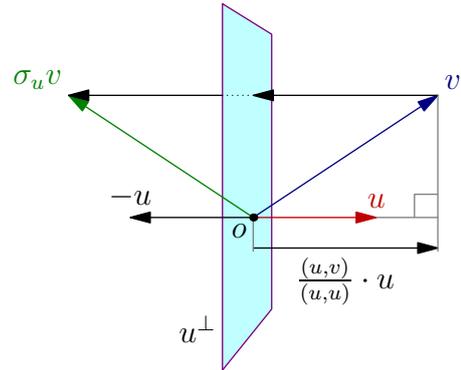


Рис. 7◊1. Отражение в гиперплоскости u^\perp .

ТЕОРЕМА 7.1

Любой ортогональный оператор на n -мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по n . Если $V = 0$ или $F = Id$, то доказывать нечего. Если есть вектор $v \neq F(v)$, обозначим через σ отражение, переводящее $F(v)$ в v . Тогда $F = \sigma \circ G$, где $G = \sigma \circ F$ оставляет вектор v на месте, а значит, переводит в себя $(n - 1)$ -мерное подпространство v^\perp . По индукции, ограничение G на v^\perp является композицией не более $(n - 1)$ отражений σ_{w_i} в $(n - 2)$ -мерных гиперплоскостях w_i^\perp внутри подпространства v^\perp . Каждое из этих отражений является ограничением на v^\perp отражения $\sigma_{w_i} : V \rightarrow V$ в $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости $w_i^\perp \subset V$, содержащей вектор v . Так как вектор v неподвижен при всех этих отражениях, G является их композицией. Поэтому $F = \sigma \circ G$ это композиция не более n отражений. □

Следствие 7.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях. □

Пример 7.3 (изометрии евклидовой плоскости)

Согласно *сл. 7.1* каждый несобственный ортогональный оператор на двумерном евклидовом векторном пространстве является отражением относительно прямой, а каждый собственный ортогональный оператор, отличный от тождественного, является композицией $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ двух отражений относительно прямых u_2^\perp и u_1^\perp , ортогональных каким-либо двум непропорциональным векторам u_1 и u_2 . Эти два вектора образуют базис, и каждый из них под действием преобразования $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ поворачивается в направлении от u_1 к u_2 на удвоенный угол между векторами u_1 и u_2 (см. *рис. 7◊2*). Тем самым, это преобразование является поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$, а значит, специальная ортогональная группа двумерного

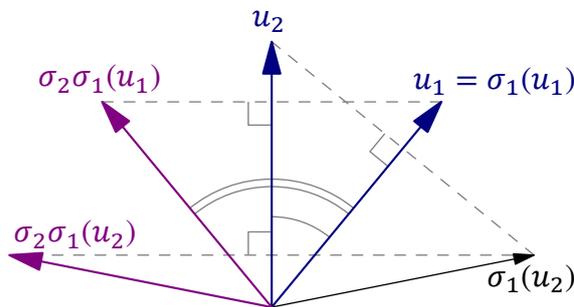


Рис. 7◊2. Композиция отражений.

является поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$, а значит, специальная ортогональная группа двумерного

пространства исчерпывается поворотами, что согласуется с результатами н° 3.4.2 на стр. 43. Поворот ϱ_φ на угол φ против часовой стрелки имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе матрицу

$$\varrho_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

ПРИМЕР 7.4 (СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Как и на плоскости, всякий нетождественный собственный ортогональный оператор F в трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ двух отражений в плоскостях u_2^\perp , u_1^\perp , перпендикулярных некоторым непропорциональным векторам u_2 и u_1 . Обозначим через U плоскость, порождённую этими векторами. Оператор F тождественно действует на перпендикулярной к ней прямой $U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$, порождённой векторным произведением¹ $[u_1, u_2]$. Следовательно, F переводит ортогональную этой прямой плоскость U в себя и согласно предыдущему прим. 7.3 действует в ней поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $[u_1, u_2]$. Таким образом, собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как *теорема Эйлера*.

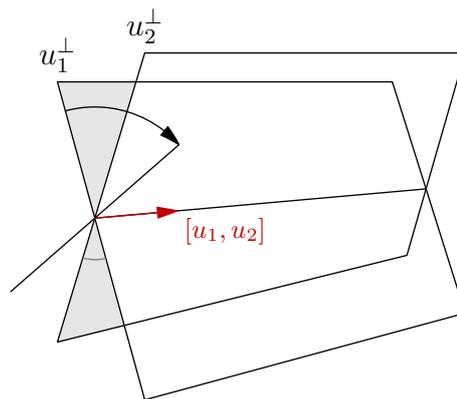


Рис. 7◊3. Поворот.

ЛЕММА 7.1

Для любого линейного эндоморфизма $F : V \rightarrow V$ конечномерного векторного пространства над полем \mathbb{R} найдётся такое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится отображением F в себя.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n + 1$ векторов v, Fv, F^2v, \dots, F^nv , где $n = \dim V$ и $F^k v$ обозначает результат k -кратного последовательного применения оператора F к вектору v . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(F^k + a_1 F^{k-1} + \dots + a_{k-1} F + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор можно воспринимать как результат подстановки $t = F$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Всякий такой многочлен раскладывается в произведение $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение F и применяя полученный оператор к вектору v , мы заключаем, что

$$g_1(F) \circ g_2(F) \circ \dots \circ g_m(F)v = 0.$$

Рассмотрим наименьшее k , для которого вектор $w = g_{k+1}(F) \circ \dots \circ g_m(F)v$ всё ещё отличен от нуля. Тогда $g_k(F)w = 0$. Для $g_k(F) = F - \alpha$ это значит, что $F(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot w$ переводится оператором F в себя. Для $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$ имеем $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$, т. е. линейная оболочка векторов w и $F(w)$ переводится оператором F в себя. \square

¹См. прим. 6.6 на стр. 98.

ПРИМЕР 7.5 (несобственные изометрии трёхмерного пространства)

Согласно лем. 7.1 всякая несобственная изометрия F трёхмерного пространства переводит в себя некоторую прямую или плоскость, а значит и ортогональное дополнение к ней, т. е. в любом случае $V = L \oplus U$, где L и U ортогональны, $\dim L = 1$, $\dim U = 2$ и F переводит оба подпространства в себя. Если F тождественно действует на L , то на U он действует несобственно, т. е. отражением относительно прямой. Тем самым, F является отражением в плоскости, натянутой на L и эту прямую. Если $F|_L = -\text{Id}_L$, то F действует на U собственно, т. е. поворотом. Мы заключаем, что всякая несобственная линейная изометрия трёхмерного векторного пространства является либо отражением в плоскости, либо композицией поворота и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота.

ТЕОРЕМА 7.2

Для любого ортогонального оператора F на конечномерном евклидовом векторном пространстве V существует такое разложение $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ в прямую сумму попарно ортогональных друг другу одномерных и двумерных подпространств, что оператор F переводит все эти подпространства в себя и на двумерных действует поворотами¹, а на одномерных — как $\mp \text{Id}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как $-\text{Id}$, можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на угол π . Точно также любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как Id , можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на нулевой угол. После того, как будут проделаны все эти объединения, одномерных подпространств U_i в теор. 7.2 останется не более двух. Оператор F является собственным, если и только если одномерных пространств останется не более одного, и буде оно есть, F действует на нём тождественно. Оператор F является несобственным тогда и только тогда, когда останется одно или два одномерных пространства, причём ровно на одном из них F действует как $-\text{Id}$.

Доказательство теор. 7.2. Индукция по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были рассмотрены выше в упр. 7.1 и прим. 7.3. Пусть $\dim V \geq 3$. Согласно лем. 7.1 оператор $F : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, F переводит в себя и ортогонал U^\perp к подпространству U . Ограничения F на U и на U^\perp являются ортогональными операторами в этих меньших подпространствах. По индукции, F имеет на каждом из них требуемые разложения. Складывая эти разложения вместе, получаем нужное разложение для $V = U \oplus U^\perp$. \square

7.1.2. Инвариантная характеристика углов поворотов. Для произвольного линейного эндоморфизма $F : V \rightarrow V$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ разность между гомотетией с коэффициентом t и отображением F также является линейным эндоморфизмом векторного пространства V :

$$t \text{Id} - F : V \rightarrow V, \quad v \mapsto tv - F(v).$$

Его определитель, рассматриваемый как функция от t , это многочлен с зависящими от F коэффициентами. Он называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается

$$\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t \text{Id} - F) \in \mathbb{R}[t].$$

¹Углы которых могут быть разными в разных подпространствах U_i .

Чтобы выписать его явно, следует составить матрицу F_e отображения F в каком-нибудь базисе e пространства V и вычислить определитель матрицы $tE - F_e$:

$$\chi_F(t) = \det(t \text{Id} - F) = \det(tE - F_e).$$

Например, характеристический многочлен оператора гомотетии $F = \lambda \text{Id}$ с коэффициентом λ на n -мерном пространстве равен

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda \text{Id}}(t) = \det(t \text{Id} - \lambda \text{Id}) &= \det \left(\begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} t - \lambda & & & 0 \\ & t - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t - \lambda \end{pmatrix} = (t - \lambda)^n \end{aligned}$$

А характеристический многочлен оператора поворота (7-3) евклидовой плоскости на угол φ против часовой стрелки равен

$$\begin{aligned} \chi_{\varrho_\varphi}(t) = \det(t \text{Id} - \varrho_\varphi) &= \det \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} t - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & t - \cos \varphi \end{pmatrix} = t^2 - 2t \cos \varphi + 1. \end{aligned}$$

Из теор. 7.2 вытекает, что характеристический многочлен любой линейной изометрии F евклидова пространства V является произведением квадратных трёхчленов вида

$$\chi_{\varrho_\varphi}(t) = t^2 - 2t \cos \varphi + 1, \quad \text{где } 0 < \varphi < \pi, \quad (7-4)$$

и линейных двучленов вида $t \pm 1$. В самом деле, в базисе пространства V , полученным объединением каких-нибудь ортонормальных базисов пространств U_i из теор. 7.2, ненулевые элементы матрицы оператора $tE - F$ сосредоточатся внутри расположенных на главной диагонали блоков размера 2×2 и 1×1 вида

$$\begin{pmatrix} t - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & t - \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (t - 1), \quad (t + 1).$$

Определитель такой матрицы равен произведению определителей блоков, т. е. трёхчленов (7-4) и двучленов $t \pm 1$. Таким образом, все корни характеристического многочлена $\chi_F(t)$ в поле \mathbb{C} имеют вид $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$ и ± 1 , и каждой паре невещественных комплексно сопряжённых корней $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$ биективно соответствует двумерное подпространство U_i из теор. 7.2, где F действует поворотом на угол φ_i , а каждому корню ± 1 — одномерное подпространство, где F действует, соответственно, как $\pm \text{Id}$. В частности, в теор. 7.2 неупорядоченный набор углов поворотов в двумерных подпространствах U_i , а также количества одномерных подпространств U_i , на которых оператор F действует как $\pm \text{Id}$, не зависят от выбора разложения, удовлетворяющего условиям теоремы, и однозначно задаются корнями характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(t \text{Id} - F)$. По этой причине ортогональное разложение из теор. 7.2 называется *каноническим разложением* евклидовой изометрии.

7.2. Группы отражений. Конечная группа G линейных изометрий евклидова пространства V называется *группой отражений*, если она порождается отражениями в гиперплоскостях, т. е. имеется такой набор попарно непропорциональных векторов $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$, что всякое преобразование $g \in G$ раскладывается в композицию отражений $\sigma_i = \sigma_{u_i}$ в гиперплоскостях u_i^\perp . Отметим, что для непропорциональных векторов u_i, u_j композиция $\sigma_j \sigma_i$ тождественно действует на $(n-2)$ -мерном пространстве $u_i^\perp \cap u_j^\perp$, а в ортогональной ему двумерной плоскости, порождённой векторами u_i, u_j , она действует как поворот на угол $2\angle(u_i, u_j)$, т. е. группа G , не смотря на название, состоит не только из отражений. Она лишь порождается ими.

ЛЕММА 7.2

Для любой изометрии $F : V \rightarrow V$ и ненулевого вектора $u \in V$ выполняется равенство

$$F \circ \sigma_u = \sigma_{F(u)} \circ F. \quad (7-5)$$

Доказательство. Геометрически очевидно, что всякая изометрия F переводит симметричные относительно гиперплоскости u^\perp векторы v, w , в векторы $F(v), F(w)$, симметричные относительно гиперплоскости $F(u)^\perp$. Формально, применяя F к обеим частям равенства

$$w = v - 2 \frac{(v, u)}{(u, u)} \cdot u,$$

получаем $F(w) = F(v) - 2(F(v), F(u)) \cdot F(u) / (F(u), F(u))$. \square

СЛЕДСТВИЕ 7.2

Объединение всех зеркал любой группы отражений G переводится в себя каждым преобразованием из группы G .

Доказательство. Пусть гиперплоскость e^\perp является зеркалом отражения σ_e из группы G . Для любого преобразования $g \in G$ гиперплоскость $g(e^\perp) = g(e)^\perp$ является в силу равенства (7-5) зеркалом отражения

$$\sigma_{g(e)} = g \sigma_e g^{-1} \quad (7-6)$$

также принадлежащего группе G . \square

ПРИМЕР 7.6 (группы диэдров)

Группа отражений двумерного евклидова векторного пространства однозначно с точностью до изоморфизма определяется числом m имеющихся в ней отражений. В самом деле, зеркала этих отражений разбивают плоскость на $2m$ углов, как на рис. 7♦4 на стр. 112. Выберем наименьший из них, пометим его буквой e , назовём его стороны ℓ_1, ℓ_2 , и обозначим отражения в них через $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}, \sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$. Поскольку отражения группы G переводят зеркала в зеркала, все m зеркал группы G получаются последовательными отражениями зеркал ℓ_1 и ℓ_2 друг относительно друга, а углы между ними — последовательными отражениями угла e относительно его сторон по часовой стрелке или против часовой стрелки, т. е. будут согласно формуле (7-6) иметь вид

$$\begin{array}{ll} \sigma_2(e) & \sigma_1(e) \\ \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}(\sigma_1(e)) = \sigma_1 \sigma_2(e) & \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}(\sigma_1(e)) = \sigma_2 \sigma_1(e) \\ \sigma_{\sigma_1 \sigma_2(\ell_1)}(\sigma_1 \sigma_2(e)) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e) & \sigma_{\sigma_2 \sigma_1(\ell_2)}(\sigma_2 \sigma_1(e)) = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e) \\ \sigma_{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(\ell_1)}(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e)) = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e) & \sigma_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(\ell_2)}(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e)) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Надпишем каждый из углов тем преобразованием из правой части предыдущих равенств, которым он получается из угла e , как на рис. 7◊4. В результате каждый угол будет надписан словом вида $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots$ и словом вида $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots$, отвечающими двум обходам вокруг нуля, приводящим из начального угла в рассматриваемый угол. Поскольку движение плоскости однозначно определяется своим действием на угол e , мы заключаем, что группа G порождается двумя отражениями, каждый её элемент может быть записан в виде $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots$ или в виде $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots$, и для всех $0 \leq k \leq 2m$ выполняются равенства

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots}_k = g = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots}_{2n-k}, \quad (7-7)$$

эквивалентные равенству $(\sigma_2\sigma_1)^m = \text{Id}$, вытекающему из того, что композиция отражений $\sigma_2\sigma_1$ является поворотом на угол $2\pi/m$. Из рис. 7◊4 и рис. 7◊5 очевидно, что группа G совпадает с группой симметрий правильного m -угольника и состоит из m отражений и m поворотов на углы $2\pi k/m$. Эту группу традиционно обозначают D_m и называют m -той диэдральной группой. Обратите внимание, что при нечётном m все оси симметрии геометрически одинаковы и составляют одну орбиту группы D_m , тогда как при чётном m орбиты прямых ℓ_1 и ℓ_2 различны и образуют два геометрически разных набора осей: одни проходят через противоположные вершины многоугольника, а другие — через середины противоположных рёбер (см. рис. 7◊5).

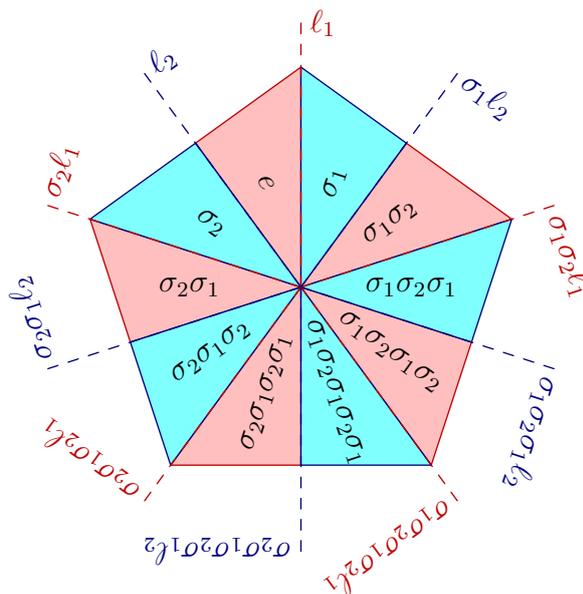


Рис. 7◊4. Группа диэдра.

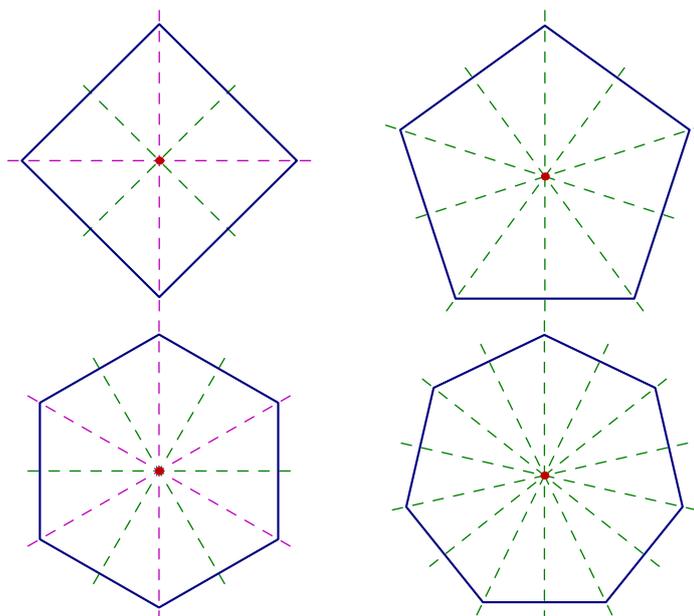


Рис. 7◊5. Оси правильных многоугольников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1 (ГРУППА ФИГУРЫ)

Пусть V — евклидово векторное пространство, и $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ какая-либо фигура в его аффинизации. Группа биективных отображений $\Phi \simeq \Phi$, которые можно получить, ограничивая на фигуру Φ всевозможные линейные изометрии $V \simeq V$, переводящие Φ в себя, называется (полной) группой фигуры Φ и обозначается O_Φ . Её подгруппа $SO_\Phi \subset O_\Phi$, состоящая из биекций $\Phi \simeq \Phi$, задаваемых собственными¹ изометриями пространства V , называется собственной группой фигуры Φ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Убедитесь, что полная и собственная группы любой фигуры действительно являются группами преобразований этой фигуры в смысле определения на стр. 5, и что они совпадают друг с другом, если фигура Φ содержится в некоторой гиперплоскости $W \subset V$.

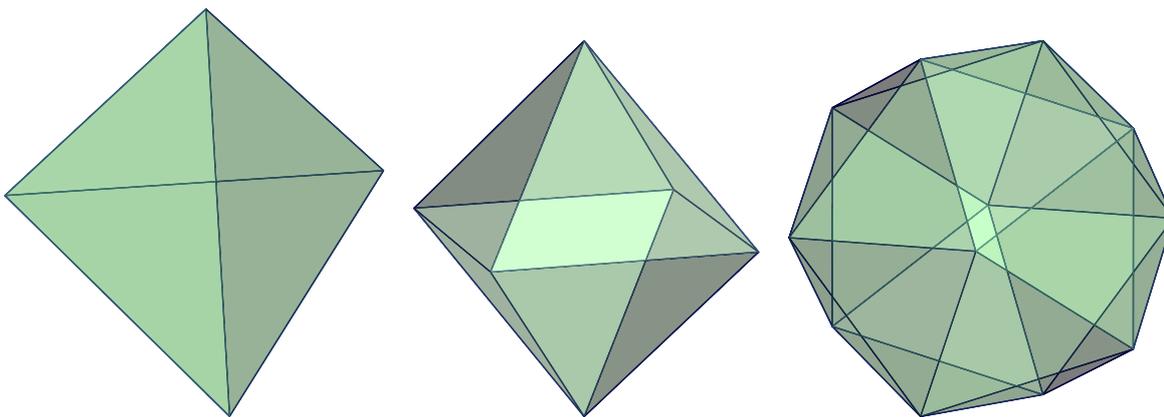


Рис. 7◊6. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

ПРИМЕР 7.7 (ГРУППЫ ТЕТРАЭДРА, ОКТАЭДРА И ИКОСАЭДРА)

Обозначим через M платоново тело с треугольными гранями, т. е. правильный тетраэдр, октаэдр или икосаэдр (см. рис. 7◊6). Плоскости симметрии многогранника M задают барицентрическое разбиение каждой из граней M на 6 треугольников с вершинами в вершине M , середине примыкающего к этой вершине ребра и центре примыкающей к этому ребру грани (см. рис. 7◊7). Все эти треугольники конгруэнтны друг другу и сходятся по $2m_1 = 6$ штук в центрах граней M , по $2m_2 = 4$ штуки в серединах сторон M и по $2m_3$ штук в вершинах M , где числа m_i , а также число γ граней u M и общее число треугольников $N = 6\gamma$ представлены в таблице²

M	m_1	m_2	m_3	γ	$N = 6\gamma$
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120

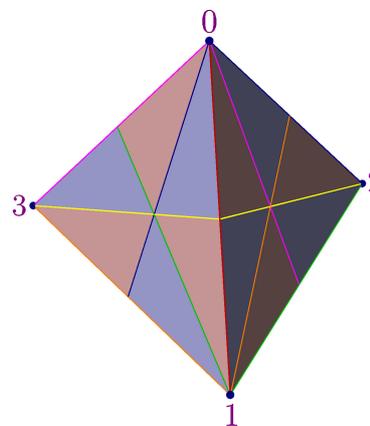


Рис. 7◊7. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

¹Т. е. сохраняющими ориентацию.

²Обратите внимание, что помещённый в пространство n -угольный диэдр из прим. 7.6, тоже можно было бы включить в этот список со значениями $m_1 = n$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $\gamma = 2$ и $N = 4n$, если условиться, что плоский диэдр имеет 2 двумерных грани: «верхнюю» и «нижнюю».

Пометим трёхгранный угол с вершиной в нуле, опирающийся на один из N треугольников, буквой e , назовём высекающие его плоскости симметрии буквами π_1, π_2, π_3 так, чтобы для всех циклических перестановок i, j, k множества индексов 1, 2, 3 двугранный угол между плоскостями π_i и π_j равнялся π/m_k , и обозначим через σ_i отражение в плоскости π_i . Поскольку каждое преобразование из группы O_M однозначно определяется своим действием на трёхгранный угол e , для каждого из N трёхгранных углов существует ровно одно преобразование $g \in O_M$, переводящее угол e в рассматриваемый угол. Пометим каждый угол тем преобразованием $g \in O_M$, которое переводит в него наш начальный угол e . Таким образом, каждое преобразование $h \in O_M$ переводит угол g в угол hg . На рис. 7♦8 изображена стереографическая проекция картинка, которую 24 трёхгранных угла барицентрического разбиения тетраэдра с рис. 7♦7 высекают на описанной около этого тетраэдра сфере. На каждом сферическом треугольнике написана композиция отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящая треугольник e в этот треугольник.

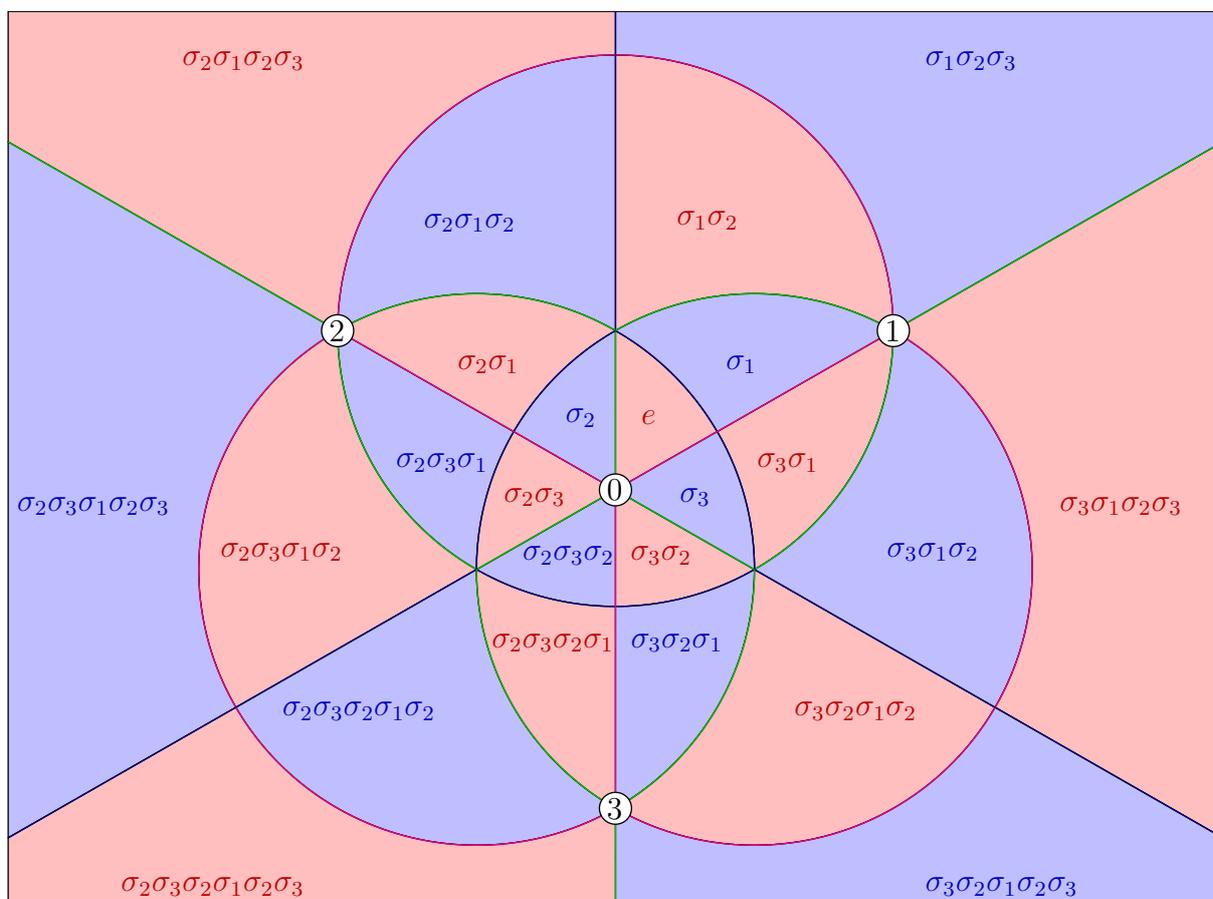


Рис. 7♦8. Триангуляция сферы плоскостями симметрии правильного тетраэдра $[0, 1, 2, 3]$ в стереографической проекции из диаметрально противоположной к вершине $[0]$ точки сферы на плоскость, параллельную грани $[1, 2, 3]$.

Чтобы написать такую композицию, приводящую из треугольника e в заданный треугольник g , выберем внутри трёхгранных углов g и e векторы u и w одинаковой длины так, чтобы натянутая на них плоскость Π_{uw} не содержала линий пересечения плоскостей симметрии многогранника M . Пройдём из u в w по дуге окружности, высекаемой плоскостью Π_{uw} на описанной

вокруг многогранника M сфере. Пусть мы при этом последовательно побываем в трёхгранных углах $e = g_1, g_2, g_3, \dots, g_m, g_{m+1} = g$, и при проходе из i -го угла в $(i + 1)$ -й пересечём плоскость $g_i(\pi_{v_i}), v_i \in \{1, 2, 3\}$, которая является образом грани π_{v_i} начального трёхгранного угла e при отображении g , переводящем угол e в угол g . Тогда по форм. (7-6) на стр. 111

$$\begin{aligned} g_2 &= \sigma_{v_1} e \\ g_3 &= \sigma_{g_2(\pi_{v_2})} g_2 = (g_2 \sigma_{v_2} g_2^{-1}) g_2 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} e \\ g_4 &= \sigma_{g_3(\pi_{v_3})} g_3 = (g_3 \sigma_{v_3} g_3^{-1}) g_3 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \sigma_{v_3} e \\ &\dots \\ g &= \sigma_{g_m(\pi_{v_m})} g_m = (g_m \sigma_{v_m} g_m^{-1}) g_m = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m} e. \end{aligned}$$

Тем самым, если пометить соответственные грани всех N трёхгранных углов цифрами 1, 2, 3 так, чтобы в угле g грань, высекаемая плоскостью $g(\pi_i)$, получила метку « i », то последовательность v_1, v_2, \dots, v_m индексов $v_i \in \{1, 2, 3\}$ в представлении

$$g = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m} \tag{7-8}$$

будет состоять из выписанных слева направо по порядку номеров граней, которые придётся последовательно пересечь при движении из e в g по дуге uw (на рис. 7◊8 грани 1, 2, 3 изображены синим, зелёным и лиловым цветами соответственно). Из сказанного вытекает, что группа O_M является группой отражений, и более того, она порождается всего тремя отражениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в гранях одного трёхгранного угла, опирающегося на какой-нибудь из N треугольников барицентрического разбиения треугольной грани многогранника M . Такие отражения называются *простыми*.

Обратите внимание, что разложение (7-8) элементов $g \in O_M$ в композиции простых отражений не единственно и зависит от выбора векторов u и w внутри трёхгранных углов. При изменении любого из этих векторов последовательность v_1, v_2, \dots, v_m номеров зеркал, пересекаемых по дороге от u и w , не меняется, пока натянутая на эти векторы плоскость Π_{uw} не столкнётся с линией пересечения зеркал. При пересечении таких линий, последовательность v_1, v_2, \dots, v_m меняется так, как показано на рис. 7◊9, где изображена центральная проекция происходящего из нуля на какую-нибудь аффинную плоскость, трансверсально пересекающую все рассматриваемые зеркала (при этом линии пересечения зеркал изображаются точками, а сами зеркала — прямыми).

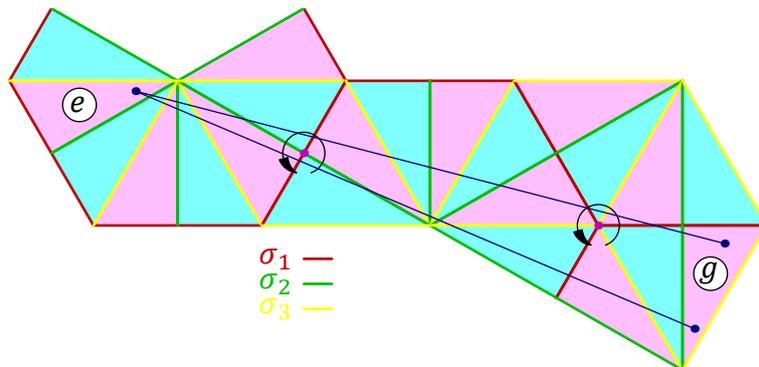


Рис. 7◊9. $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 = g = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2$.

Разложения, отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 7◊9 отличаются друг от друга тем, что линии пересечения зеркал обходятся в противоположных направлениях. Композиции возникающих при этом отражений удовлетворяют циклическим соотношениям $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ и $\sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3$ того же самого вида, что соотношения (7-7) в группе диэдра.

В общем случае, при проходе через ось, по которой пересекаются m_i зеркал, являющихся образами плоскостей π_j и π_k , фрагмент вида $\sigma_j\sigma_k\sigma_j \dots$ в разложении (7-8) заменяется равным ему фрагментом вида $\sigma_k\sigma_j\sigma_k \dots$ согласно соотношению $(\sigma_j\sigma_k)^{m_i} = \text{Id}$, вытекающему из того, что композиция отражений в двух соседних плоскостях является поворотом на угол $2\pi / m_i$. В действительности, наши рассуждения показывают, что группа O_M изоморфна фактору свободной группы с образующими $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по наименьшей нормальной подгруппе¹ содержащей слова σ_i^2 и $(\sigma_i\sigma_j)^{m_k}$ для всех $i = 1, 2, 3$ и всех циклических перестановок (i, j, k) набора $(1, 2, 3)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3. Докажите, что группа тетраэдра изоморфна симметрической группе S_4 .

ПРИМЕР 7.8 (СИСТЕМА ЗЕРКАЛ A_n)

Обозначим через V_n гиперплоскость $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0$ в координатном пространстве² \mathbb{R}^{n+1} , а через $\sigma_{ij} = \sigma_{e_i - e_j} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — отражение в гиперплоскости, ортогональной вектору $e_i - e_j \in V_n$. Это отражение осуществляет транспозицию базисных векторов e_i и e_j , оставляя все остальные базисные векторы на месте. Таким образом, группа, порождённая отражениями σ_{ij} , совпадает с симметрической группой S_{n+1} всевозможных перестановок стандартных базисных векторов пространства \mathbb{R}^{n+1} . Поскольку все такие перестановки оставляют на месте вектор $e = e_0 + e_1 + \dots + e_n$, они переводят в себя подпространство $V_n = e^\perp$, действуя на нём перестановками вершин правильного n -мерного симплекса $\Delta \subset V_n$ с центром в нуле и вершинами в ортогональных проекциях векторов e_i , которые мы для простоты будем обозначать просто числами $0, 1, \dots, n$. Таким образом, группа S_{n+1} оказывается изоморфной группе правильного n -мерного симплекса. Обозначим через $[i_0, i_1, \dots, i_k] \subset \Delta$ выпуклую оболочку вершин i_0, i_1, \dots, i_k . Это правильный k -мерный симплекс, представляющий собою грань симплекса Δ , и все грани у Δ имеют такой вид. Также обозначим через $\pi_{ij} = V_n \cap (e_i - e_j)^\perp$ зеркало ограничения отражения σ_{ij} на V_n . Конфигурация из $n(n+1)/2$ зеркал π_{ij} называется *конфигурацией типа A_n* . Каждое зеркало π_{ij} проходит через середину ребра $[i, j]$ и содержит противоположную этому ребру $(n-2)$ -мерную грань с вершинами в точках $\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4. Убедитесь, что все плоскости π_{ij} и π_{km} с $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ ортогональны, а плоскости π_{ij} и π_{jk} с различными i, j, k пересекаются под углом $\pi/3$.

Гиперплоскости π_{ij} осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса Δ на $n!$ меньших симплексов с вершинами в центрах граней симплекса Δ , совершенно аналогичное тому, что мы видели на рис. 7◊7 на стр. 113. Обозначим через $\langle i_0 i_1 \dots i_m \rangle$ центр m -мерной грани с вершинами в i_0, i_1, \dots, i_m и сопоставим каждой перестановке $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$ симплекс барицентрического разбиения с вершинами в точках³

$$[\langle g_0 \rangle, \langle g_0, g_1 \rangle, \langle g_0, g_1, g_2 \rangle, \dots, \langle g_0, g_1, \dots, g_{n-1} \rangle, \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle]. \quad (7-9)$$

¹Точный смысл этих слов и доказательство даются в курсе алгебры, см., например, <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf>

²Обратите внимание, что координаты нумеруются с нуля.

³Первая вершина находится в вершине g_0 самого симплекса Δ , вторая — в середине выходящего из g_0 ребра $[g_0, g_1]$, третья — в центре примыкающей к этому ребру треугольной грани $[g_0, g_1, g_2]$ и т. д. Последняя вершина является центром всего симплекса Δ .

Таким образом возникает биекция между симплексами барицентрического разбиения и элементами группы $S_{n+1} \simeq O_\Delta$. Как и в предыдущем примере, пометим буквой e «начальный» симплекс

$$[\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle], \quad (7-10)$$

отвечающий тождественной перестановке, а симплекс (7-9), получающийся из начального преобразованием $g \in O_\Delta$, задаваемым перестановкой g , пометим преобразованием g . Обозначим через $\pi_i = \pi_{i-1, i}$ с $1 \leq i \leq n$ проходящие через нуль $(n-1)$ -мерные грани начального симплекса (7-10). Они образуют n -гранный угол, и отражениям в его гранях отвечают в группе S_n транспозиции соседних элементов $\sigma_i = (i-1, i)$. Как и в предыдущем примере, они называются *простыми отражениями*. Легко видеть, что транспозиции σ_i порождают всю симметрическую группу. Согласно [упр. 7.4](#) они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_i^2 = (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = e \quad \text{и} \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при} \quad |i-j| \geq 2. \quad (7-11)$$

Циклическое соотношение $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = e$ чаще записывают в виде

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

и называют *соотношением треугольника*, поскольку простейшим его проявлением является соотношение между отражениями в медианах правильного треугольника. Геометрически убедиться в том, что простые отражения порождают группу O_Δ , а заодно указать практический способ представления произвольного элемента $g \in O_\Delta$ в виде

$$g = \sigma_{\nu_1} \sigma_{\nu_2} \dots \sigma_{\nu_m}, \quad \text{где} \quad \text{все} \quad \nu_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7-12)$$

можно тем же способом, что и в предыдущем примере. А именно, занумеруем грани каждого n -гранного угла g числами от 1 до n так, чтобы грань, высекаемая гиперплоскостью $g(\pi_i)$ получила номер « i ». Выберем внутри n -гранных углов e и g такие векторы u и w , что натянутая на них плоскость P_{uw} не пересекается ни с одним из $(n-2)$ -мерных попарных пересечений зеркал конфигурации A_n .

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Убедитесь, что такой выбор возможен.

Пройдём из u в w по кратчайшей из двух дуг окружности, высекаемой плоскостью P_{uw} из описанной сферы симплекса D , и запишем подряд (в порядке поступления) номера $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ тех зеркал, которые будем пересекать. Тогда для полученной последовательности номеров будет справедлива формула (7-12).

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Убедитесь в этом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2 (ПОЛУПРОСТРАНСТВА)

Для ненулевого вектора $a \in V$ положим $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, a) > 0\}$, $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, a) < 0\}$ и назовём эти множества *положительным* и *отрицательным открытыми полупространствами* относительно a . Также положим $a^{\geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} a^+ \sqcup a^\perp$ и $a^{\leq 0} \stackrel{\text{def}}{=} a^- \sqcup a^\perp$ и назовём их *замкнутыми полупространствами* (положительным и отрицательным). Отметьте, что $(-a)^+ = a^-$ и $(-a)^{\geq 0} = a^{\leq 0}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Убедитесь, что $V = a^- \sqcup a^\perp \sqcup a^+$ и что следующие условия на векторы $u, w \in V$ равносильны друг другу: а) u и w лежат в одном открытом полупространстве б) весь

отрезок $[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu > 0 \text{ \& } \lambda + \mu = 1\}$ лежат в одном открытом полупространстве в) $[u, v] \cap a^\perp = \emptyset$. В частности принадлежность одной открытой гиперплоскости является отношением эквивалентности на множестве векторов, не лежащих в гиперплоскости a^\perp .

7.3. Системы корней и камеры Вейля. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве V действует конечная группа отражений G . Запишем зеркала всех различных отражений из G в виде $a_1^\perp, a_2^\perp, \dots, a_m^\perp$ для некоторых ненулевых векторов $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$. Эти векторы определяются группой G однозначно с точностью до пропорциональности. Отнормируем их так, чтобы они стали единичной длины, и вместе с каждым вектором a_i рассмотрим противоположный ему вектор $-a_i$. Полученный набор векторов $\Phi_G = \{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_m\}$ называется *системой корней* группы G . Согласно сл. 7.2 на стр. 111 все преобразования из группы G переводят зеркала в зеркала и, стало быть, корни — в корни. Обозначим через $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup a_i^\perp$ объединение всех зеркал группы G . Дополнение до него распадается в дизъюнктное объединение открытых конусов $C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_N$, которые называются *камерами Вейля* и являются классами эквивалентности точек из $V \setminus \Sigma$ по отношению, объявляющему две точки эквивалентными, если они лежат в одном открытом полупространстве относительно всех гиперплоскостей a_i^\perp . Поскольку это отношение является пересечением эквивалентностей из упр. 7.7, каждая камера C_ν вместе с любыми двумя точками содержит соединяющий их отрезок, и две точки из C тогда и только тогда лежат в одной камере, когда соединяющий их отрезок не пересекает зеркал.

Обозначим через Ψ_{ij} двумерную плоскость, порождённую корнями a_i, a_j . Ортогональным дополнением к ней является $(n-2)$ -мерное пересечение зеркал $\Psi_{ij}^\perp = a_i^\perp \cap a_j^\perp$. Все проходящие через это пересечение зеркала группы G высекают в плоскости Ψ_{ij} двумерную конфигурацию прямых, являющихся зеркалами отражений некой диэдральной группы $D_{m_{ij}}$ из прим. 7.6 на стр. 111. Целое число $m_{ij} \geq 2$ однозначно определяется группой G и корнями a_i, a_j как число всех зеркал группы G , проходящих через пересечение i -того и j -того зеркала. При этом наименьший из углов между всеми такими зеркалами равен π/m_{ij} (см. рис. 7◊10). Таким образом, в любой группе отражений есть лишь следующие возможности для взаимного расположения произвольно выбранных i -того и j -того зеркал.

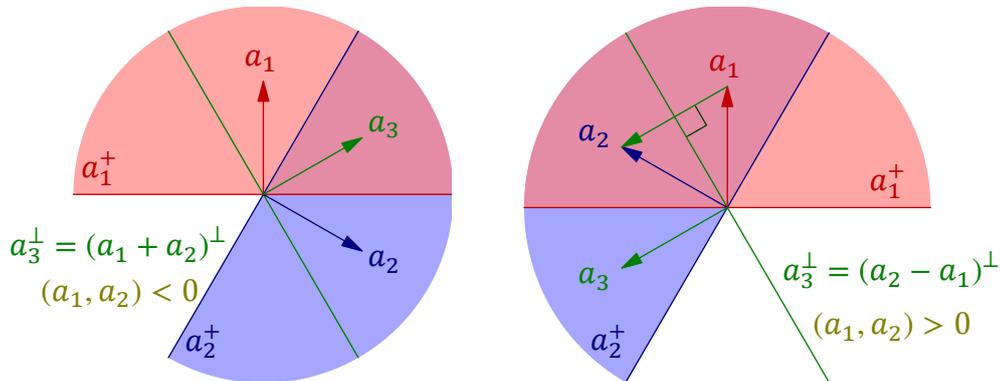


Рис. 7◊10. Соседние и не соседние зеркала.

Лемма 7.3

Если внутри двугранного угла $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ нет других зеркал группы G , то $(a_i, a_j) \leq 0$, и равенство равносильно тому, что $m_{ij} = 2$. При $(a_i, a_j) > 0$ в системе Φ_G имеется корень $a_k = \lambda a_i - \mu a_j$ с $\lambda, \mu > 0$, задающий зеркало проходящее между зеркалами a_i^\perp и a_j^\perp , и разбивающее двугранный угол $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ на два непустых двугранных угла. При $(a_i, a_j) < 0$ в системе Φ_G есть корень

$a_k = \lambda a_i + \mu a_j$ с $\lambda, \mu > 0$, задающий зеркало, относительно которого двугранный угол $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ расположен в одном полупространстве a_k^\perp . \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.8. Докажите лемму, пользуясь рис. 7◊10.

7.3.1. Положительные корни и стенки. Будем называть i -той стенкой часть i -того зеркала, расположенную вне его пересечений с остальными зеркалами, т. е. множество

$$\Sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} a_i^\perp \setminus \bigcup_j \Psi_{ij}^\perp.$$

Скажем, что зеркало a_i^\perp примыкает к камере C_ν , если существует отрезок $[x, y]$ с $x \in C_\nu, y \in \Sigma_i$, не пересекающий объединения зеркал Σ ни в каких других точках кроме a_i . Если выбрать в каждой паре противоположных корней $\pm a_i$ тот корень, относительно которого камера C_ν лежит в положительном полупространстве a_i^\perp , мы получим (зависящее от камеры C_ν) разбиение всей системы корней в дизъюнктное объединение двух центрально симметричных относительно нуля подмножеств

$$\Phi_\nu^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \Phi \mid \forall v \in C_\nu (v, a) > 0\} \quad \text{и} \quad \Phi_\nu^- \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \Phi \mid \forall v \in C_\nu (v, a) < 0\},$$

элементы которых называются *положительными* и *отрицательными* корнями относительно камеры C_ν .

ЛЕММА 7.4

Стенка Σ_a , отвечающая корню $a \in \Phi$, тогда и только тогда примыкает к камере C_ν , когда найдётся такая точка $y \in a^\perp$, что $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+$. Если $a_i, a_j \in \Phi_\nu^+$ задают стенки, примыкающие к камере C_ν , то $(a_i, a_j) \leq 0$, и равенство равносильно тому что $m_{ij} = 2$.

Доказательство. Пусть отрезок $[x, y]$ имеет $x \in C_\nu, y \in \Sigma_a$ и не пересекает ни одной гиперплоскости b^\perp с отличным от a корнем положительным корнем $b \in \Phi_\nu^+$. Тогда каждая линейная функция $f_b(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v, b)$ строго положительна на этом отрезке. В частности, $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+, b \neq a$. Наоборот, если есть такая точка $y \in a^\perp$, что $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+, b \neq a$, то $y \in \Sigma_a$, и для любой точки $x \in C_\nu$ отрезок $[x, y]$ не пересекает ни одного зеркала b^\perp с $b \neq a$, а зеркало a^\perp пересекает только в точке y , поскольку линейная функция $f_a(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v, a)$ строго положительна на одном конце этого отрезка, зануляется на другом, а значит, строго положительна во всех внутренних точках отрезка. Последнее утверждение леммы вытекает из лем. 7.3, так как в плоскости Ψ_{ij} зеркала a_i^\perp и a_j^\perp , которые примыкают к одной и той же камере C_ν , должны соседними, т. е. образовывать минимальный двугранный угол. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Строго докажите последнее утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3 (ЭФФЕКТИВНОСТЬ)

Конечная группа отражений G евклидова пространства V называется *эффективной*, если единственным неподвижным относительно всей группы вектором в V является нулевой вектор.

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Убедитесь, что группа G эффективна тогда и только тогда, когда её система корней Φ_G линейно порождает пространство V .

7.3.2. Простые корни. Зафиксируем какую-нибудь камеру C_ν и будем последовательно выкидывать из множества положительных корней Φ_ν^+ те корни, которые являются линейными комбинациями остальных с *положительными* коэффициентами. Оставшееся в результате множество корней обозначается через $\Delta_\nu \subset \Phi_\nu^+$, и его элементы называются *простыми корнями* (относительно камеры C_ν), а задаваемые ими отражения — *простыми отражениями*.

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Убедитесь, что ни один простой корень не является линейной комбинацией никаких других положительных корней с положительными коэффициентами.

ЛЕММА 7.5

Если группа G эффективна, множество Δ_ν является базисом в V и совпадает с множеством всех тех положительных корней, которые задают примыкающие к камере C_ν стенки. В частности, Δ_ν не зависит от произвола, имеющегося при его построении¹.

Доказательство. Каждый непростой корень $b \in \Phi_\nu^+ \setminus \Delta_\nu$ является положительной линейной комбинацией простых. Поэтому в гиперплоскости b^\perp нет таких векторов v , что $(v, a) > 0$ для всех $a \in \Delta_\nu$. Согласно лем. 7.4 зеркало b^\perp не содержит стенок, примыкающих к камере C_ν .

Заметим, что для любых двух различных простых корней a_i, a_j выполняется неравенство $(a_i, a_j) \leq 0$, поскольку в противном случае по лем. 7.3 существовал бы положительный корень вида $\lambda a_i - \mu a_j$ с положительными λ, μ , и простой корень a_i был бы положительной линейной комбинацией положительных корней вопреки упр. 7.11.

Покажем теперь, что простые корни линейно независимы. Пусть между ними есть соотношение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r = 0$, все коэффициенты которого ненулевые. Если они одного знака, можно считать их положительными. В таком случае, скалярно умножая левую часть на любой вектор $v \in C_\nu$, получаем строго положительное число, что невозможно, т. к. в правой части нуль. Если среди коэффициентов есть и положительные, и отрицательные, перенесем последние направо, получим соотношение

$$\lambda_{i_1} a_{i_1} + \lambda_{i_2} a_{i_2} + \dots + \lambda_{i_s} a_{i_s} = \mu_{j_1} a_{j_1} + \mu_{j_2} a_{j_2} + \dots + \mu_{j_t} a_{j_t},$$

где все коэффициенты положительны. Так как все $(a_i, a_j) \leq 0$, правая и левая части равны нулю по отдельности в силу идущего ниже упр. 7.12, и мы приходим к уже разобранным случаю.

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Пусть векторы a_1, a_2, \dots, a_k и b_1, b_2, \dots, b_m таковы, что $(a_i, b_j) \leq 0$ для всех i, j . Покажите что равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_m b_m$ с неотрицательными коэффициентами α_i, β_j возможно, если и только если обе его части равны нулю по отдельности, и (a_i, b_j) всякий раз, когда $\alpha_i \beta_j \neq 0$.

Поскольку группа G эффективна, положительные, а стало быть, и простые корни порождают всё пространство. Тем самым, простые корни $a \in \Delta_\nu$ составляют базис в V , а двойственные им линейные формы $g_a(v) = (v, a)$ образуют базис в V^* . Поэтому в пространстве V найдутся векторы, на которых одна из форм g_a нулевая, а все остальные положительны. По лем. 7.4 это означает, что все зеркала a^\perp примыкают к камере C_ν . \square

Следствие 7.3

К каждой камере Вейля эффективной группы отражений пространства V примыкает ровно $\dim V$ зеркал, и их нормали составляют базис в V . Отличные от нуля коэффициенты разложения любого корня группы G по этому базису либо все положительны, либо все отрицательны. \square

¹Т. е. порядка, в котором выкидываются лишние корни

ТЕОРЕМА 7.3

Каждая группа отражений G порождается простыми отражениями $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{a_i}$ относительно зеркал $a_1^\perp, a_2^\perp, \dots, a_n^\perp$, примыкающих к произвольно выбранной камере Вейля. Элементы группы G взаимно однозначно соответствуют камерам Вейля, и последние могут быть занумерованы элементами группы так, что $h(C_g) = C_{hg}$ для любых $g, h \in G$.

Доказательство (по Э. Б. Винбергу). Занумеруем камеры и обозначим через a_i простые корни относительно камеры C_1 , а через $\sigma_i = \sigma_{a_i}$ — соответствующие им простые отражения. Для каждой камеры C_μ выберем ненулевые векторы $u \in C_1$ и $w \in C_\mu$ единичной длины так, чтобы натянутая на них двумерная плоскость P_{uw} не пересекалась с $(n-2)$ -мерными пересечениями зеркал $\Psi_{ij}^\perp = a_i^\perp \cap a_j^\perp$ группы G . Пройдём из u в w по кратчайшей дуге окружности, высекаемой плоскостью P_{uw} на единичной сфере с центром в нуле, последовательно отражая камеру C_1 относительно встречаемых стенок и записывая подряд номера $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ тех стенок камеры C_1 через образы которых мы проходим. Дословно то же рассуждение, что в предшествующих [прим. 7.6](#), [прим. 7.8](#) и [прим. 7.7](#), показывает, что $C_\mu = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}(C_1)$. Таким образом, группа G действует на камерах Вейля транзитивно¹. Слово $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}$, считанное с дуги uw , зависит от выбора векторов u и w . Как мы видели на [рис. 7♦9](#) на стр. 115, при выборе других векторов некоторые фрагменты этого слова будут заменяться симметричными фрагментами согласно соотношениям $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = \text{Id}$, которые выражают тот факт, что композиция отражений в паре зеркал, примыкающих к одной камере, является поворотом на угол $2\pi/m_{ij}$, ибо примыкающие к одной камере зеркала являются ближайшими в конфигурации всех зеркал, проходящих через $(n-2)$ -мерное пространство Ψ_{ij}^\perp . Свяжем с каждой камерой C_μ элемент g_μ группы G , переводящий камеру C_1 в камеру C_μ только что описанным способом. По построению, этот элемент разлагается в равные друг другу в группе G композиции простых отражений

$$g_\mu = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}, \quad (7-13)$$

преобразующиеся одна в другую при помощи замен некоторых m_{ij} -буквенных фрагментов стоящего в правой части слова симметричными относительно пересечения i -того и j -того зеркала фрагментами:

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots}_{m_{ij}} \longleftrightarrow \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \dots}_{m_{ij}}$$

Все элементы $g_\mu \in G$ различны, поскольку переводят камеру C_1 в различные камеры C_μ . Остаётся показать, что каждый элемент $g \in G$ совпадает с одним из элементов g_μ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Убедитесь, что каждое отражение из группы G является композицией простых отражений, и выведите из этого, что все элементы группы G являются композициями простых отражений.

Запишем элемент g в виде композиции простых отражений и проведём индукцию по длине такого представления. Элементы, длины 0 и 1 суть Id и простые отражения σ_i , переводящие камеру C_1 в соседние камеры, имеющие с C_1 общую примыкающую стенку. Для них доказываемое утверждение тривиально. Пусть оно верно для всех композиций длины $\leq k$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, являющийся такой композицией. Достаточно проверить, что каждая композиция $g\sigma_j$ имеет вид g_μ для подходящего μ . Пусть $g(C_1) = C_\nu$. Обозначим через $H = g(a_j)^\perp$ примыкающее к камере C_ν зеркало, в которое переводится преобразованием g

¹Т. е. позволяет перевести любую камеру в любую другую камеру.

зеркало простого отражения σ_j . Если камеры C_1 и C_v лежат по одну сторону от зеркала H , как на рис. 7◊11, выберем векторы $u \in C_1$ и $w \in C_v$ так, чтобы продолжение дуги uw дальше за точку w уходило из камеры C_v сквозь зеркало H . По индукции элемент $g = g_v$ записывается считанным с дуги uw словом $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}$. Следовательно, элемент $g\sigma_j = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k} \sigma_j$ тоже записывается словом вида (7-13), считанным с продолжения дуги uw сквозь стенку H , а значит, $g\sigma_j$ совпадает с элементом g_τ , отвечающим соседней с C_v камере $C_\tau = \sigma_{g(a_j)}(C_v)$.

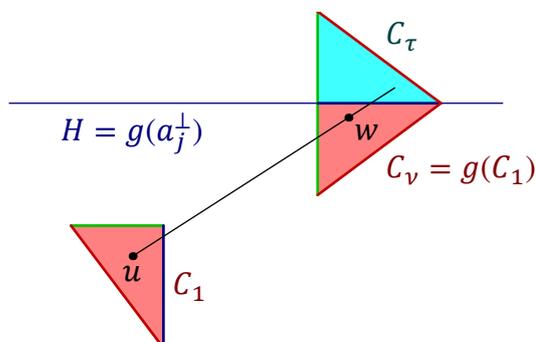


Рис. 7◊11. H не разделяет C_1 и C_v .

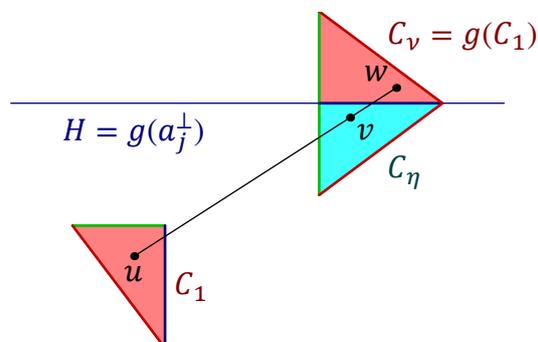


Рис. 7◊12. H разделяет C_1 и C_v .

Если камеры C_1 и C_v лежат по разные стороны от зеркала H , как на рис. 7◊12, выберем векторы $u \in C_1$ и $w \in C_v$ так, чтобы дуга uw входила в камеру C_v сквозь зеркало H , и обозначим через v какую-нибудь точку этой дуги, лежащую в предыдущей камере $C_\eta = \sigma_{g(a_j)}(C_v)$. По индукции, считанное с дуги uw слово для $g = g_v$ имеет вид $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}} \sigma_j$ с последней буквой σ_j . Поэтому $g\sigma_j = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}} = g_\eta$, ибо слово для элемента g_η , считанное с дуги uv , как раз и равно $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}}$. \square

Замечание 7.2. Из доказательства теор. 7.3 видно, что эффективная группа отражений n -мерного евклидова пространства является фактором свободной группы на n образующих σ_i по наименьшей нормальной подгруппе¹, содержащей слова σ_i^2 и $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}}$ для всех $i \neq j$, где m_{ij} это количество зеркал, проходящих через пересечение i -того и j -того зеркала (эквивалентно, острый угол между i -тым и j -тым зеркалами равен π / m_{ij}).

7.4. Графы Кокстера. В этом разделе мы дадим полную классификацию групп отражений. Назовём группу отражений G евклидова пространства V и её систему корней $\Phi = \Phi_G$ разложимыми, если пространство V раскладывается в ортогональную прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2$ так, что $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$, где $\Phi_i = \Phi \cap V_i$. В этом случае группа $G = G_1 \times G_2$ является прямым произведением двух своих подгрупп $G_1, G_2 \subset G$, действующих каждая на своём подпространстве V_i , оставляя дополнительное подпространство неподвижным. Очевидно, что каждая группа отражений является прямым произведением неразложимых подгрупп, эффективно действующих в попарно ортогональных подпространствах пространства V . Поэтому достаточно получить полный список неразложимых групп отражений G . Размерность пространства, в котором эффективно действует такая группа называется рангом неразложимой группы G . Выше мы видели, что ранг равен числу положительных простых (относительно произвольно зафиксированной камеры Вейля) корней a_1, a_2, \dots, a_n , и группа G полностью определяется попарными углами

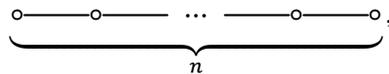
¹Точный смысл сказанного разъясняется в курсе алгебры, см., к примеру, лекцию <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf>.

между этими корнями или, что то же самое, двугранными углами между стенками камеры Вейля. Они однозначно характеризуются целыми числами $m_{ij} \geq 2$ — количествами зеркал группы G , проходящих через пересечение i -той и j -той стенки выбранной камеры Вейля. При этом угол между i -той и j -той стенками равен π/m_{ij} , а угол между простыми положительными корнями a_i и a_j равен $\pi(1 - m_{ij}^{-1})$.

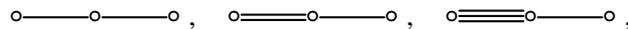
Набор чисел m_{ij} , связанных с зеркалами произвольной группы отражений G , принято кодировать неориентированным *графом Кокстера*, вершины которого биективно соответствуют простым корням, и i -тая вершина соединена с j -той ровно $(m_{ij} - 2)$ -мя рёбрами. Таким образом, между ортогональными корнями рёбер нет, а паре зеркал, составляющих двугранный угол $\pi/3$, отвечают вершины, соединённые одним ребром, зеркалам с углом $\pi/4$ между ними — вершины, соединённые двумя рёбрами, и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 7.14. Убедитесь, что система корней неразложима, если и только если её граф Кокстера связан.

Например, система корней типа A_n из [прим. 7.8](#) на стр. 116, задающая группу правильного n -мерного симплекса, имеет согласно [упр. 7.4](#) граф Кокстера



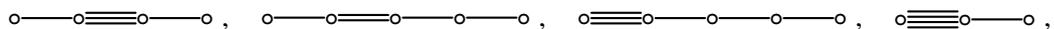
который так и называется *графом A_n* . Диэдральная группа D_m из [прим. 7.6](#) на стр. 111 имеет ранг 2 и граф Кокстера из двух вершин, соединённых $(m - 2)$ рёбрами, а группы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра из [прим. 7.7](#) на стр. 113 имеют ранг 3 и графы Кокстера



у которых число рёбер между вершинами i и j равно числу m_k из таблицы со стр. 113.

Поскольку определитель Грама набора простых корней положителен¹, связный граф без петель² может быть графом Кокстера, только если симметричная матрица с $g_{i,i} = 1$ и недиагональными элементами $g_{ij} = g_{ji} = -\cos(\pi/m_{ij})$ имеет положительный определитель. Кроме того, при удалении из графа Кокстера любого набора вершин вместе со всеми приходящими в эти вершины рёбрами оставшийся граф также будет графом Кокстера группы отражений в пересечениях оставшихся зеркал с линейной оболочкой оставшихся простых корней.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Покажите, что в графе Кокстера не может быть подграфов вида



указав в них пару векторов с не положительным определителем Грама. Убедитесь, что графов Кокстера, получающихся из нарисованных увеличением кратности имеющегося в них кратного ребра, тоже не существует.

ЛЕММА 7.6

Среди любых m вершин графа Кокстера рёбрами соединяется не более $m - 1$ пар. В частности, в графе Кокстера нет циклов.

¹Ибо они линейно независимы, как мы убедились в доказательстве [лем. 7.5](#) на стр. 120.

²Т. е. рёбер, начало которых совпадает с концом.

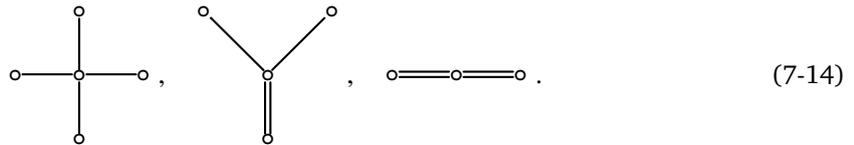
Доказательство. Выкинув все остальные вершины и примыкающие к ним рёбра, получаем граф Кокстера системы из m простых корней a_1, a_2, \dots, a_m . Поскольку $(a_i, a_j) \leq 0$ для всех $i \neq j$ по лем. 7.4 на стр. 119, для скалярного квадрата суммы всех этих корней¹ получаем неравенство

$$0 < \left(\sum_{i=1}^m a_i, \sum_{i=1}^m a_i \right) = m - 2 \sum_{i < j} \cos(\pi/m_{ij}) \leq m - k,$$

где k равно числу таких пар $i < j$, что $m_{ij} \geq 3$. Тем самым, $k \leq m - 1$. □

Лемма 7.7

В графе Кокстера нет подграфов вида



Доказательство. Выкидывая остальные вершины вместе с примыкающими к ним рёбрами, получаем систему простых корней, в которой все крайние корни e_i образуют ортонормальный базис своей линейной оболочки U . Поскольку центральный корень $c \notin U$, его ортогональная проекция на U имеет длину $|c_U| < 1$. В наших трёх случаях координаты проекции

$$c_U = \sum_i (c, e_i) \cdot e_i = \begin{cases} (1/2, 1/2, 1/2, 1/2) & \text{в базисе } e_1, e_2, e_3, e_4 \\ (1/2, 1/2, \sqrt{3}/2) & \text{в базисе } e_1, e_2, e_3 \\ (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2) & \text{в базисе } e_1, e_2 \end{cases}$$

и её длина $|c_U| \geq 1$. Противоречие. □

Лемма 7.8 (стягивание простых цепочек)

Если граф Кокстера содержит цепочку вида



крайние вершины которой могут быть соединены с какими-то другими вершинами графа, но во внутренние вершины больше не ведёт никаких рёбер, кроме нарисованных, то при замене всей цепочки на одну вершину, в которую входят все рёбра, ранее входившие в две крайних вершины цепочки (7-15), также получится граф Кокстера.

Доказательство. Пусть корни a_1, a_2, \dots, a_m соответствуют вершинам цепочки (7-15). Их сумма s имеет скалярный квадрат

$$(s, s) = \sum_{i=1}^m (a_i, a_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} (a_i, a_{i+1}) = m - (m - 1) = 1,$$

а скалярное произведение s с любым не входящим в цепочку корнем a_j равно

$$(s, a_j) = \sum_{i=1}^m (a_i, a_j) = (a_1, a_j) + (a_m, a_j).$$

¹Которая отлична от нуля поскольку простые корни линейно независимы.

Поскольку в графе Кокстера нет петель, из двух произведений в правой части отлично от нуля может быть лишь одно. Следовательно, угол образуемый вектором s с корнем a_j либо такой же, как у a_1 с a_j , либо такой же как у a_m с a_j , т. е. имеет вид $\pi(1 - m^{-1})$ для целого $m \geq 2$. Следовательно, вектор s вместе со всеми остальными корнями a_j , не входящими в цепочку (7-15), образует систему простых корней с графом Кокстера, который получается из исходного графа стягиванием цепочки (7-15) в одну точку. \square

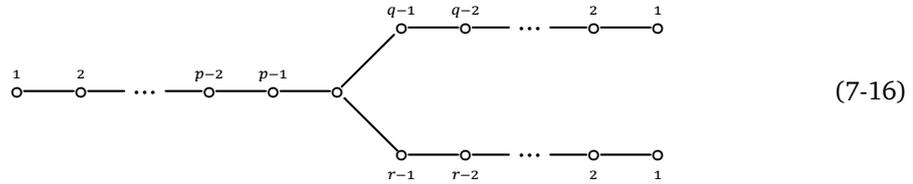
Следствие 7.4 (отсутствие двух кратных объектов)

В связном графе Кокстера не может быть ни двух вершин валентности ≥ 3 , ни двух пар кратных рёбер¹, ни вершины валентности ≥ 3 вместе с кратным ребром (не обязательно идущим в эту вершину).

Доказательство. Стягивая цепочку вида (7-15), связывающую друг с другом пару нежелательных нам объектов, мы получаем один из трёх подграфов, запрещённых по лем. 7.7. \square

Лемма 7.9 (классификация мерcedesов)

Пусть граф Кокстера имеет трёхвалентную вершину, в которую ведут цепочки из $p - 1$, $q - 1$ и $r - 1$ последовательных рёбер



(так что всего в рассматриваемом подграфе $p + q + r - 2$ вершин). Тогда тройка чисел (p, q, r) с точностью до перестановки имеет вид $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ или $(2, 2, m)$ с любым целым $m \geq 2$.

Доказательство. Обозначим центральный корень через e , а остальные — через a_i , b_i и c_i , занумеровав их от окраины к центру, как показано на графе (7-16). Положим

$$\begin{aligned} a &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1) \cdot a_{p-1} \\ b &\stackrel{\text{def}}{=} b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + (q-1) \cdot b_{q-1} \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + (r-1) \cdot c_{r-1}. \end{aligned}$$

Векторы a , b , c образуют ортогональный базис в своей линейной оболочке U и имеют скалярные квадраты $(a, a) = p(p-1)/2$, $(b, b) = q(q-1)/2$, $(c, c) = r(r-1)/2$, поскольку

$$\left(\sum_{k=1}^{p-1} k a_k, \sum_{k=1}^{p-1} k a_k \right) = \sum_{k=1}^{p-1} k^2 - \sum_{k=1}^{p-2} k(k+1) = (p-1)^2 - \frac{(p-2)(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

и аналогично для векторов b и c . Так как вектор $e \notin U$, длина его ортогональной проекции

$$e_U = \frac{(e, a)}{(a, a)} \cdot a + \frac{(e, b)}{(b, b)} \cdot b + \frac{(e, c)}{(c, c)} \cdot c$$

¹Т. е. пар вершин, соединённых между собою более, чем одним ребром.

на подпространство U строго меньше единицы, откуда

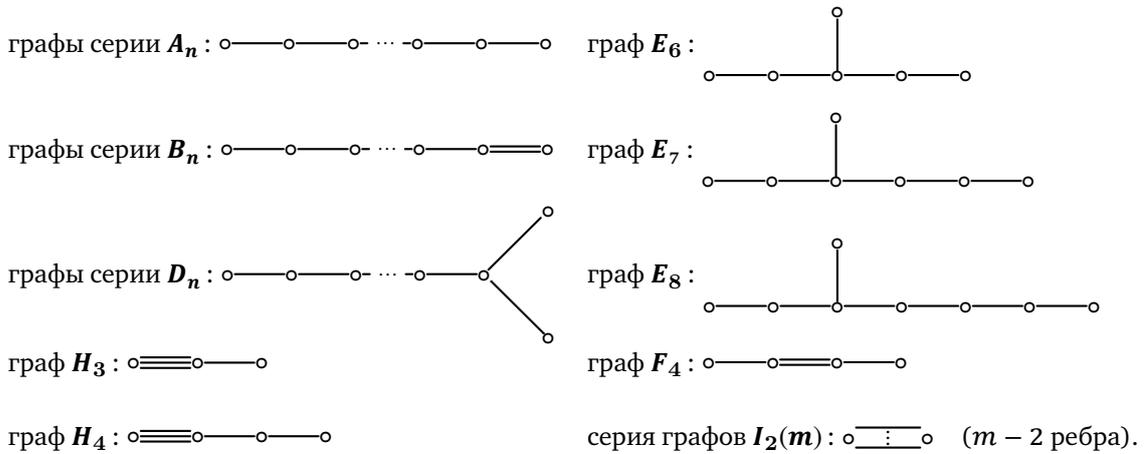
$$1 > (e_U, e_U) = \frac{(e, a)^2}{(a, a)} + \frac{(e, b)^2}{(b, b)} + \frac{(e, c)^2}{(c, c)} = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r}.$$

Все решения неравенства $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$ в натуральных числах $p, q, r > 1$ как раз и перечислены в лем. 7.9. □

УПРАЖНЕНИЕ 7.16. Удостоверьтесь в этом.

ТЕОРЕМА 7.4

Полный список связных графов Кокстера таков (нижний индекс равен числу вершин):



Доказательство. Из предыдущих лемм вытекает, что все связные графы Кокстера содержатся в указанном списке, так что остаётся лишь предъявить соответствующие системы корней. Систему A_n мы изучали в прим. 7.8 на стр. 116. Граф H_3 отвечает группе икосаэдра из прим. 7.7 на стр. 113, а графы $I_2(m)$ — диэдральным группам D_m из прим. 7.6 на стр. 111.

Система корней B_n строится следующим образом. Рассмотрим в \mathbb{R}^n все векторы с целыми координатами, имеющие длину 1 или 2, т. е. все векторы вида $\pm e_i$ и $\pm e_i \pm e_j$, где $1 \leq i < j \leq n$, а через e_1, e_2, \dots, e_n , как обычно, обозначен стандартный базис в \mathbb{R}^n . Таким образом мы имеем всего $2n + 2n(n - 1) = 2n^2$ зеркал. Отражения σ_{e_i} независимо меняют знаки координат и составляют группу, изоморфную $(\mathbb{Z}/(2))^n$. Отражения $\sigma_{e_i - e_j}$ образуют группу перестановок базисных векторов¹. Отражения $\sigma_{e_i + e_j} = \sigma_{e_j} \sigma_{e_i - e_j} \sigma_{e_j}$ выражаются через предыдущие. Так как симметрическая группа нормализует группу смен знаков координат, т. е. для любой перестановки базисных векторов $g \in S_n$ и любых i_1, i_2, \dots, i_k

$$g \sigma_{e_{i_1}} \sigma_{e_{i_2}} \dots \sigma_{e_{i_k}} g^{-1} = \sigma_{e_{g(i_1)}} \sigma_{e_{g(i_2)}} \dots \sigma_{e_{g(i_k)}},$$

рассматриваемые отражения порождают конечную группу, изоморфную полупрямому произведению² $(\mathbb{Z}/(2))^n \rtimes S_n$ в котором второй сомножитель действует на первом перестановками

¹ См. прим. 7.8 на стр. 116.

² См. зам. 2.1. на стр. 27.

компонент.

УПРАЖНЕНИЕ 7.17. Убедитесь, что построенная группа совпадает с группой стандартного правильного кокуба¹ $C^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -1 \leq \sum x_i \leq 1 \right\}$, и n векторов

$$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$$

являются её простыми корнями, а их граф Кокстера это B_n .

Отражения $\sigma_{e_i - e_j}$ и $\sigma_{e_i + e_j}$ порождают в группе B_n подгруппу индекса 2, содержащую всевозможные перестановки координат и одновременные смены знака лишь у любого чётного числа базисных векторов. Эта группа изоморфна полупрямому произведению $(\mathbb{Z}/(2))^{n-1} \rtimes S_n$ и векторы $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$ являются её простыми корнями.

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь, что их граф Кокстера это D_n .

Система корней E_8 строится так. Рассмотрим в $\mathbb{Z}^8 \subset \mathbb{R}^8$ подрешётку E , образованную всеми векторами с чётной суммой координат, и обозначим через $L \subset \mathbb{R}^8$ подрешётку, порождённую решёткой E и вектором $w = \frac{1}{2} \sum e_i$, где e_1, e_2, \dots, e_8 — стандартный базис в \mathbb{R}^8 . Таким образом, решётка L состоит из всевозможных целочисленных линейных комбинаций вида $z_1 u + z_2 w$ с $u \in E$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.19. Проверьте, что скалярные квадраты всех векторов $v \in L$ являются чётными целыми числами.

Система корней Φ типа E_8 образована всеми векторами из L минимально возможной длины $\sqrt{2}$. Всего имеется 240 таких векторов, а именно двучленные суммы $\pm e_i \pm e_j$ с $1 \leq i < j \leq 8$ и восьмичленные полусуммы $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ с чётным числом плюсов.

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Убедитесь, что отражения относительно всех этих векторов переводят множество Φ в себя, и выведите отсюда, что эти отражения порождают конечную группу. Убедитесь, что вектор $\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^7 e_i)$, вектор $e_1 + e_2$ и шесть векторов $e_{i-1} - e_{i-2}$ с $3 \leq i \leq 8$ являются простыми корнями этой группы и имеют граф Кокстера E_8 .

Системы корней E_6 и E_7 получаются из E_8 ограничением на линейную оболочку первых шести и семи простых корней. Граф F_4 является графом Кокстера группы октаплекса, а H_4 — графом Кокстера группы четырёхмерного правильного многогранника с символом Шлефли $(3, 3, 5)$, своего рода «четырёхмерного икосаэдра». Подробнее об этих многогранниках см. в Листке Г7 $\frac{1}{2}$. Естественно всего они возникают в рамках двумерной комплексной эрмитовой геометрии, и мы отложим их обсуждение до той поры, когда познакомимся с нею поближе. \square

¹Т. е. выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$ в \mathbb{R}^n .

§8. Топологии, метрики, нормы и выпуклость

8.1. Топологические пространства. Многие определения из анализа сохраняют смысл в очень широком контексте, если формулировать их не на языке неравенств между числами, а на языке окрестностей точек и вложенности таких окрестностей друг в друга. Формализуется это следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1 (топология в терминах открытых множеств)

Топология на множестве X это такое множество наречённых *открытыми* подмножеств в X , что

- 1) несобственные подмножества \emptyset и X открыты
- 2) пересечение любых двух открытых подмножеств открыто
- 3) объединение любого множества открытых подмножеств открыто.

Множество X вместе с некоторой зафиксированной на нём топологией называется *топологическим пространством*. Дополнительные подмножества $Z = X \setminus U$ к открытым подмножествам $U \subset X$ называются *замкнутыми*. Множества всех открытых и всех замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначаются через $\mathcal{U}(X)$ и $\mathcal{Z}(X)$ соответственно. Определение топологии эквивалентным образом формулируется и в терминах замкнутых подмножеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2 (топология в терминах замкнутых множеств)

Топология на множестве X это такое множество наречённых *замкнутыми* подмножеств в X , что

- 1) несобственные подмножества \emptyset и X замкнуты
- 2) объединение любых двух замкнутых подмножеств замкнуто
- 3) пересечение любого множества замкнутых подмножеств замкнуто.

Если принять второе определение, то *открытыми* подмножествами топологического пространства X следует называть дополнения до замкнутых подмножеств.

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Убедитесь, что *опр. 8.2* и *опр. 8.1* действительно эквивалентны друг другу.

ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 8.1. Из определения топологии *не следует*, что одноточечные подмножества $x \in X$ в абстрактном топологическом пространстве X являются замкнутыми. Соответственно, дополнения до точек $X \setminus x$ не обязательно являются открытыми.

ПРИМЕР 8.1 (дискретная топология)

Если объявить *каждое* подмножество $Y \subset X$ одновременно и открытым и замкнутым, то получится топология, называемая *дискретной*.

ПРИМЕР 8.2 (тривиальная топология)

Если объявить открытыми *только* несобственные подмножества¹ \emptyset и X , то получится топология, называемая *тривиальной* или *антидискретной*.

¹Так что они автоматически окажутся и единственными двумя замкнутыми подмножествами.

Пример 8.3 (финитные и счётно-финитные топологии)

Если объявить замкнутыми \emptyset , X и все конечные (соотв. конечные или счётные) подмножества $Z \subset X$, то получится топология, называемая *финитной* (соотв. *счётно-финитной*).

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Убедитесь, что это действительно топологии.

Пример 8.4 (топология Зарисского)

Пусть $X = \mathbb{A}^n$ — аффинное координатное пространство над произвольным полем \mathbb{k} . Назовём подмножество $Z \subset \mathbb{A}^n$ замкнутым, если оно является множеством решений некоторой (возможно, бесконечной) системы полиномиальных уравнений.

УПРАЖНЕНИЕ 8.3. Покажите, что пустое множество и всё пространство задаются уравнениями $1 = 0$ и $0 = 0$, объединение множеств решений систем уравнений $f_\nu(x) = 0$ и $g_\mu(x) = 0$ задаётся системой уравнений $f_\nu(x) \cdot g_\mu(x) = 0$, где каждый из множителей независимо пробегает свою систему, а пересечение множеств решений любого множества систем полиномиальных уравнений задаётся системой уравнений, полученной слиянием всех этих систем в одну.

Описанная только что топология называется *топологией Зарисского*. На аффинной прямой \mathbb{A}^1 она совпадает с финитной топологией из [прим. 8.3](#).

Пример 8.5 (стандартная топология на \mathbb{R}^n)

Для произвольного $\varepsilon > 0$ назовём ε -кубом с центром в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ фигуру

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}, \quad (8-1)$$

и скажем, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $p \in U$ оно содержит и некоторый ε -куб $B_\varepsilon(p) \subset U$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.4. Убедитесь, что это топология.

Эта топология называется *стандартной топологией* на \mathbb{R}^n , или *топологией покоординатной сходимости*¹. Легко видеть, что набор $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ открытых множеств не зависит от выбора аффинной системы координат, используемой для определения ε -кубов. В самом деле, при выборе другого координатного репера, неравенства задающие ε -куб (8-1) подвергнутся аффинному преобразованию и превратятся в другую систему неравенств вида $\xi_\nu(x) \leq a_\nu$, где $\xi_\nu \in \mathbb{R}^{n*}$ — некие линейные формы на \mathbb{R}^n , а $a_\nu \in \mathbb{R}$ — какие-то числа. При этом новые координаты $x = x(p)$ точки p будут решением строгих неравенств $\xi_\nu(x) < a_\nu$, поскольку точка p удовлетворяет строгой форме задающих ε -куб неравенств из формулы (8-1).

УПРАЖНЕНИЕ 8.5. Пусть система строгих линейных (неоднородных) неравенств $\xi_\nu(x) < a_\nu$ имеет решение p в аффинном пространстве \mathbb{R}^n . Проверьте, что в множестве решений содержится и некоторый ε -куб с центром p .

Таким образом, если точка p входит в множество U вместе с некоторым кубом, определённым при помощи одной системы аффинных координат, то и в любой другой системе аффинных координат куб подходящего размера с центром в p тоже будет лежать внутри множества U .

Пример 8.6 (индуцированная топология)

На любом подмножестве Y топологического пространства X имеется *индуцированная с X* топология, открытыми (соотв. замкнутыми) подмножествами в которой являются пересечения с Y открытых (соотв. замкнутых) подмножеств из X .

¹Этимология последнего названия прояснится ниже в [упр. 8.14](#) и [сл. 8.2](#).

УПРАЖНЕНИЕ 8.6. Убедитесь, что это действительно топология.

8.1.1. Сравнение топологий. Говорят, что топология на X , заданная набором открытых множеств \mathcal{U}_1 , *сильнее* или *тоньше* топологии, заданной набором открытых множеств \mathcal{U}_2 , если $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$, т. е. каждое открытое подмножество топологии \mathcal{U}_2 открыто и в топологии \mathcal{U}_1 . В этой ситуации также говорят, что топология \mathcal{U}_2 *слабее* или *грубее* топологии \mathcal{U}_1 . Отношение «тоньше» задаёт частичный порядок¹ на множестве всех топологий на заданном множестве X . Дискретная и тривиальная топологии из [прим. 8.1](#) и [прим. 8.2](#) являются при этом абсолютно максимальным (тончайшим) и минимальным (грубейшим) элементами частично упорядоченного множества топологий.

8.1.2. Окрестности. Всякое подмножество W топологического пространства X , содержащее данную точку $p \in X$ вместе с некоторым непустым открытым подмножеством $U \ni p$, называется *окрестностью* точки p . Из свойств открытых множеств вытекает, что пересечение конечного числа и объединение любого числа окрестностей данной точки p также являются её окрестностями.

Предложение 8.1

Множество открыто, если и только если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую её окрестность.

Доказательство. Каждое открытое множество U само же и является окрестностью всех своих точек. Наоборот, пусть множество Y вместе с каждой точкой $p \in Y$ содержит непустое открытое подмножество $U_p \ni p$. Тогда множество $Y = \bigcup_p U_p$ является объединением открытых множеств и, значит, тоже открыто. \square

8.1.3. Базы. Любую топологию на множестве X можно описывать в духе [прим. 8.5](#), определяя открытые множества как всевозможные объединения некоторых *базисных* открытых окрестностей — аналогов ε -кубов. А именно, подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(X)$ называется *базой* топологии \mathcal{U} , если любое открытое множество является объединением множеств из набора \mathcal{B} . Это равносильно тому, что каждая окрестность W любой точки p содержит такое подмножество $U \in \mathcal{B}$, что $p \in U \subset W$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.7. Убедитесь, что счётное множество *открытых ε -кубов*

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i |x_i - p_i| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и $p \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ образует базу стандартной топологии на \mathbb{R}^n .

Предложение 8.2

Набор подмножеств \mathcal{B} множества X тогда и только тогда является базой некоторой топологии на X , когда каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому множеству из \mathcal{B} и для любых двух множеств $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ и точки $p \in U_1 \cap U_2$ найдётся такое множество $W \in \mathcal{B}$, что $p \in W \subset U_1 \cap U_2$.

Доказательство. Если \mathcal{B} — база топологии, то открытое в этой топологии подмножество $U_1 \cap U_2$ содержит вместе с каждой своей точкой p и некоторое содержащее p базовое открытое подмножество $W \in \mathcal{B}$. Наоборот, если набор открытых множеств \mathcal{B} удовлетворяет условию леммы, то

¹Т. е. является рефлексивным, транзитивным и кососимметричным бинарным отношением.

всевозможные объединения множеств из \mathcal{B} составляют топологию на X с базой \mathcal{B} . В самом деле, открытость пустого множества¹, всего X и объединения любого множества открытых множеств очевидны. Пересечение $U' \cap U''$ двух открытых множеств вида

$$U' = \bigcup_{\nu} U'_{\nu}, \quad U'' = \bigcup_{\mu} U''_{\mu}, \quad U'_{\nu}, U''_{\mu} \in \mathcal{B},$$

является объединением всевозможных множеств вида $U'_{\nu} \cap U''_{\mu}$, каждое из которых, в свою очередь, является объединением подмножеств $W_p \in \mathcal{B}$, приходящих по условию предложения из всевозможных точек $p \in U'_{\nu} \cap U''_{\mu}$. Поэтому $U' \cap U''$ тоже открыто. \square

Упражнение 8.8*. Покажите, что базу топологии Зарисского из [прим. 8.4](#) составляют открытые подмножества вида $D_f = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) \neq 0\}$, где $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — произвольный многочлен, причём любое открытое множество $U \subset \mathbb{A}^n$ является объединением конечного числа базовых.

8.1.4. Непрерывность. Отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ каждого открытого подмножества $U \subset Y$ открыт в X . Это свойство равносильно тому, что прообраз любого замкнутого множества замкнут, и может быть переформулировано в традиционном для анализа стиле: скажем, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x \in X$, если для любой окрестности $W \ni f(x)$ найдётся такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset W$.

Упражнение 8.9. Покажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

8.1.5. Топология произведения. На прямом произведении топологических пространств

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in X_i \text{ для всех } i\}$$

прямые произведения $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$ открытых множеств $U_i \in \mathcal{U}(X_i)$ составляют базу топологии, поскольку попарные пересечения таких произведений также являются произведениями открытых множеств:

$$(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m) \cap (W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m) = (U_1 \cap W_1) \times (U_2 \cap W_2) \times \dots \times (U_m \cap W_m).$$

Топология на $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, открытыми множествами в которой являются всевозможные объединения произведений открытых множеств сомножителей называется *произведением топологий*. Например, стандартная топология на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$ является произведением стандартных топологий на \mathbb{R}^1 , где базу составляют ε -окрестности точек.

Упражнение 8.10. Покажите, что топология Зарисского² на $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ тоньше прямого произведения топологий Зарисского на \mathbb{A}^1 .

Топология произведения является слабой топологией на $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, в которой все отображения проектирования $\pi_i : X \rightarrow X_i$ непрерывны. В самом деле, требование открытости прообраза любого открытого множества $U_i \subset X_i$ принуждает объявить открытыми все множества вида $X \times \dots \times X \times U_i \times X \times \dots \times X$, а значит, и все их конечные пересечения

$$\bigcap_i X \times \dots \times X \times U_i \times X \times \dots \times X = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m,$$

¹Т.е. объединения пустого множества подмножеств из \mathcal{B} .

²См. [прим. 8.4](#) на стр. 129.

которые как раз и составляют базу топологии произведения.

В случае бесконечного числа пространств X_α , где α пробегает произвольное множество A , базу слабейшей топологии на произведении¹ $X = \prod_\alpha X_\alpha$, в которой непрерывна каждая проекция $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$, тоже составляют лишь такие произведения открытых множеств $\prod_\alpha U_\alpha$, где только *конечное* число сомножителей отлично от всего X_α , поскольку аксиомы топологии требуют открытости лишь конечных пересечений открытых множеств.

Топология на бесконечном произведении, базу которой составляют такие произведения открытых множеств, где лишь конечное число подмножеств отлично от всего пространства, по-прежнему называют *топологией произведения* или *тихоновской топологией*.

8.1.6. Зоология точек. Будем называть *фигурами* в топологическом пространстве X произвольные подмножества $\Phi \subset X$. Точки фигуры Φ , содержащиеся в Φ вместе с некоторой своей окрестностью, называются *внутренними* точками фигуры Φ . Множество всех внутренних точек фигуры Φ обозначается $\overset{\circ}{\Phi}$ и называется *внутренностью* фигуры Φ . Согласно предл. 8.1 внутренность любой фигуры открыта.

Упражнение 8.11. Покажите, что $\overset{\circ}{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X , содержащихся в Φ , и является, таким образом, наибольшим по включению содержащимся в Φ открытым множеством.

Внутренние точки дополнения $X \setminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры Φ . Иными словами, точка $p \in X$ является внешней для Φ , если у неё есть окрестность $W \ni p$, не пересекающаяся с Φ . Мы будем обозначать множество внешних точек фигуры Φ через $\overset{\circ}{\Phi}$. Как и внутренность $\overset{\circ}{\Phi}$, внешность $\overset{\circ}{\Phi}$ любой фигуры Φ открыта. Обратите внимание, что множество внешних точек замкнутой фигуры $Z \subset X$ это открытое дополнение $X \setminus Z$ к этой фигуре.

Упражнение 8.12. Покажите, что внешность $\overset{\circ}{\Phi}$ любой фигуры $\Phi \subset X$ является объединением всех открытых множеств пространства X , не пересекающихся с Φ , и таким образом является наибольшим по включению не пересекающим Φ открытым множеством.

Замкнутое дополнение к открытому множеству внешних точек фигуры $\Phi \subset X$ называется *замыканием* фигуры Φ и обозначается $\overline{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \overset{\circ}{\Phi}$. Согласно упр. 8.12 замыкание является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим фигуру. В частности, $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}$ для любой фигуры $\Phi \subset X$.

Точки, которые не являются для фигуры Φ ни внешними, ни внутренними, называются *границными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат они фигуре Φ или нет. Множество всех граничных точек Φ обозначается $\partial\Phi$ и называется *границей* фигуры Φ . Таким образом, точка $p \in X$ является граничной для Φ , если любая её окрестность содержит как точки из Φ , так и точки, не принадлежащие Φ , и $\overline{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$. Обратите внимание, что пересечение $\Phi \cap \partial\Phi$ может быть как пустым, так и нет.

Точка $p \in X$ называется *предельной точкой* фигуры $\Phi \subset X$, если в любой окрестности точки p имеется отличная от p точка фигуры Φ . Точки фигуры Φ , не являющиеся её предельными точками, называются *изолированными* точками фигуры Φ . Иначе говоря, точка $p \in \Phi$ является изолированной, если у неё есть окрестность, не содержащая никаких точек Φ , кроме самой точки p .

Упражнение 8.13. Покажите, что замыкание фигуры является объединением этой фигуры с множеством всех её предельных точек.

¹Точки которого можно воспринимать как такие функции $x : A \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, что $x_\alpha \in X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

8.1.7. Компактные пространства. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Предложение 8.3

Если пространство X компактно, и отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то пространство $f(X) \subset Y$ компактно в индуцированной с Y топологии.

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $f(X) = \bigcup_{\alpha} (f(X) \cap U_{\alpha})$, где $U_{\alpha} \subset Y$ открыты. Открытые множества $f^{-1}(U_{\alpha}) \subset X$ покрывают пространство X . Из них можно выбрать конечное подпокрытие $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n)$. Тогда множества $f(X) \cap U_i$, где $1 \leq i \leq n$, образуют конечное покрытие $f(X)$. \square

Предложение 8.4

Для компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы любой набор его замкнутых подмножеств, каждый конечный поднабор в котором имеет непустое пересечение, и сам имел непустое пересечение.

Доказательство. Пусть X компактно, и любой конечный набор в семействе замкнутых подмножеств $Z_{\alpha} \subset X$ имеет непустое пересечение. Если $\bigcap_{\alpha} Z_{\alpha} = \emptyset$, то открытые подмножества $U_{\alpha} = X \setminus Z_{\alpha}$ покрывают X . Выберем среди них конечное покрытие $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n = X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n = \emptyset$, что невозможно. Наоборот, пусть для любого семейства замкнутых подмножеств в X выполнено условие предложения. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$. Если никакой конечный набор U_1, U_2, \dots, U_n элементов этого покрытия не покрывает X , то в семействе дополнительных замкнутых множеств $Z_{\alpha} = X \setminus U_{\alpha}$ любой конечный поднабор Z_1, Z_2, \dots, Z_n имеет непустое пересечение. Поэтому $\bigcap_{\alpha} Z_{\alpha} \neq \emptyset$, а значит, $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \neq X$. \square

Предложение 8.5 (лемма Больцано – Вейерштрасса)

Любое бесконечное подмножество компактного пространства имеет в нём хотя одну предельную точку.

Доказательство. Если точка $p \in X$ не является предельной для подмножества $\Phi \subset X$, то у неё есть открытая окрестность U_p , не содержащая никаких точек из Φ , кроме p . Если ни одна точка в X не является предельной для Φ , открытые множества U_p покрывают X . Выбирая из них конечное покрытие, заключаем, что множество Φ конечно. \square

8.1.8. Предостережения насчёт «сходимости». Напомню, что *последовательностью* точек пространства X называется любое отображение $a : \mathbb{N} \rightarrow X$, и значение этого отображения на числе $k \in \mathbb{N}$ традиционно записывается как $a_k \stackrel{\text{def}}{=} a(k)$. Точка $p \in X$ называется *пределом* такой последовательности, если любая окрестность точки p содержит все члены последовательности, начиная с некоторого.

Упражнение 8.14. Покажите, что сходимость последовательности в стандартной топологии¹ пространства \mathbb{R}^n означает *покоординатную* сходимость, т. е. последовательность точек (a_k)

¹См. прим. 8.5 на стр. 129.

сходится к точке p , если и только если для каждого i последовательность i -тых координат точек последовательности a сходится в \mathbb{R} к i -той координате точки p :

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \iff \forall i = 1, 2, \dots, n \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(a_k) = x_i(p).$$

Говоря о сходимости, следует иметь в виду, что свойства сходящихся последовательностей существенно зависят от используемой топологии и могут быть весьма далеки от известных из начального курса анализа теорем о пределах последовательностей вещественных чисел в стандартной топологии на \mathbb{R} .

УПРАЖНЕНИЕ 8.15. Убедитесь, что в финитной топологии¹ на \mathbb{R} последовательность $x_n = n$ сходится, причём каждая точка $p \in \mathbb{R}$ является для неё пределом.

Кроме того, последовательность не следует путать с *фигурой*, образованной значениями последовательности. Так, точка $p \in X$ называется *предельной* для последовательности $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, если в любую окрестность точки p содержит бесконечно много членов последовательности, а это совсем не то же самое, что точек из образа последовательности. Например, последовательность вещественных чисел $a_n = (-1)^n$ имеет в стандартной топологии на \mathbb{R} ровно две предельные точки, а множество её значений состоит из двух изолированных точек и предельных точек у него вообще нет. Обратите также внимание, что в произвольном топологическом пространстве X из того, что точка p является предельной для последовательности $a : \mathbb{N} \rightarrow X$, вообще говоря, не вытекает, что у последовательности a есть подпоследовательность², для которой p является пределом.

8.2. Метрические пространства. Имеется важный класс топологических пространств, сходимость в которых по своим свойствам очень близка к сходимости в стандартной топологии на вещественной прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3

Множество X , на котором задана вещественная функция двух аргументов $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая $\forall x, y, z \in X$ свойствами

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \varrho(y, x) && \text{(симметричность)} \\ \varrho(x, y) &\geq 0 && \text{(положительность)} \\ \varrho(x, y) &= 0 \iff x = y && \text{(невырожденность)} \\ \varrho(x, z) &\leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) && \text{(неравенство треугольника)} \end{aligned}$$

называется *метрическим пространством*, а функция ϱ — *метрикой* или *расстоянием* на X .

8.2.1. Метрическая топология. В метрическом пространстве X для любых точки $p \in X$ и вещественного числа $\varepsilon > 0$ фигуры

$$B_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid \varrho(p, x) \leq \varepsilon\} \tag{8-2}$$

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid \varrho(p, x) < \varepsilon\} \tag{8-3}$$

¹См. прим. 8.3 на стр. 129.

²Напомним, что подпоследовательностью последовательности $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ называется композиция a с любым монотонно возрастающим отображением $\nu : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$, так что члены подпоследовательности $a \circ \nu$ имеют вид a_{ν_k} .

называется, соответственно, *замкнутым* и *открытым* ε -шарами с центром в p . Открытые ε -шары с рациональными радиусами составляют базу топологии на X , поскольку для любых чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}$ и точек $p, q_1, q_2 \in X$, таких что $p \in \mathring{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \mathring{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$, δ -шар $\mathring{B}_{\delta}(p)$ любого рационального радиуса $\delta < \min(\varepsilon_1 - \varrho(p, q_1), \varepsilon_2 - \varrho(p, q_2))$ содержится в пересечении $\mathring{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \mathring{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$, так как для всех x с $\varrho(x, p) < \delta$ выполняются неравенства треугольника

$$\varrho(x, q_i) \leq \varrho(x, p) + \varrho(p, q_i) < \varepsilon_i - \varrho(p, q_i) + \varrho(p, q_i) = \varepsilon_i \quad i = 1, 2.$$

Топология с базой из открытых шаров рационального радиуса называется *метрической*. Открытыми в метрической топологии являются такие подмножества $U \subset X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый ε -шар с центром в этой точке.

Пример 8.7 (евклидова метрика)

С каждым скалярным произведением (v, w) на \mathbb{R}^n связана *евклидова метрика*, в которой расстояние между точками равно евклидовой длине соединяющего точки вектора

$$\varrho_{\text{euc}}(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} |\overrightarrow{pq}| = \sqrt{(q - p, q - p)}.$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики следуют из симметричности и положительности скалярного произведения, а неравенство треугольника — из неравенства Коши – Буняковского – Шварца¹. В евклидовой метрике ε -шары — это обычные шары радиуса ε .

Упражнение 8.16. Убедитесь, что метрическая топология стандартной евклидовой метрики на \mathbb{R}^n совпадает со стандартной топологией покоординатной сходимости из [прим. 8.5](#) на стр. 129.

Пример 8.8 (sup-метрика в \mathbb{R}^n)

Определим на \mathbb{R}^n расстояние между точками как максимум модулей разностей их координат:

$$\varrho_{\text{sup}}(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |p_i - q_i|. \quad (8-4)$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника для расстояний на евклидовой прямой: так как $|z_i - x_i| \leq |z_i - y_i| + |y_i - x_i|$ при каждом i ,

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{sup}}(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - x_i| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|z_i - y_i| + |y_i - x_i|) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = \varrho_{\text{sup}}(x, y) + \varrho_{\text{sup}}(y, z). \end{aligned}$$

Метрика (8-4) называется *sup-метрикой*.

Упражнение 8.17. Убедитесь, что ε -шарами sup-метрики являются ε -кубы из [прим. 8.5](#).

Таким образом, метрическая топология sup-метрики это и есть стандартная топология на \mathbb{R}^n .

¹См. [сл. 3.3](#) на стр. 35.

ПРИМЕР 8.9 (SUP-МЕТРИКА В $C^0([a, b])$)

Этот пример является бесконечномерным обобщением предыдущего. Определим в пространстве $C^0([a, b])$ непрерывных функций $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sup-метрику формулой¹

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Симметричность, положительность, невырожденность и неравенство треугольника проверяются точно так же, как в предыдущем примере. В sup-метрике ε -шар $B_\varepsilon(f)$ состоит из всех функций, график которых удаляется по вертикали от графика функции f не более, чем на ε .

8.2.2. Отделимость. Из неравенства треугольника вытекает, что любые две различные точки метрического пространства обладают непересекающимися открытыми окрестностями, ибо по неравенству треугольника $\mathring{B}_\varepsilon(p) \cap \mathring{B}_\varepsilon(q) = \emptyset$ при $\varepsilon < \varrho(p, q)/2$. Топология с таким свойством называется *хаусдорфовой*. Таким образом, каждое метрическое пространство хаусдорфово.

УПРАЖНЕНИЕ 8.18. Покажите, что в хаусдорфовом пространстве никакая последовательность не может иметь более одного предела.

Из неравенства треугольника точно также следует, что никакие две точки p и q метрического пространства не могут одновременно содержаться ни в каком шаре радиуса $\varepsilon < \varrho(p, q)/2$. Поэтому в каждом метрическом пространстве пересечение любой последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров исчезающе малого радиуса

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \dots, \quad \text{где} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad (8-5)$$

либо пусто, либо состоит ровно из одной точки. В частности, для любой точки p

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n}(p) = p.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4

Метрическое пространство называется *полным*, если каждая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение (автоматически состоящее из единственной точки).

УПРАЖНЕНИЕ 8.19. Покажите, что пространство \mathbb{R}^n с sup-метрикой из [прим. 8.8](#) полно.

УПРАЖНЕНИЕ 8.20* (по анализу). Покажите, что пространство $C^0([a, b])$ непрерывных функций $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ из [прим. 8.9](#) полно.

ТЕОРЕМА 8.1 (СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКИХ КОМПАКТОВ)

Следующие свойства фигуры Φ в полном метрическом пространстве эквивалентны:

- 1) любое покрытие фигуры Φ открытыми множествами содержит конечное подпокрытие
- 2) любое бесконечное подмножество в Φ имеет в Φ предельную точку
- 3) Φ замкнута и $\forall \varepsilon > 0$ фигуру Φ можно покрыть конечным множеством ε -шаров.

¹Она корректна, поскольку любая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего максимального значения.

Доказательство. В предл. 8.5 мы видели, что импликация (1) \Rightarrow (2) выполняется в любом топологическом пространстве. Докажем импликацию (2) \Rightarrow (3). Пусть точка p является предельной для Φ . Начав с любой точки $x_1 \in \Phi$, для каждого натурального $n \geq 2$ отметим в шаре радиуса $\varrho(p, x_{n-1})/2$ с центром в p какую-нибудь отличную от p точку $x_n \in \Phi$. Таким образом, мы получаем счётное множество точек $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Phi$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.21. Проверьте, что единственной предельной точкой множества X во всём объёмлющем метрическом пространстве является точка p .

Следовательно, $p \in \Phi$ по свойству (2), т. е. фигура Φ замкнута. Пусть для какого-то $\varepsilon > 0$ фигура Φ не покрывается конечным числом ε -шаров. Начав с любой точки $y_1 \in \Phi$, для каждого натурального $k \geq 2$ отметим какую-нибудь точку $y_k \in \Phi \setminus (B_\varepsilon(y_1) \cup B_\varepsilon(y_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(y_{k-1}))$. Таким образом мы получаем счётное множество точек

$$Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Phi,$$

в котором $\varrho(y_n, y_m) > \varepsilon$ для всех $n \neq m$. Поскольку ни в каком шаре радиуса $\varepsilon/3$ не содержится более одной точки $y_i \in Y$, множество Y вообще нет предельных точек, что противоречит (2).

Наконец, докажем импликацию (3) \Rightarrow (1). Пусть открытое покрытие $\Phi = \bigcup_\alpha U_\alpha$ не содержит конечного подпокрытия. Покроем Φ конечным числом шаров радиуса $1/4$ и обозначим через A_1 любой такой шар, что пересечение $\Phi \cap A_1$ не содержится ни в каком конечном наборе множеств U_α . Далее для каждого натурального $n \geq 2$ покрываем Φ конечным числом шаров радиуса $1/4^n$ и обозначаем через A_n любой такой шар, что пересечение $A_n \cap (\Phi \cap A_{n-1})$, как и ранее, не содержится ни в каком конечном наборе множеств U_α . Обратите внимание, что $A_n \cap A_{n-1} \cap \Phi \neq \emptyset$, и радиус шара A_n вчетверо меньше, чем у A_{n-1} . Обозначим через D_n шар вдвое большего, чем у A_n радиуса $2/4^n$ с тем же центром, что и шар A_n (см. рис. 8◊1).

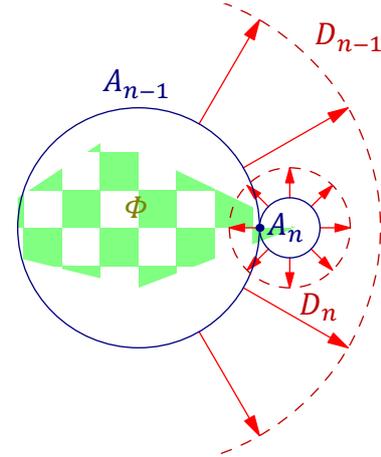


Рис. 8◊1. Удвоение шаров.

Рис. 8◊1. Удвоение шаров. Обратите внимание, что $A_n \cap A_{n-1} \cap \Phi \neq \emptyset$, и радиус шара A_n вчетверо меньше, чем у A_{n-1} . Обозначим через D_n шар вдвое большего, чем у A_n радиуса $2/4^n$ с тем же центром, что и шар A_n (см. рис. 8◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 8.22. Убедитесь, что $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots$ и радиусы шаров D_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

В силу полноты объёмлющего пространства все шары D_n имеют общую точку q . Поскольку любой из стягивающихся к q шаров D_n имеет непустое пересечение с Φ , точка q лежит в $\bar{\Phi} = \Phi$ и накрывается некоторым открытым множеством U из набора U_α . Но тогда все шары A_k , начиная с некоторого, лежат внутри U , а значит, $\Phi \cap A_k$ покрывается одним множеством U вопреки производившемуся нами выбору шаров A_k . Противоречие. \square

Замечание 8.1. Свойство (1) из теор. 8.1 называется *компактностью*, свойство (2) — *секвенционной компактностью* (или *свойством Больцано–Вейерштрасса*), а свойство (3) — *вполне ограниченностью*. Вполне ограниченность влечёт ограниченность в обычном смысле: если фигура покрывается конечным набором шаров, то она содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса. В пространстве \mathbb{R}^n с суп-метрикой из прим. 8.8 верно и обратное: всякая ограниченная фигура вполне ограничена, поскольку если Φ содержится в кубе со стороной d , то деля его координатными гиперплоскостями на N^n кубиков со стороной $d/N < \varepsilon$, получаем покрытие Φ конечным набором ε -кубов. Однако в более сложных метрических пространствах встречаются ограниченные, но не вполне ограниченные фигуры.

УПРАЖНЕНИЕ 8.23 (по анализу). Убедитесь, что единичный шар с центром в нуле не вполне ограничен в пространстве $C^0([a, b])$ непрерывных функций $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ из [прим. 8.9](#)

Следствие 8.1

Каждая непрерывная функция $f : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ на компактной фигуре Φ в полном метрическом пространстве X ограничена и достигает своих максимального и минимального значений в некоторых точках фигуры X .

Доказательство. Согласно [предл. 8.3](#) образ $f(\Phi) \subset \mathbb{R}$ компактен, а значит, ограничен и замкнут. Из ограниченности $f(\Phi)$ вытекает, что у $f(\Phi)$ есть конечные точные верхняя и нижняя грани. Из замкнутости $f(\Phi)$ вытекает, что обе они принадлежат $f(\Phi)$. \square

8.3. Нормы. В вещественной аффинной геометрии обычно используют метрики, инвариантные относительно параллельных переносов и однородные по отношению к гомотетиям. Первое означает, что расстояние $\varrho(x, y) = \varrho(\overline{xy})$ зависит только от вектора \overline{xy} , а не от самих точек x и y . Второе означает, что для любых вектора v и числа λ выполняется равенство $\varrho(\lambda v) = |\lambda| \varrho(v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5

Функция $V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$, на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} называется *нормой*, если для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнены свойства

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0 && \text{(положительность)} \\ \|v\| = 0 &\iff v = 0 && \text{(невырожденность)} \\ \|\lambda \cdot v\| &= |\lambda| \cdot \|v\| && \text{(однородность)} \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| && \text{(неравенство треугольника).} \end{aligned}$$

Таким образом, всякая инвариантная относительно сдвигов и однородная относительно гомотетий метрика на аффинном пространстве, ассоциированном с векторным пространством V над полем \mathbb{R} , имеет вид $\varrho(x, y) = \|\overline{xy}\|$ для некоторой нормы $v \mapsto \|v\|$ на V .

Например, евклидова метрика из [прим. 8.7](#) получается из *евклидовой нормы* $|v| = \sqrt{(v, v)}$, а *sup-метрика* из [прим. 8.8](#) — из *sup-нормы*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\text{st}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (8-6)$$

которую мы в дальнейшем будем называть *стандартной нормой* на \mathbb{R}^n .

ЛЕММА 8.1

Любая норма $v \mapsto \|v\|$ на пространстве \mathbb{R}^n непрерывна в стандартной топологии.

Доказательство. Обозначим через $e_i \in \mathbb{R}^n$ стандартные базисные векторы и положим

$$M = \max_i \|e_i\|.$$

Тогда норма любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ оценивается сверху как

$$\|v\| = \left\| \sum x_i e_i \right\| \leq \sum |x_i| \cdot \|e_i\| \leq nM \max_i |x_i| = nM \cdot \|v\|_{\text{st}}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta < \varepsilon/2nM$ стандартная кубическая δ -окрестность вектора v

$$\mathring{B}_\delta(v) = \{w \in \mathbb{R}^n : \|v - w\|_{\text{st}} < \delta\}$$

переводится норменным отображением $w \mapsto \|w\|$ внутрь ε -окрестности числа $\|v\|$ в \mathbb{R} :

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| < nM \cdot \|v - w\|_{\text{st}} < \varepsilon.$$

□

8.3.1. Евклидовы нормы. Норма $v \mapsto \|v\|$ на вещественном векторном пространстве V называется *евклидовой*, если $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ для некоторой евклидовой структуры (v, w) на V . Стандартная норма (8-6) не является евклидовой, поскольку стандартная норма всех сторон и всех диагоналей квадрата, натянутого на стандартные базисные орты в \mathbb{R}^2 , равна 1. Тогда как для евклидовых норм имеет место *тождество параллелограмма*¹

$$(v + w, v + w) + (v - w, v - w) = 2(v, v) + 2(w, w),$$

которое на языке норм записывается в виде

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \quad (8-7)$$

Предложение 8.6

Норма $v \mapsto \|v\|$ евклидова, если и только если для неё выполняется тождество (8-7).

Доказательство. Для евклидова скалярного произведения тождество (8-7) очевидно выполняется. Рассмотрим произвольную норму $v \mapsto \|v\|$ на V . Функция $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, заданная правилом

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} (\|v + w\| - \|v - w\|)/4$$

симметрична, невырождена и положительна. Очевидно также, что

$$\forall v, w \in V \quad (-v, w) = -(v, w) = (v, -w).$$

Упражнение 8.24. Покажите, что если норма удовлетворяет тождеству (8-7), то

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) \quad \text{и} \quad (v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2).$$

Согласно [упр. 8.24](#), для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $v, w \in V$ выполняется равенство $(n \cdot v, w) = n \cdot (v, w)$. Полагая в нём $u = n \cdot v$, получаем $(u/n, w) = (u, w)/n$ и заключаем, что равенство

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w) \quad (8-8)$$

выполняется для всех $\lambda \in \mathbb{Q}$. Из [лем. 8.1](#) вытекает, что при фиксированных $v, w \in \mathbb{R}^n$ обе части равенства (8-8) непрерывны как функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ от аргумента $\lambda \in \mathbb{R}$.

Упражнение 8.25. Убедитесь в этом.

Так как эти непрерывные функции совпадают на плотном подмножестве² $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, они совпадают всюду в \mathbb{R} . Вместе с аддитивностью из [упр. 8.24](#) это означает билинейность функции (v, w) . □

¹Утверждающее, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон.

²Подмножество топологического пространства называется *плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством.

8.3.2. Топологическая эквивалентность норм.

$$v \mapsto \|v\|_1 \quad \text{и} \quad v \mapsto \|v\|_2$$

на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} топологически эквивалентными, если ассоциированные с ними метрики $\varrho_1(p, q) = \|\overline{pq}\|_1$ и $\varrho_2(p, q) = \|\overline{pq}\|_2$ задают одну и ту же метрическую топологию на аффинном пространстве $A(V)$. Поскольку задаваемая нормой метрика трансляционно инвариантна, ε -окрестности любой точки являются параллельными переносами ε -окрестностей нуля. Таким образом, топологическая эквивалентность норм означает, что в каждой открытой шаре первой нормы с центром в нуле содержится некоторый открытый шар второй нормы с центром в нуле и наоборот.

ТЕОРЕМА 8.2

Любая норма на \mathbb{R}^n топологически эквивалентна стандартной sup-норме (8-6).

Доказательство. Достаточно показать, что для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ на \mathbb{R}^n существуют такие вещественные положительные константы μ и M , что для всех $v \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\mu \cdot \|v\|_{\text{st}} \leq \|v\| \leq M \cdot \|v\|_{\text{st}}. \quad (8-9)$$

В этом случае стандартный ε -куб с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{R}^n$ будет содержать внутри себя ε/M -шар рассматриваемой нормы и, наоборот, каждый ε -шар этой нормы будет содержать внутри себя стандартный $\varepsilon\mu$ -куб. Поскольку граница стандартного 1-куба с центром в нуле $\partial B_{1,\text{st}}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_{\text{st}} = 1\}$ компактна в стандартной топологии, непрерывная по лем. 8.1 функция $v \mapsto \|v\|$ достигает на ней своих максимального и минимального значений

$$M = \sup_{v \in K} \|v\| \quad \text{и} \quad \mu = \inf_{v \in K} \|v\|,$$

причём $\mu > 0$ в силу невырожденности нормы. Таким образом, для всех $w \in K$ мы имеем неравенства $0 < \mu \leq \|w\| \leq M < \infty$. Подставляя в них $w = v/\|v\|_{\text{st}}$ получаем для любого $v \neq 0$ требуемые неравенства (8-9). \square

Следствие 8.2

Сходимость в метрической топологии, заданной на \mathbb{R}^n при помощи произвольной нормы, означает покоординатную сходимость в какой-нибудь (а следовательно и в любой) системе аффинных координат.

8.4. Выпуклость. В аффинном пространстве $A(V)$ над полем \mathbb{R} барицентрическая комбинация

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m, \quad \sum x_i = 1,$$

точек $p_i \in A$ называется *выпуклой*, если все коэффициенты $x_i \geq 0$. Фигура Φ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации своих точек.

Упражнение 8.26. Покажите, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками p, q она содержала и соединяющий их отрезок

$$[p, q] = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu > 0\}.$$

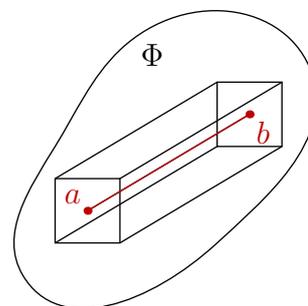


Рис. 8.2. Выпуклость внутренности.

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\text{conv}(\Phi)$. Иначе $\text{conv}(\Phi)$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ .

Предложение 8.7

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε -кубами $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε -кубами (см. рис. 8♦2). Для доказательства второго заметим, что если $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ и $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lambda a + \mu b.$$

Поэтому любая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ , если таковыми были его концы a и b . \square

Упражнение 8.27. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является её замыканием, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является её замыканием.

Пример 8.10 (симплексы)

Выпуклая оболочка $k + 1$ точек p_0, p_1, \dots, p_k , не лежащих ни в какой $(k - 1)$ -мерной плоскости, называется k -мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i p_i \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (8-10)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В аффинных координатах (x_1, x_2, \dots, x_n) с началом в p_0 относительно базиса $e_i = \overline{p_0 p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, симплекс (8-10) задаётся системой из $(n + 1)$ линейных (неоднородных) неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1. \end{cases} \quad (8-11)$$

т. е. является пересечением $(n + 1)$ полупространств. Поскольку в точке с координатами

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n} \right)$$

все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε -кубом. Таким образом, выпуклая оболочка любых $(n + 1)$ не лежащих в одной гиперплоскости точек пространства \mathbb{R}^n имеет непустую внутренность.

Упражнение 8.28. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_m}]$, где $m < n$ и $v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

8.4.1. Геометрическое описание норм. Поскольку все нормы на \mathbb{R}^n задают одну и ту же топологию, для любой нормы $v \mapsto \|v\|$ её единичный шар с центром в нуле

$$B_1(0) = \{v \in V : \|v\| \leq 1\} \quad (8-12)$$

ограничен, замкнут и содержит нуль в качестве внутренней точки. Из однородности нормы вытекает, что этот шар центрально симметричен относительно нуля, а из неравенства треугольника — что он выпуклый: для любых $v, w \in B_1(0)$ и неотрицательных $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ с $\lambda + \mu = 1$ выполняется неравенство $\|\lambda v + \mu w\| \leq \lambda \|v\| + \mu \|w\| \leq 1$. Норма $v \mapsto \|v\|$ однозначно восстанавливается по единичному шару (8-12) как

$$\|v\| = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid \lambda^{-1}v \in B_1(0)). \quad (8-13)$$

Предложение 8.8

Формулы (8-12) и (8-13) устанавливают биекцию между нормами на \mathbb{R}^n и выпуклыми центрально симметричными относительно нуля компактами в \mathbb{R}^n , содержащими нуль в качестве внутренней точки.

Доказательство. С учётом сказанного выше, нам остаётся лишь проверить, что построенная по любому удовлетворяющему условиям предложения выпуклому компакт Φ функция

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda\Phi)$$

является нормой на \mathbb{R}^n . Положительность, невырожденность и однородность этой функции достаточно проверить при $n = 1$, где они очевидны. Неравенство треугольника следует из выпуклости фигуры Φ . Действительно, для всех $v, w \in V$ точка

$$q = \frac{v+w}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} = \frac{\|v\|_\Phi}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} \cdot \frac{v}{\|v\|_\Phi} + \frac{\|w\|_\Phi}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi} \cdot \frac{w}{\|w\|_\Phi}$$

является выпуклой барицентрической комбинацией точек $v/\|v\|_\Phi$ и $w/\|w\|_\Phi$, лежащих в Φ . Поэтому $q \in \Phi$, откуда $\|q\|_\Phi \leq 1$, т. е. $\|v+w\|_\Phi \leq \|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi$. \square

8.4.2. Опорные гиперплоскости. Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ над n -мерным векторным пространством $V \simeq \mathbb{R}^n$. Аффинные отображения $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называются *аффинными функционалами* на \mathbb{A}^n . Если зафиксировать какую-нибудь начальную точку $p \in \mathbb{A}^n$, то всякий аффинный функционал можно записать в виде $a = a_p + \alpha$, где число $a_p = a(p) \in \mathbb{R}$ равно значению функционала a в точке p , а ковектор $\alpha = D_a \in V^*$ равен дифференциалу аффинного отображения a . Таким образом, действие функционала a на произвольную точку $q \in \mathbb{A}^n$ задаётся формулой $a(q) = a_p + \alpha(\overline{pq})$.

Ограничение аффинного функционала a на любой отрезок

$$[p, q] = \{tp + (1-t)q \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{A}^n$$

представляет собою «школьную» линейную функцию вида $t \mapsto \alpha t + \beta$ на отрезке $[0, 1]$. Для такой функции имеются следующие исключаяющие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный

знак на полуинтервале $[p, q] \setminus z$, либо $z \in (a, b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p, z]$ и $(z, b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт разбиение аффинного пространства \mathbb{A}^n в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости

$$H_a \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\},$$

и двух выпуклых открытых полупространств

$$\dot{H}_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\} \quad \text{и} \quad \dot{H}_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}. \quad (8-14)$$

Любой отрезок $[p, q]$ с $p \in \dot{H}_a^+$ и $q \in \dot{H}_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p, q]$. Замыкания полупространств (8-14)

$$H_a^+ = \dot{H}_a^+ \sqcup H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geq 0\} \quad \text{и} \quad H_a^- = \dot{H}_a^- \sqcup H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leq 0\} \quad (8-15)$$

имеют общую границу $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$ и называются *замкнутыми полупространствами* аффинного функционала $a \neq \text{const}$.

ЛЕММА 8.2

В аффинном пространстве \mathbb{A}^n размерности $n \geq 2$ для любого открытого выпуклого множества U и любой точки $p \notin U$ существует проходящая через p и не пересекающаяся с U прямая.

Доказательство. Обозначим через $C \subset \mathbb{A}^n$ объединение всех пересекающих U открытых лучей с началом в p , т. е. множеств вида $]p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overrightarrow{pu} \mid t > 0\}$ со всевозможными $u \in U$. Из рис. 8◊3 и рис. 8◊4 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо вообще не пересекает C , либо пересекает C по одному из лучей $]p, u)$, все точки которого являются внутренними точками C , а все точки дополнения $\ell \setminus [p, u)$ к замкнутому лучу являются для C внешними (см. рис. 8◊3). В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку $n > 1$, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp) . На ней есть точка $r \in \partial C$. Прямая (pr) не пересекает $C \supset U$, т. к. содержит граничную для C точку $r \neq p$. \square

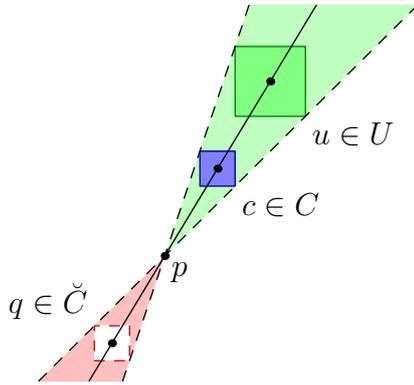


Рис. 8◊3. Открытость C и непустота \check{C} .

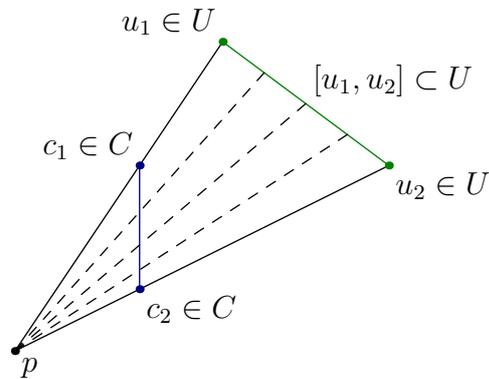


Рис. 8◊4. Выпуклость C .

Следствие 8.3

Каждое¹ аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}^n$, не пересекающее открытого выпуклого множества $U \subset \mathbb{A}^n$, содержится в некоторой не пересекающей U гиперплоскости².

¹В том числе состоящее из единственной точки, т. е. нульмерное.

²Т. е. аффинном подпространстве коразмерности 1.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$ (возможно нулевым). Из всех векторных подпространств в \mathbb{R}^n , которые содержат W и не пересекают U , выберем какое-нибудь максимальное по включению подпространство H . Возьмём любое дополнительное к H подпространство H' , так что $H \oplus H' = \mathbb{R}^n$, и спроектируем \mathbb{R}^n на H' вдоль H . Поскольку отрезки спроектируются при этом в отрезки, а кубы — в кубы, и $H \cap U = \emptyset$, множество U спроектируется в открытое выпуклое подмножество H' , не содержащее нуля. Если $\dim H' > 1$, то по лем. 8.2 в нём найдётся одномерное подпространство L , не пересекающее проекцию U . Но тогда подпространство $H \oplus L \subset \mathbb{R}^n$ содержит Π , не пересекает U и строго больше, чем H , что противоречит выбору H . Мы заключаем, что $\dim H' = 1$, и значит, H является искомой гиперплоскостью. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6 (опорные гиперплоскости)

Гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{R}^n$ называется *опорной гиперплоскостью* фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, если

$$H_a \cap \partial\Phi \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \Phi \subset H_a^+.$$

В этом случае полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а аффинный функционал a — *опорным функционалом* фигуры Φ .

ТЕОРЕМА 8.3

Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если в Φ есть $(n + 1)$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то согласно прим. 8.10 внутренность $\overset{\circ}{\Phi} \neq \emptyset$. Проведём через p гиперплоскость H_a , не пересекающую $\overset{\circ}{\Phi}$. Функционал a имеет на $\overset{\circ}{\Phi}$ постоянный знак, т. к. в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_a \cap \overset{\circ}{\Phi}$. Меняя, если нужно, знак у a , мы можем считать, что $\overset{\circ}{\Phi} \subset H_a^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании $\overset{\circ}{\Phi}$, а это замыкание — в замыкании $\overset{\circ}{\Phi}$, мы заключаем, что $\Phi \subset H_a^+$. \square

ТЕОРЕМА 8.4

Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z , мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z . Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \overset{\circ}{Z}$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $a(p) > 0$ и $a(r) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т. е. $q \notin H_a^+$. \square

8.4.3. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ . Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются

вершинами. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 8◊5, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерные грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ .

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ , если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть нульмерные грани, возникающие из всевозможных цепочек вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , грань грани грани фигуры Φ , и т. д.. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ , хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ .



Рис. 8◊5.

ТЕОРЕМА 8.5

Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. \square

Предложение 8.9

Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ . Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Для любого такого векторного подпространства $U' \subset V$, что $U \oplus U' = V$, замкнутая выпуклая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p + W_1$ и $p + W_2$ содержатся в Φ , то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p . Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p + U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом

содержащегося в Φ интервала $[p, r[= \{(1-t)p + tr \mid 0 \leq t < 1\}$ (см. рис. 8◊6), ибо

$$(1-t)p + t(q+u) = (1-t)\left(p + \frac{t}{1-t}u\right) + tq \in \Phi.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p+U) \times (p+U')$, в котором $p+U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p+u+u' \in \Phi$ точка $p+u' = q-u \in q+U$ лежит в $(p+U') \cap \Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p+u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p+u'+U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p+U) \times \Phi'$. \square

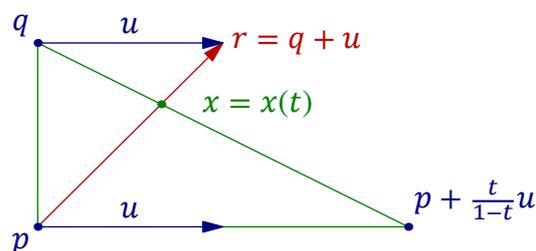


Рис. 8◊6. $\overline{px} : \overline{xr} = t : (1-t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7 (цилиндры)

Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = \mathbb{A}(U) \times B \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset \mathbb{A}(W)$ это непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром с основанием B и образующей $\mathbb{A}(U)$* . Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $\mathbb{A}(U)$ и является аффинным пространством.

Следствие 8.4

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

- 1) Φ является цилиндром
- 2) Φ не имеет крайних точек
- 3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) \Rightarrow (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim \Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (2) \Rightarrow (3) вытекает из предл. 8.9. \square

§9. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

В этом параграфе мы будем часто иметь дело с парами двойственных друг другу конечномерных векторных пространств V, V^* над полем \mathbb{R} . Чтобы подчеркнуть симметрию между векторами и ковекторами, мы обозначаем значение (результат вычисления) ковектора $\psi \in V^*$ на векторе $v \in V$ через $\langle \psi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \psi(v) = \text{ev}_v(\psi)$. Для аффинного функционала $a : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ мы, как и ранее, полагаем $H_a = \{x \in \mathbb{A}(V) \mid a(x) = 0\}$ и $H_a^+ = \{x \in \mathbb{A}(V) \mid a(x) \geq 0\}$.

9.1. Выпуклые многогранники. Конечное пересечение замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+, \quad (9-1)$$

задаваемых аффинными функционалами $a_i : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, называется *выпуклым многогранником* в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$. Например, выпуклыми многогранниками являются всё пространство $\mathbb{A}(V) = H_1^+$, задаваемое неравенством $1 \geq 0$ с тождественно равным единице функционалом a , а также пустое множество $\emptyset = H_{-1}^+$, задаваемое неравенством $-1 \geq 0$. Любое аффинное подпространство $p + U \subset V$, где $p \in V$ и $U \subset V$ суть фиксированные вектор и подпространство, тоже является выпуклым многогранником, поскольку задающая его система неоднородных линейных уравнений $\langle \psi_i, v \rangle = \langle \psi_i, p \rangle$ на вектор $v \in V$, где ковекторы $\psi_i \in V^*$ пробегает какой-нибудь базис в $\text{Ann } U$, может быть переписана в виде эквивалентной системы неравенств $\langle \psi_i, p \rangle - \langle \psi_i, v \rangle \geq 0$ и $-\langle \psi_i, p \rangle + \langle \psi_i, v \rangle \geq 0$. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является многогранником. В частности, сечение выпуклого многогранника любым аффинным подпространством является выпуклым многогранником.

9.1.1. Перечисление граней. Напомню, что *гранью* замкнутого выпуклого множества M называется пересечение M с любым его опорным полупространством. Каждый непустой выпуклый многогранник, отличный от всего пространства, имеет грани, и все они тоже являются непустыми выпуклыми многогранниками. Сам многогранник M является своей гранью, если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с M грань *несобственной*, а все остальные грани $\Gamma \subsetneq M$ — *собственными*. Под *размерностью* многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится. В частности, размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

ТЕОРЕМА 9.1

Для многогранника (9-1) и каждого непустого подмножества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ положим $H_I = \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$. Пересечение $\Gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M , и все грани многогранника M получаются таким образом. Для каждой непустой грани Γ_I аффинное подпространство $H_I \subset \mathbb{A}(V)$ является наименьшим содержащим грань Γ_I аффинным пространством. Точка $p \in \Gamma_I$ является внутренней точкой грани¹ Γ_I , если и только если $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$.

Доказательство. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, сумма $a_I = \sum_{i \in I} a_i$ является опорным функционалом² для M и $\Gamma_I = M \cap H_{a_I}$. Таким образом, все непустые многогранники Γ_I являются

¹В топологии подпространства H_I .

²См. *опр.* 8.6 на стр. 144.

гранями многогранника M . Покажем, что для каждой такой грани Γ_I выполнены два последних утверждения теоремы. Пусть точка $p \in \Gamma_I = H_I \cap M$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Поскольку эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности точки p в аффинном пространстве H_I , точка p входит в Γ_I вместе с этой кубической окрестностью. Это, во-первых, означает что подпространство H_I является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ_I , а во-вторых, что точка p является внутренней точкой грани Γ_I . Напротив, если хоть один функционал a_k зануляется в точке p , лежащей в какой-либо грани $\Gamma' \subseteq M$, но при этом положителен в некоторой другой точке q той же грани, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ' , т. к. в противном случае, немного продлив отрезок $[q, p]$ за точку p , мы получим в грани Γ' точку, где функционал a_k строго отрицателен.

Рассмотрим теперь произвольную грань $\Gamma = H_b \cap M$, где b — какой-либо опорный функционал многогранника M . Обозначим через $I = I(\Gamma) \subset \{1, 2, \dots, m\}$ множество номеров всех тех задающих M функционалов a_i , для которых $\Gamma \subset H_{a_i}$. Поскольку для каждого $j \notin I$ найдётся такая точка $q_j \in \Gamma$, что $a_j(q_j) > 0$, все функционалы a_j с $j \notin I$ строго положительны в барицентре q_Γ всех точек q_j . Если $I = \emptyset$, то вообще все функционалы a_i строго положительны в точке q_Γ , а значит, и на некотором кубе с центром в q_Γ . Тем самым, q_Γ является внутренней¹ точкой многогранника M и не лежит ни в какой грани. Мы заключаем, что для любой грани $\Gamma \subseteq M$ множество $I = I(\Gamma)$ непусто и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. В частности, и грань $\Gamma_I = H_I \cap M$, и аффинное подпространство H_I тоже непусты, а точка q_Γ является, по уже доказанному, внутренней точкой грани Γ_I . Поэтому для любой точки $p \in \Gamma_I$ отрезок $[p, q_\Gamma]$ можно немного продлить за точку q_Γ так, чтобы его новый конец r всё ещё лежал в Γ_I . Из соотношений $b(p) \geq 0$, $b(q_\Gamma) = 0$, $b(r) \geq 0$ вытекает, что $b(r) = b(p) = 0$. Следовательно, каждая точка $p \in \Gamma_I$ лежит в грани Γ , откуда $\Gamma = \Gamma_I$. \square

Следствие 9.1

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. \square

Следствие 9.2

Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. \square

Следствие 9.3

Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. \square

Следствие 9.4

Непустой выпуклый многогранник M тогда и только тогда является цилиндром², когда он не имеет вершин. \square

9.1.2. Координатное описание. Выпуклый многогранник

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ \subset \mathbb{A}(V)$$

является прообразом положительного координатного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \subset \mathbb{R}^m$ при аффинном отображении $a : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (a_1(v), a_2(v), \dots, a_m(v))$, которое мы будем коротко записывать в виде $v \mapsto b + Av$, где точка $b = a(0) \in \mathbb{R}^m$ является образом какой-либо начальной

¹В топологии всего объемлющего пространства.

²См. *опр. 8.7* на стр. 146. Многогранники, которые являются цилиндрами, также называют *призмами*.

точки $0 \in \mathbb{A}(V)$, а линейное отображение $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \dots, \alpha_m(v))$, задаётся дифференциалами $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$ аффинных функционалов a_i . Таким образом,

$$M = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\}.$$

При замене вектора $b \in \mathbb{R}^m$ вектором $b' = b + Au$ с произвольным $u \in V$ многогранник M параллельно сдвигается на вектор $-u$, т. к.

$$M' = \{v \in V \mid b' + Av \geq 0\} = \{v \in V \mid b + A(u + v) \geq 0\} = \{v \in V \mid u + v \in M\}.$$

Иначе говоря, перенос начала координат в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ равносильен сдвигу вектора $b \in \mathbb{R}^m$ на вектор из подпространства $\text{im } A \subset \mathbb{R}^m$.

Упражнение 9.1. Убедитесь, что положительный координатный гипероктант $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ не содержит аффинных подпространств положительной размерности.

Предложение 9.1

Многогранник $M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\}$ является цилиндром¹, если и только если $\ker A \neq 0$, и в этом случае $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M'$, где многогранник M' не содержит аффинных подпространств положительной размерности и аффинно конгруэнтен многограннику $M_{\text{red}} = (b + \text{im } A) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, высекаемому положительным координатным гипероктантом $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ из аффинного пространства $b + \text{im } A \subset \mathbb{R}^m$ ассоциированного с векторным пространством $\text{im } A$.

Доказательство. Если многогранник M содержит аффинное подпространство $p + W$, то

$$b + A(p + W) = b + A(p) + A(W) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m.$$

По [упр. 9.1](#) такое возможно лишь при $A(W) = 0$, т. е. когда $W \subset \ker A$. С другой стороны, для любой точки $p \in M$ аффинное пространство $p + \ker A$ целиком лежит в многограннике M , т. к. для всех $u \in \ker A$ имеем $b + A(p + u) = b + A(p) \geq 0$. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker A \oplus U$. Положим $M' = M \cap \mathbb{A}(U)$. Тогда

$$M = \{(t, u) \in \ker A \oplus U \mid b + Au \geq 0\} = \mathbb{A}(\ker A) \times M',$$

а ограничение аффинного отображения $v \mapsto b + Av$ на подпространство U задаёт аффинный изоморфизм между $\mathbb{A}(U)$ и аффинным подпространством $b + \text{im } A \subset \mathbb{R}^m$. Он биективно отображает многогранник M' на многогранник M_{red} . \square

9.1.3. Приведённые многогранники. Не содержащие аффинных подпространств положительной размерности многогранники называются *приведёнными*. Если многогранник

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\}$$

приведён, то линейное отображение $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ инъективно и позволяет отождествить векторное пространство V с подпространством $\text{im } A \subset \mathbb{R}^m$. Таким образом, каждое приведённое пересечение m полупространств может быть описано как пересечение положительного координатного гипероктанта в \mathbb{R}^m с аффинным подпространством вида $b + V \subset \mathbb{R}^m$

$$M = (b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m. \quad (9-2)$$

¹См. [опр. 8.7](#) на стр. 146.

Вектор b удобно считать начальной точкой аффинного пространства $b + V$. Сдвиг вектора b на вектор из V приводит к параллельному переносу многогранника M внутри $A(V)$. С точностью до такого параллельного переноса, приведённый многогранник (9-2) определяется классом $[b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V$ вектора $b \in \mathbb{R}^m$ в фактор пространстве¹ \mathbb{R}^m / V .

На практике вектор b обычно задаётся столбцом своих координат

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

а подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ — либо как линейная оболочка k столбцов v_1, v_2, \dots, v_n какой-нибудь $m \times k$ матрицы A , либо как пространство решений системы из k линейных уравнений $A^t y = 0$ на столбец $y \in \mathbb{R}^m$. В первом случае многогранник M образован всеми такими линейными комбинациями $\sum v_j x_j$ столбцов матрицы A , коэффициенты $x \in \mathbb{R}^k$ которых удовлетворяют неравенствам $b + Ax \geq 0$. При этом $\dim M \leq \dim V = \text{rk } A$. Во втором случае многогранник M состоит из всех столбцов $z = b + y \in \mathbb{R}^m$, которые лежат в положительном координатном гипероктанте $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ и удовлетворяют системе из k неоднородных линейных уравнений $Az = Ab$. При этом $\dim M \leq \dim V = m - \text{rk } A$.

9.2. Выпуклые многогранные конусы. Множество всех неотрицательных линейных комбинаций векторов из заданного непустого конечного множества R в векторном пространстве V называется *выпуклым многогранным конусом*, порождённым множеством R , и обозначается

$$\sigma_R = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, v_i \in R \}. \quad (9-3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.2. Убедитесь, что σ_R является замкнутой выпуклой фигурой в $A(V)$.

Очевидно, что всякий конус σ_R не пуст, содержит нулевой вектор $0 \in V$ и вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ содержит весь замкнутый луч $[0, v) = \{ vt \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$.

ЛЕММА 9.1

Все опорные гиперплоскости любого выпуклого многогранного конуса σ проходят через нуль.

Доказательство. Пусть опорная гиперплоскость H_a проходит через ненулевую точку $p \in \partial\sigma$. Если $a(0) > 0$, то ограничение опорного функционала a на луч $[0, p) \subset \sigma$ должно менять в точке p знак, что невозможно. \square

ЛЕММА 9.2 (ЛЕММА ФАРКАША)

Если вектор $u \in V$ не лежит в многогранном конусе σ_R , то существует такой *линейный* функционал $\alpha \in V^*$, что $\langle \alpha, u \rangle < 0$ и $\langle \alpha, v \rangle \geq 0$ для всех $v \in \sigma_R$.

Доказательство. Согласно теор. 8.4 на стр. 144, любой многогранный конус σ_R является пересечением своих опорных полупространств. По лем. 9.1 каждое такое полупространство имеет вид $\alpha^+ = \{ v \in V \mid \langle \alpha, v \rangle \geq 0 \}$ для подходящего ковектора $\alpha \in V^*$. Следовательно, для каждого $u \notin \sigma_R$ существует такой линейный функционал $\alpha \in V^*$, что $u \notin \alpha^+$, а $\sigma_R \subset \alpha^+$. \square

¹См. п.° 4.6 на стр. 67.

ТЕОРЕМА 9.2 (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Подмножество $\sigma \subset V$ является выпуклым многогранным конусом, если и только если оно является пересечением конечного множества *векторных* полупространств

$$\alpha^+ = \{v \in V \mid \langle \alpha, v \rangle \geq 0\}, \quad \alpha \in V^*. \quad (9-4)$$

СОГЛАШЕНИЕ 9.1. Для упрощения формулировок мы разрешаем ковектору α в формуле (9-4) принимать и нулевое значение. Соответствующее «полупространство» $0^+ = V$ называется *несобственным*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОР. 9.2. Пусть множество векторов $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа полупространств (9-4). Тогда σ является выпуклым многогранником в $\mathbb{A}(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника σ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset \mathbb{A}(V)$ является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 9.3 на стр. 148 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин — конечного множества векторов $R \subset \sigma$. Поэтому для любого ненулевого вектора $v \in \sigma$ вектор $v / \|v\|_{st} \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из R , а значит, и сам вектор v это неотрицательная линейная комбинация ненулевых векторов из R .

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, будучи замкнутым выпуклым множеством, является пересечением полупространств (9-4) по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\langle \alpha, v \rangle \geq 0$ для каждого $v \in R$. Множество этих ковекторов α является пересечением конечного числа векторных полупространств $v^+ = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, v \rangle \geq 0\}$, где v пробегает множество R . По уже доказанному, такое пересечение представляет собою выпуклый многогранный конус $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$ для некоторого конечного множества ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\langle \alpha, v \rangle \geq 0$, $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\langle \psi, v \rangle \geq 0$, $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} \psi^+$. \square

ПРИМЕР 9.1 (ПРОЕКТИВНЫЙ КОНУС МНОГОГРАННИКА)

Рассмотрим векторное пространство $W = \mathbb{R} \oplus V = \{(t, v) \mid t \in \mathbb{R}, v \in V\}$ и вложим в него аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$ в качестве аффинной гиперплоскости

$$H_{(t-1)} = e + V = \{(1, v) \in W \mid v \in V\}, \quad (9-5)$$

где $e = (1, 0) \in W$, а $t \in W^* : (t, v) \mapsto t$. Всякий выпуклый многогранник в $\mathbb{A}(V)$

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\} = \{(1, v) \in W \mid b + Av \geq 0\}$$

высекается из гиперплоскости (9-5) выпуклым многогранным конусом

$$\pi_M \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, v) \in W \mid bt + Av \geq 0\} \subset W, \quad (9-6)$$

который называется *проективным конусом* многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$ и представляет собою прообраз положительного координатного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ при *линейном* отображении

$$W \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (t, v) \mapsto bt + Av,$$

или, что то же самое, пересечение векторных полупространств $\beta_i^+ = \{w \in W \mid \langle \beta_i, w \rangle \geq 0\}$, задаваемых ковекторами $\beta_i : W \rightarrow \mathbb{R}, (t, v) \mapsto b_i t + \langle \alpha_i, v \rangle$, которые продолжают дифференциалы $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ аффинных функционалов $a_i : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ до линейных форм на пространстве $W = \mathbb{R}e \oplus V$ по правилу $\langle \beta_i, e \rangle \stackrel{\text{def}}{=} a_i(0) = b_i$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Покажите, что проективный конус $\pi_M \subset W$ непустого выпуклого многогранника $M \subset e + V \subset W$ является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, проходящих через точки $w = (1, v) \in M$ (см. рис. 9◊1).

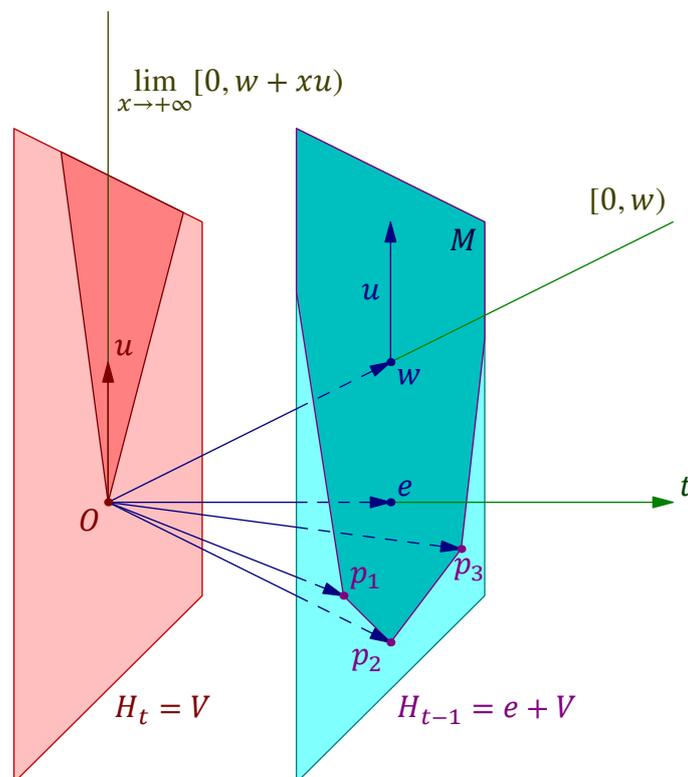


Рис. 9◊1. Предельное положение луча $[0, w + xu) = \{s(w + xu) \mid s \geq 0\}$ при $x \rightarrow +\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.4. Убедитесь, что выпуклая оболочка любого конечного множества точек P аффинной гиперплоскости $e + V \subset W$ высекается из неё конусом $\sigma_P \subset W$.

ТЕОРЕМА 9.3 (ТЕОРЕМА Минковского – Вейля)

Выпуклая оболочка любого конечного набора точек является ограниченным выпуклым многогранником, и наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно, своих вершин.

Доказательство. Выпуклая оболочка любого конечного набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in A(V)$ ограничена, ибо содержится в кубе, содержащем все точки p_i . Чтобы задать её конечным числом линейных неравенств, вложим $A(V)$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}e \oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $e + V$, как в предыдущем прим. 9.1. Согласно упр. 9.4 выпуклая оболочка точек $p_i = (e, v_i)$ является пересечением гиперплоскости $e + V$ с порождёнными векторами v_i выпуклым многогранным конусом $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} \subset W$, который является выпуклым многогранником по теор. 9.2. Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение уже было установлено нами в сл. 9.3 на стр. 148. \square

9.2.1. Двойственность. Рассмотрим выпуклый многогранный конус $\sigma_R \subset V$, порождённый конечным множеством векторов $R \subset V$. Множество всех его опорных функционалов

$$\sigma_R^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \langle \alpha, v \rangle \geq 0 \} = \bigcap_{v \in R} v^+ \subset V^*$$

по теор. 9.2 также является выпуклым многогранным конусом, порождённым неким конечным набором ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша¹ исходный конус

$$\sigma_R = \{ v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \langle \alpha, v \rangle \geq 0 \} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса σ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$.

Пример 9.2 (двойственные многогранники)

Пусть в аффинных пространствах $A(V)$ и $A(V^*)$, ассоциированных с двойственными векторными пространствами V и V^* отмечены точки $e \in A(V)$ и $\xi \in A(V^*)$. Вложим $A(V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $e+V$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}e \oplus V$, как в прим. 9.1 на стр. 151, и точно также вложим $A(V^*)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\xi+V^*$ в векторное пространство $W^\vee = \mathbb{R}\xi \oplus V^*$, которое отождествим с W^* , полагая $\langle x\xi + \alpha, te + v \rangle = xt + \langle \alpha, v \rangle$ для всех $x, t \in \mathbb{R}, \alpha \in V^*, v \in V$. Многогранники

$$M = (e + V) \cap \pi_M \subset A(V) \quad \text{и} \quad M^\vee = (\xi + V^*) \cap \pi_M^\vee \subset A(V^*),$$

с двойственными проективными конусами $\pi_M \subset W$ и $\pi_M^\vee \subset W^*$, называются *двойственными* относительно точек $e \in A(V)$ и $\xi \in A(V^*)$. Если точка e внутренняя для многогранника M , то все задающие M аффинные функционалы a_i имеют строго положительные свободные члены и могут быть умножены на положительные константы² так, чтобы их свободные члены стали равны единице. Тогда все ковекторы $\beta_i \in W^*$, задающие проективный конус π_M многогранника M , примут вид $\beta_i = \xi + \alpha_i$, где $\alpha_i \in V^*$ это дифференциалы перескалированных функционалов a_i . Двойственный конус $\pi_M^\vee = \sigma_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m} \subset W^*$ пересекает аффинную гиперплоскость $\xi + V^*$ по выпуклой оболочке точек $\xi + \alpha_i$.

Например, стандартный куб $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ задаётся неравенствами $1 + x_i \geq 0$ и $1 - x_i \geq 0$, где $1 \leq i \leq n$. Двойственный к нему относительно нулей в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^{n*} многогранник представляет собою выпуклую оболочку стандартных базисных векторов $\pm e_i^* \in \mathbb{R}^{n*}$, т. е. является стандартным кокубом.

9.2.2. Грани конусов. Удобно считать, что каждый конус $\sigma \subset V$ имеет *несобственную грань* $\sigma = 0^+ \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$. Рассмотрим пару двойственных конусов

$$\sigma_R = \sigma_{R^\vee} \subset V \quad \text{и} \quad \sigma_{R^\vee} = \sigma_R^\vee \subset V^*. \quad (9-7)$$

Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $L_\Gamma \subset V$ её линейную оболочку и положим

$$R_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} R \cap L_\Gamma \quad \text{и} \quad R_\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} R^\vee \cap \text{Ann } L_\Gamma. \quad (9-8)$$

¹См. лем. 9.2 на стр. 150.

²При умножении аффинного функционала a на положительную константу полупространство H_a^+ не меняется.

Первое множество состоит из всех образующих конуса σ_R , лежащих в линейной оболочке грани Γ , второе — из всех образующих двойственного конуса, аннулирующих грань Γ .

ЛЕММА 9.3

Для каждой грани Γ любого выпуклого многогранного конуса $\sigma_R \subset V$ выполняются равенства

$$\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} = \sigma_R \cap L_\Gamma,$$

и множество векторов R_Γ линейно порождает линейную оболочку L_Γ грани Γ .

Доказательство. По теор. 9.1 каждая грань $\Gamma \subset \sigma_R$ имеет вид $\Gamma = \sigma_R \cap \text{Ann } R_\Gamma^\vee$ и содержит некоторый открытый в пространстве $\text{Ann } R_\Gamma^\vee$ куб. Поэтому $L_\Gamma = \text{Ann } R_\Gamma^\vee$ и $\Gamma = \sigma_R \cap L_\Gamma$. В частности, $\sigma_{R_\Gamma} \subset \Gamma$. Для доказательства обратного включения достаточно убедиться, что в разложении произвольного вектора $w \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из R ненулевые коэффициенты могут иметь лишь векторы из R_Γ . Но для каждой образующей $v \in R \setminus R_\Gamma$ найдётся такой функционал $\alpha \in R_\Gamma^\vee$, что $\langle \alpha, v \rangle > 0$, и если бы образующая v входила в разложение вектора $w \in \Gamma$ с положительным коэффициентом, то значение $\langle \alpha, w \rangle$ было бы положительным, а не нулевым, как это должно быть для ковектора $\alpha \in R_\Gamma^\vee$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 9.5. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R .

ТЕОРЕМА 9.4

Для любой пары двойственных конусов $\sigma_R = \sigma_{R^\vee}^\vee$, $\sigma_{R^\vee} = \sigma_R^\vee$ в n -мерных пространствах V, V^* при $k = 0, 1, \dots, \dim \sigma_R$ имеется оборачивающая включения биекция между k -мерными гранями $\Gamma \subset \sigma_R$ и $(n - k)$ -мерными гранями $\Gamma^\vee \subset \sigma_{R^\vee}$. Она переводит каждую грань в пересечение двойственного конуса с аннулятором этой грани или, т. е. переводит грань $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \subset \sigma_R$ в грань $\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{R_\Gamma^\vee} \subset \sigma_{R^\vee}$, где $R_\Gamma^\vee = R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$. В частности, одномерные рёбра любого конуса являются уравнениями гиперграней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} = \sigma_R \cap \text{Ann } R_\Gamma^\vee$ все векторы $v \in R_\Gamma$ являются опорными функционалами для двойственного конуса σ_{R^\vee} . Поэтому подпространство $\text{Ann } \Gamma = \text{Ann } L_\Gamma$ высекает из σ_{R^\vee} грань, которую мы обозначим Γ^\vee . По построению, $\Gamma^\vee \supset R_\Gamma^\vee$. Линейная оболочка множества R_Γ^\vee совпадает с двойным аннулятором $\text{Ann Ann } R_\Gamma^\vee = \text{Ann } L_\Gamma = \text{Ann } \Gamma$. Следовательно, по лем. 9.3 множество R_Γ^\vee линейно порождает линейную оболочку грани Γ^\vee , и $\Gamma^\vee = \sigma_{R_\Gamma^\vee}$. По построению, $\text{Ann } \Gamma^\vee = \text{Ann Ann } \Gamma = L_\Gamma$. Поэтому $\Gamma^{\vee\vee} = \Gamma$, т. е. отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ обратно самому себе, а значит, биективно. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. В теор. 9.4 не предполагается равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Соответственно, двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = v^+ \subset V^*$ представляет собою полупространство и тоже имеет две грани: n -мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } 0 = v^+ \cap V^* = v^+$ и $(n - 1)$ -мерную грань $\sigma_v \cap \text{Ann } v = H_v$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.6. Покажите, что для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$ конуса σ_R выполняется равенство $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap -\sigma_{R_\Gamma^\vee}^\vee$, где $-\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{v \mid -v \in \sigma\}$ обозначает конус, центрально симметричный конусу σ относительно начала координат.

9.2.3. Асимптотический конус многогранника. Пусть выпуклый многогранник

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\} = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ \subset \mathbb{A}(V), \quad (9-9)$$

задаётся аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$, где $b_i = a_i(0) \in \mathbb{R}$, $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$. Конус

$$\alpha_M = \{v \in V \mid Av \geq 0\} = \alpha_1^+ \cap \alpha_2^+ \cap \dots \cap \alpha_m^+ = \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V,$$

двойственный к конусу $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} \subset V^*$, порождённый дифференциалами аффинных функционалов a_i , называется *асимптотическим конусом*¹ многогранника M . Иначе асимптотический конус можно описать как пересечение $\alpha_M = \pi_M \cap H_t$ проективного конуса²

$$\pi_M = \{(t, v) \in \mathbb{R} \oplus V \mid bt + Av \geq 0\}$$

с векторным подпространством $H_t = \{(0, v) \in \mathbb{R} \oplus V\} \simeq V$, заданным в $\mathbb{R} \oplus V$ уравнением $t = 0$, см. рис. 9◊2. Обратите внимание, что асимптотический конус определён и не пуст³ для любого, в том числе и пустого, многогранника (9-9) и зависит только от линейного отображения $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

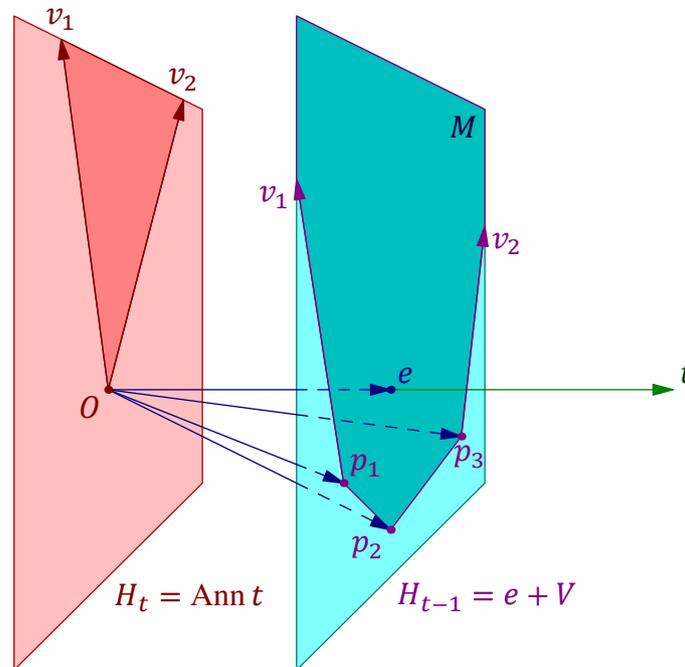


Рис. 9◊2. Асимптотический конус и направления рецессии.

Предложение 9.2

Если многогранник (9-9) не пуст, то ненулевой вектор $v \in V$ тогда и только тогда лежит в асимптотическом конусе α_M многогранника M , когда он обладает следующими эквивалентными друг другу свойствами⁴:

¹Или конусом рецессии.

²См. прим. 9.1 на стр. 151.

³Ибо по крайней мере содержит нулевой вектор.

⁴Направления таких векторов называют *асимптотическими*, или *направлениями рецессии* (по-английски: *recession directions*).

- 1) M целиком содержит какой-нибудь луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq} = v$
- 2) $p + v \in M$ для любой точки $p \in M$.

Доказательство. Если для вектора $v \in V$ при каком-либо i выполнено неравенство $\langle \alpha_i, v \rangle < 0$, то для любой точки $p \in \mathbb{A}(V)$ при всех $t \gg 0$ справедливо неравенство

$$a_i(p + tv) = a_i(p) + t \cdot \langle \alpha_i, v \rangle < 0,$$

а значит ни свойство (1), ни свойство (2) не имеют места. Напротив, если $\langle \alpha_i, v \rangle \geq 0$ для всех i , то для любой точки $p \in M$ при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$a_i(p + tv) = a_i(p) + t \langle \alpha_i, v \rangle \geq a_i(p) \geq 0,$$

т. е. весь луч $p + tv, t \geq 0$, лежит в M . □

ТЕОРЕМА 9.5 (РАЗЛОЖЕНИЕ МОЦКИНА)

Всякий выпуклый многогранник M в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ является объединением семейства своих асимптотических конусов $\alpha_M \subset V$, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника $M' \subset \mathbb{A}(V)$. Иначе говоря, существуют такие конечные множества точек $P \subset \mathbb{A}(V)$ и векторов $R \subset V$, что

$$M = \text{conv}(P) + \sigma_R = \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_\ell v_\ell\}, \quad (9-10)$$

где $p_i \in P, v_i \in R, \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $\sum \lambda_i = 1$.

Доказательство. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в векторное пространство $W = \mathbb{R}e \oplus V$ в качестве аффинной гиперплоскости $e + V$ с уравнением $t = 1$, как в [прим. 9.1](#) на стр. 151. По [теор. 9.2](#) на стр. 151 проективный конус π_M порождается некоторым конечным множеством векторов $S \subset W$, а асимптотический конус $\alpha_M \subset \pi_M$ является гранью проективного конуса, отсекаемой векторным подпространством $V = \text{Ann } t \subset W$. По [лем. 9.3](#) на стр. 154 конус $\alpha_M = \sigma_R$ порождается множеством векторов $R = S \cap \text{Ann } t$, а все остальные образующие $v \in S \setminus R$ аффинного конуса π_M удовлетворяют строгим неравенствам $\langle t, v \rangle > 0$, см. [рис. 9♦2](#) на стр. 155. Обозначим через $P \subset e + V$ множество всех точек вида $p = v / \langle t, v \rangle$, где $v \in S \setminus R$. Тогда $\pi_M = \sigma_{P \cup R} = \{p + r, | p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}$. Луч $[0, p + r)$, где $p \in \sigma_P, r \in \sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость $t = 1$, если и только если $p \neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p + r) / \langle t, p + r \rangle = (p + r) / \langle t, p \rangle$ является суммой точки $p / \langle t, p \rangle \in \text{conv } P$ и вектора $r / \langle t, p \rangle \in \sigma_R = \alpha_M$. □

СЛЕДСТВИЕ 9.5

Следующие свойства непустого многогранника $M = \{v \in V | c + Av \geq 0\}$ эквивалентны:

- 1) многогранник M ограничен
- 2) асимптотический конус $\alpha_M = \{v \in V | Av \geq 0\} = 0$
- 3) двойственный к асимптотическому конус $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = V^*$. □

Следствие 9.6

Линейный функционал $\xi \in V^*$ тогда и только тогда достигает на многограннике $M \in \mathbb{A}(V)$ своего минимального значения, когда он является опорным для асимптотического конуса многогранника M , т. е. когда $\xi \in \alpha_M^\vee = \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}$. В этом случае минимальное значение ξ на $M = \text{conv } P + \alpha_M$ равно минимальному значению ξ на $\text{conv } P$.

Доказательство. Если линейный функционал $\xi \in V^*$ принимает отрицательное значение на каком-нибудь ненулевом векторе из конуса σ , то он не ограничен снизу на σ . Таким образом, если ξ ограничен снизу на σ , то $\xi \in \sigma^\vee$, и в этом случае минимальное значение ξ на σ равно нулю и достигается на грани $\sigma \cap \text{Ann } \xi$. Поскольку $M = \text{conv } P + \alpha_M$ и ξ ограничен на компакте $\text{conv } P$, ξ ограничен на M , если и только если $\xi \in \alpha_M^\vee$, и в этом случае минимальное значение ξ на M равно минимальному значению ξ на $\text{conv } P$. \square

9.2.4. Коасимптотический конус многогранника. Пусть выпуклый многогранник

$$M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\} = H_{a_1}^+ \cap H_{a_2}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ \subset \mathbb{A}(V) \quad (9-11)$$

задан аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$, где $b_i = a_i(0) \in \mathbb{R}$ и $\alpha_i = D_{a_i} \in V^*$. Двойственное к линейному отображению¹ $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $v \mapsto (\langle \alpha_1, v \rangle, \langle \alpha_2, v \rangle, \dots, \langle \alpha_m, v \rangle)$, отображение $A^* : \mathbb{R}^{m*} \rightarrow V^*$, $e_i^* \mapsto \alpha_i$, переводит стандартные базисные ковекторы $e_i^* \in \mathbb{R}^{m*}$ в линейные функционалы $\alpha_i = D_{a_i}$. Его ядро $\ker A^* \subset V^*$ состоит из всех *линейных соотношений*² между образующими $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ конуса $\alpha_M^\vee = \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = A^*(\sigma_{e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*})$. Пересечение ядра $\ker A^*$ с положительным гипероктантом $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}$ обозначается

$$\mathcal{K}_M \stackrel{\text{def}}{=} \ker A^* \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}$$

и называется *коасимптотическим конусом* многогранника M . Как и асимптотический конус, он никогда не пуст и зависит только от линейного отображения $A : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$ свободных членов функционалов a_i . Как мы уже отмечали, с точностью до параллельных переносов многогранник (9-11) зависит только от класса $[b]_{\text{im } A} = b + \text{im } A$ в факторпространстве $\mathbb{R}^m / \text{im } A$, которое канонически двойственно пространству $\ker A^*$, ибо³

$$(\ker A^*)^* \simeq \mathbb{R}^{m**} / \text{Ann } \ker A^* = \mathbb{R}^m / \text{im } A.$$

Таким образом, класс $[b]_{\text{im } A}$ может рассматриваться как линейный функционал

$$[b]_{\text{im } A} : \ker A^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \langle \xi, b \rangle.$$

Лемма 9.4

Двойственный к коасимптотическому конус $\mathcal{K}_M^\vee \subset \mathbb{R}^m / \text{im } A$ образован всеми такими классами $b + \text{im } A \in \mathbb{R}^m / \text{im } A$, что многогранник $M_b = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\}$ не пуст.

Доказательство. Каждый вектор $v \in M$ удовлетворяет неравенствам $\langle e_i^*, b + Av \rangle \geq 0$ при всех $1 \leq i \leq m$. Поэтому для любого ковектора $\xi = \sum y_i e_i^*$ с $y_i \geq 0$ выполняется неравенство

$$\langle \xi, b + Av \rangle = \sum_i y_i \langle e_i^*, b + Av \rangle \geq 0. \quad (9-12)$$

¹См. п. 4.7 на стр. 69.

²В том смысле, что строка $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m*}$ лежит в $\ker A^*$, если и только если в пространстве V^* выполняется равенство $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0$.

³См. предл. 4.13 на стр. 68 и форм. (4-18) на стр. 69.

Если вдобавок $A^*\xi = 0$, то $\langle \xi, b + Av \rangle = \langle \xi, b \rangle + \langle A^*\xi, v \rangle = \langle \xi, b \rangle$. Следовательно, при $M \neq \emptyset$ для всех $\xi \in \mathcal{K}_M$ справедливо неравенство $\langle \xi, b \rangle \geq 0$, т. е. класс $[b]_{\text{im} A}$ лежит в двойственном к коасимптотическому конусе \mathcal{K}_M^\vee . Наоборот, если $[b]_{\text{im} A} \notin \mathcal{K}_M^\vee$, то по лемме Фаркаша¹ найдётся такой ковектор $\xi \in \mathcal{K}_M$, что $\langle \xi, b \rangle < 0$, а значит, для всех $v \in V$

$$\langle \xi, b + Av \rangle = \langle \xi, b \rangle < 0.$$

Поскольку для каждого вектора $v \in M$ выполняется противоположное неравенство (9-12), мы заключаем, что $M = \emptyset$. \square

9.3. Линейная оптимизация и двойственность Гейла. Задача *линейной оптимизации*² заключается в отыскании тех точек выпуклого многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$, где данный линейный функционал $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ принимает своё минимальное на многограннике M значение. В самом общем случае многогранник $M = \{v \in V \mid b + Av \geq 0\} = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\text{red}}$ является цилиндром³ над приведённым⁴ многогранником $M_{\text{red}} = (b + \text{im} A) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, который с точностью до сдвига задаётся классом $[b]_{\text{im} A} = b + \text{im} A \in \mathbb{R}^m / \text{im} A$. Если функционал ξ ограничивается на векторное подпространство $\ker A \subset V$ в ненулевой ковектор на этом подпространстве, т. е. если $\xi \notin \text{Ann} \ker A = \text{im} A^* \subset V^*$, то ξ не ограничен на $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\text{red}}$ ни сверху, ни снизу. Поэтому задача линейной оптимизации может иметь решение только для функционалов вида $\xi = A^*\gamma$, где $\gamma \in \mathbb{R}^{m^*}$. Такой функционал однозначно определяется классом

$$[\gamma]_{\ker A^*} = \gamma + \ker A^* \in \mathbb{R}^{m^*} / \ker A^* = \mathbb{R}^{m^*} / \text{Ann} \text{im} A \simeq (\text{im} A)^*$$

и имеет нулевое ограничение на векторное подпространство $\ker A \subset V$, а его минимум на цилиндре $M = \mathbb{A}(\ker A) \times M_{\text{red}}$, буде он существует, достигается на цилиндре вида $\mathbb{A}(\ker A) \times \Gamma_\gamma$, где $\Gamma_\gamma \subset M_{\text{red}}$ это множество тех точек, где достигает своего минимума на многограннике M_{red} ограничение функционала $\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ на аффинное подпространство $b + \text{im} A \subset \mathbb{R}^m$.

Таким образом, любая претендующая на наличие решения задача линейной оптимизации сводится к задаче оптимизации по приведённому многограннику. Последняя допускает следующую *стандартную формулировку*. Даны векторное подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ и классы

$$[b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V \quad \text{и} \quad [\beta]_{\text{Ann} V} = \beta + \text{Ann} V \in \mathbb{R}^{m^*} / \text{Ann} V \simeq V^*. \quad (9-13)$$

Эти данные определяют приведённый выпуклый многогранник

$$M_b = (b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m \quad (9-14)$$

в ассоциированном с векторным пространством V аффинном пространстве $b + V \subset \mathbb{R}^m$ и линейный функционал $\beta|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle \beta, v \rangle$, на векторном пространстве V . Скажем, что точки $p, q \in b + V$ удовлетворяют неравенству⁵ $\beta(p) \leq \beta(q)$, если $\langle \beta, \overline{pq} \rangle \geq 0$. Задача заключается в том, чтобы описать множество β -минимальных точек

$$\Gamma_\beta = \{p \in M_b \mid \forall q \in M_b \langle \beta, \overline{pq} \rangle \geq 0\}.$$

¹См. лем. 9.2 на стр. 150.

²Или *линейного программирования*.

³См. предл. 9.1 на стр. 149 и опр. 8.7 на стр. 146.

⁴См. п. 9.1.3 на стр. 149.

⁵Обратите внимание, что сами значения функционала β в точках p, q при этом не определены корректно.

Например, если подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ задано как линейная оболочка столбцов

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$$

какой-нибудь $m \times n$ -матрицы $A = (a_{ij})$, вектор $b \in \mathbb{R}^m$ задан столбцом своих координат, а класс $\beta + \text{Ann } V$ задан строкой $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ значений $\beta_i = \langle \beta, v_i \rangle$ ковектора β на столбцах матрицы A , то стандартная задача линейной оптимизации заключается в описании всех тех решений (x_1, x_2, \dots, x_n) неоднородной системы линейных неравенств $b + Ax \geq 0$, т. е. системы

$$\begin{cases} b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq 0 \\ b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq 0 \\ b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \geq 0 \\ \vdots \\ b_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq 0, \end{cases} \quad (9-15)$$

для которых число $\beta x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \in \mathbb{R}$ имеет минимальное возможное значение.

С векторным подпространством $V \subset \mathbb{R}^m$ канонически связано¹ векторное подпространство $\text{Ann } V \subset \mathbb{R}^{m*}$, и те же самые классы (9-13)

$$[\beta]_{\text{Ann } V} = \beta + \text{Ann } V \in \mathbb{R}^{m*} / \text{Ann } V \quad \text{и} \quad [b]_V = b + V \in \mathbb{R}^m / V = \text{Ann}^* V$$

задают лежащий в ассоциированном с $\text{Ann } V$ аффинном пространстве $\beta + \text{Ann } V \subset \mathbb{R}^{m*}$ выпуклый многогранник

$$M_\beta^\times = (\beta + \text{Ann } V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*} \quad (9-16)$$

и линейный функционал $b|_{\text{Ann } V} : \text{Ann } V \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto \langle \xi, b \rangle$, на векторном пространстве $\text{Ann } V$. Многогранник (9-16) называется *двойственным по Гейлу* к многограннику (9-14), а задача описания множества b -минимальных точек многогранника M_β^\times , т. е. множества

$$\Gamma_b^\times = \{ \xi \in M_\beta^\times \mid \forall \eta \in M_\beta^\times \langle \overline{\xi \eta}, b \rangle \geq 0 \},$$

называется *двойственной по Гейлу* стандартной задачей линейной оптимизации для векторного подпространства $V \subset \mathbb{R}^m$ и классов (9-13).

Если, как в предыдущем примере, пространство $V \subset \mathbb{R}^m$ порождено столбцами $m \times n$ -матрицы A , вектор $b \in \mathbb{R}^m$ задан столбцом своих координат, а класс $\beta + \text{Ann } V$ представлен строкой значений функционала β на столбцах матрицы A , то двойственная задача линейной оптимизации заключается в отыскании такого решения $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ неоднородной системы линейных уравнений $\xi A = \beta$, т. е. системы²

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \dots + a_{m1}\xi_m = \beta_1 \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{m2}\xi_m = \beta_2 \\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + \dots + a_{m3}\xi_m = \beta_3 \\ \vdots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \dots + a_{mn}\xi_m = \beta_n. \end{cases} \quad (9-17)$$

¹См. н° 4.4.3 на стр. 64.

²Матрица коэффициентом которой транспонирована матрице коэффициентов системы (9-15).

что $\xi_i \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$ и число $\xi c = \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \dots + \xi_m c_m$ имеет минимальное возможное значение.

УПРАЖНЕНИЕ 9.7. Убедитесь в этом.

Для каждого непустого подмножества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$ обозначим через

$$\begin{aligned} H_I &= \text{Ann}(e_{i_1}^*, e_{i_2}^*, \dots, e_{i_k}^*) = \bigoplus_{j \notin I} \mathbb{R} \cdot e_j \subset \mathbb{R}^m, \\ H_I^\times &= \text{Ann}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = \bigoplus_{j \notin I} \mathbb{R} \cdot e_j^* \subset \mathbb{R}^{m*} \end{aligned} \quad (9-18)$$

линейные оболочки стандартных базисных векторов $e_j \in \mathbb{R}^m$ с $j \notin I$ и двойственных им базисных ковекторов $e_j^* \in \mathbb{R}^{m*}$ соответственно. Если множество минимальных точек $\Gamma_\beta \subset M_b$ функционала β на многограннике M_b непусто, то для любой точки $p \in \Gamma_\beta$ аффинный функционал $\beta_p : p + v \mapsto \langle \beta, v \rangle$ является опорным для многогранника M_b и не зависит от выбора точки $p \in \Gamma_\beta$, поскольку из равенства $\langle \beta, \overline{pq} \rangle = 0$ для всех $p, q \in \Gamma_\beta$ вытекает равенство

$$\beta_q(r) = \langle \beta, \overline{qr} \rangle = \langle \beta, \overline{pq} + \overline{qr} \rangle = \langle \beta, \overline{pr} \rangle = \beta_q(r)$$

для всех $r \in b + V$. Тем самым, множество $\Gamma_\beta = M_b \cap H_{a_\beta}$ является гранью многогранника M и по теор. 9.1 на стр. 147 имеет вид $\Gamma_I = H_I \cap M_b$ для некоторого непустого подмножества $I \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$.

ТЕОРЕМА 9.6

Многогранник $M_b \subset \mathbb{A}(V)$ не пуст тогда и только тогда, когда функционал b достигает своего минимума на всех непустых двойственных по Гейлу многогранниках $M_\beta^\times \subset \mathbb{A}(\text{Ann } V)$. В этом случае каждый функционал β , для которого $M_\beta^\times \neq \emptyset$, тоже достигает минимума на многограннике M_b , а множества I и J всех тех координат, что аннулируют грани $\Gamma_\beta = H_I \cap M_b$ и $\Gamma_b^\times = H_J^\times \cap M_\beta^\times$, где достигаются минимумы, покрывают всю линейку координат, т. е.

$$I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Доказательство. Асимптотический конус многогранника $M_b = \{v \in V \mid c + u \geq 0\}$ высекается из подпространства $V \subset \mathbb{R}^m$ положительным гипероктантом:

$$\alpha_{M_b} = \{v \in V \mid v \geq 0\} = V \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m.$$

Поскольку двойственное к вложению $V \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ линейное отображение представляет собою эпиморфизм $\mathbb{R}^{m*} \twoheadrightarrow V^* = \mathbb{R}^{m*} / \text{Ann } V$ с ядром $\text{Ann } V$, коасимптотический конус многогранника M_b совпадает с асимптотическим конусом двойственного по Гейлу многогранника:

$$\kappa_{M_b} = \text{Ann } V \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*} = \alpha_{M_\beta^\times}.$$

Заменяя здесь M_b на $M_\beta^\times = \{\xi \in \text{Ann } V \mid \beta + \xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}\}$, получаем двойственное равенство $\alpha_{M_b} = \kappa_{M_\beta^\times}$. Теперь первые два утверждения теоремы следуют из сл. 9.6 на стр. 157 и лем. 9.4 на стр. 157. Если оба множества Γ_β и Γ_b^\times непусты, мы можем выбрать вектор $b \in \mathbb{R}^m$ внутри грани $\Gamma_\beta = \Gamma_I \subset M_b$, а ковектор $\beta \in \mathbb{R}^{m*}$ — внутри грани $\Gamma_b^\times = \Gamma_J \subset M_\beta^\times$. Тогда по теор. 9.1 на стр. 147

$$\langle e_k^*, b \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in I \\ > 0 & \text{при } k \notin I \end{cases} \quad \text{и} \quad \langle \beta, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } k \in J \\ > 0 & \text{при } k \notin J, \end{cases}$$

а значение $\langle \beta, b \rangle$ является минимальным как для линейной формы β на многограннике M_b , и для линейной формы b на многограннике M_β^\times . Если имеется индекс $k \notin I \cap J$, то значение $\langle \beta, b \rangle > 0$, и его можно уменьшить, немного уменьшая k -тые координаты вектора b и ко вектора β так, чтобы они продолжали оставаться внутри граней Γ_b^\times и Γ_β . \square

Следствие 9.7

Стандартная задача (9-15) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение двойственная ей стандартная задача (9-17), причём если i -тая координата какого-нибудь решения одной из этих задач ненулевая, то i -тая координата любого решения двойственной задачи нулевая.

9.4. Симплекс-метод эффективно решает задачу линейной оптимизации в случае, когда аффинное подпространство $b + V \subset \mathbb{R}^m$ описывается следующим набором данных:

(S1) разбиение $\{1, 2, \dots, m\} = I \sqcup J$ на состоящие из $\#J = n = \dim V$ и $\#I = k = m - n$ элементов подмножества, такие что $\mathbb{R}^m = V \oplus H_J$, где¹ $H_J = \bigcap_{j \in J} \text{Ann}(e_j^*)$,

(S2) базис пространства V , состоящий из векторов $v_j = e_j + u_j$, где $j \in J$ и $u_j \in H_J$, которые переводятся в стандартные базисные векторы $e_j \in H_I$ проекцией

$$\pi_J : \mathbb{R}^m = H_I \oplus H_J \rightarrow H_I \quad (9-19)$$

вдоль координатного подпространства H_J ,

(S3) вектор $b = M \cap H_J \in \mathbb{R}^m$, являющийся вершиной многогранника $M = (b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Разбиение (S1) всегда существует, т. к. по лемме о замене² какие-нибудь $n = \dim V$ стандартных базисных векторов e_j пространства \mathbb{R}^m можно заменить векторами произвольного выбранного базиса w_1, w_2, \dots, w_n пространства V так, чтобы оставшиеся векторы e_i вместе с векторами w_j составили базис в \mathbb{R}^m . Последнее означает, что $V \cap H_J = 0$ и $V \oplus H_J = \mathbb{R}^m$.

Для любого разбиения вида (S1) проекция (9-19) изоморфно отображает подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ на координатную гиперплоскость H_I , порождённую стандартными базисными векторами $e_j \in \mathbb{R}^m$ с $j \in J$, и базисные векторы из (S2) суть прообразы векторов e_j при этом изоморфизме. Тем самым, для любого разбиения (S1) базис (S2) существует и единствен.

Ограничения координатных функционалов e_j^* , $j \in J$, на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ составляют двойственный к (S2) базис пространства V^* . Гиперплоскости $\text{Ann } e_j^*$ с $j \in J$ суть координатные гиперплоскости пространства V относительно базиса (S2). Так как они трансверсально пересекаются по нулевому вектору, пересечение $H_J \cap M$ либо пусто, либо является вершиной многогранника M по теор. 9.1 на стр. 147. Таким образом, вектор $b \in \mathbb{R}^m$ тоже однозначно определяется разбиением (S1), если только существует³.

¹См. формулу (9-18) на стр. 160.

²См. лем. 4.2 на стр. 56.

³Существует он, вообще говоря, не для всякого разбиения (S1). Однако, любую задачу линейной оптимизации можно сравнительно легко переформулировать так, что вектор b , удовлетворяющий свойству (S3), тоже будет явно задан (примеры см. в н° 9.4.2 на стр. 167).

9.4.1. Симплекс-таблица. Данные (S1)–(S3) принято записывать в виде так называемой *симплекс-таблицы* $T = (t_{ij})$ размера $(k+1) \times (n+1)$, первая строка и первый столбец которой выделены и имеют нулевые номера, а все остальные клетки нумеруются по вертикали элементами множества $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, а по горизонтали — элементами множества $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, причём эти элементы не предполагаются упорядоченными¹. В клетки t_{ij} , отвечающие элементам $i \in I \sqcup 0$ и $j \in J \sqcup 0$, заносятся числа

$$\begin{aligned} t_{00} &= \langle \beta, b \rangle & t_{0j} &= \langle \beta, v_j \rangle \quad (\text{при } j \in J) \\ t_{i0} &= \langle e_i^*, b \rangle \quad (\text{при } i \in I) & t_{ij} &= \langle e_i^*, v_j \rangle \quad (\text{при } i \in I, j \in J) \end{aligned} \quad (9-20)$$

В развёрнутом виде симплекс-таблицу принято записывать следующим образом:

$$T = \begin{array}{c|cccc} \langle \beta, b \rangle & \langle \beta, v_{j_1} \rangle & \langle \beta, v_{j_2} \rangle & \cdots & \langle \beta, v_{j_n} \rangle \\ \langle e_{i_1}^*, b \rangle & \langle e_{i_1}^*, v_{j_1} \rangle & \langle e_{i_1}^*, v_{j_2} \rangle & \cdots & \langle e_{i_1}^*, v_{j_n} \rangle & i_1 \\ \langle e_{i_2}^*, b \rangle & \langle e_{i_2}^*, v_{j_1} \rangle & \langle e_{i_2}^*, v_{j_2} \rangle & \cdots & \langle e_{i_2}^*, v_{j_n} \rangle & i_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle e_{i_k}^*, b \rangle & \langle e_{i_k}^*, v_{j_1} \rangle & \langle e_{i_k}^*, v_{j_2} \rangle & \cdots & \langle e_{i_k}^*, v_{j_n} \rangle & i_k \end{array} \quad (9-21)$$

$j_1 \qquad j_2 \qquad \cdots \qquad j_n$

Снизу и справа от таблицы проставлены элементы множеств I и J , нумерующие соответствующие столбцы и строки таблицы². В левом верхнем углу представлено значение функционала в вершине b . Мы собираемся минимизировать его, заменяя при необходимости вершину b на другую, соединённую с b ребром вершину, где значение функционала будет строго меньше. Для этого в остальных клетках верхней строки симплекс-таблицы написаны координаты ограничения линейной формы β на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$ в двойственном к $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}$ базисе пространства V^* . Клетки под горизонтальной чертой симплекс-таблицы суть столбцы I -координат векторов b и $u_j = v_j - e_j$ с $j \in J$ в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^m . Так как все J -координаты у векторов b и u_j , $j \in J$, зануляются, симплекс-таблица однозначно задаёт вектор $b \in \mathbb{R}^m$, базисные векторы $v_j = e_j + u_j$ векторного пространства $V \subset \mathbb{R}^m$ и аффинный функционал $b + v \mapsto \langle \beta, b + v \rangle$ на аффинном пространстве $b + V \subset \mathbb{R}^m$.

Неотрицательность всех коэффициентов справа от черты в верхней строке таблицы T , т. е. неравенства

$$t_{0j} = \langle \beta, v_j \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } j \in J, \quad (9-22)$$

означают, что минимум линейного функционала $\beta|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ на конусе $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_n} \subset V$ равен нулю и достигается в вершине конуса. Поскольку многогранник M лежит в аффинном конусе $b + \sigma_{v_1, v_2, \dots, v_n}$, вершина b является β -минимальной точкой многогранника M , и минимальное значение ковектора $\beta \in \mathbb{R}^m$ на многограннике $(b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ равно $\langle \beta, b \rangle = t_{00}$.

Если при каком-то $v \in J$ выполняется строгое неравенство $t_{0v} = \langle \beta, v_v \rangle < 0$, то значение функционала β на конусе $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_n}$ строго убывает при движении вдоль ребра v_v . Зафиксируем один из таких элементов $v \in J$ и назовём соответствующий ему столбец таблицы T *отмеченным*. Если все стоящие под чертой элементы в этом столбце неотрицательны, т. е.

$$t_{iv} = \langle e_i^*, v_v \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } i \in I, \quad (9-23)$$

¹Т. е. порядковые номера индексов $i \in I$ и $j \in J$ в базисе пространства \mathbb{R}^m никак не коррелируют с положением клетки t_{ij} относительно того или иного угла симплекс-таблицы.

²Подчеркну ещё раз, что порядок, в котором они стоят, произволен.

то луч $\{b + tv_\nu \mid t \geq 0\}$ целиком содержится в многограннике M , и функционал β не ограничен на M снизу. Если же под чертой в отмеченном столбце есть элементы $t_{i\nu} = \langle e_i^*, v_\nu \rangle < 0$, точка $b + tv_\nu$ лежит в многограннике M только при $0 \leq t \leq t^*$, где

$$t^* = \min_{i \in I: t_{i\nu} < 0} -t_{i0} / t_{i\nu} = -\langle e_i^*, b \rangle / \langle e_i^*, v_\nu \rangle. \quad (9-24)$$

Зафиксируем элемент $\mu \in I$, на котором достигается значение (9-24), и назовём отвечающую ему строку таблицы T *отмеченной*. Пусть все координаты вектора b , стоящие в самом левом столбце таблицы T , строго положительны. Тогда в вершине b пересекается в точности n гиперграней многогранника¹ M , и эти гиперграни суть $\text{Ann } e_j^*$ для $j \in J$, а исходящие из вершины b рёбра многогранника направлены в точности вдоль векторов v_j . Точка

$$b' \stackrel{\text{def}}{=} b + t^* v_\nu = b - \frac{t_{\mu 0}}{t_{\mu \nu}} \cdot v_\nu \quad (9-25)$$

также является вершиной многогранника $M = M_{b'}$ и высекается гиперплоскостями $\text{Ann } e_j^*$ с $j \in J \setminus \nu$ и гиперплоскостью $\text{Ann } e_\mu^*$, причём значение функционала β в вершине b' строго меньше, чем в b . Теперь мы можем заменить вершину b на вершину b' , пересчитать симплекс-таблицу T в новую симплекс-таблицу T' , аккумулирующую данные (S1) – (S3) для вершины b' , и повторить предыдущий анализ.

Новые множества $I' \stackrel{\text{def}}{=} \nu \cup (I \setminus \mu)$ и $J' \stackrel{\text{def}}{=} \mu \cup (J \setminus \nu)$ получаются из I и J перестановкой друг с другом элементов $\mu \in I$ и $\nu \in J$. Отвечающий новому разбиению $\{1, 2, \dots, m\} = I' \sqcup J'$ базис v'_1, v'_2, \dots, v'_n пространства V состоит из векторов вида $v'_{j'} = e_{j'} + u'_{j'}$, где $j' \in J'$ и $u'_{j'} \in H_{J'}$. Очевидно, что таковыми являются векторы

$$\begin{aligned} v'_\mu &= \frac{1}{t_{\mu \nu}} v_\nu = e_\mu + \frac{1}{t_{\mu \nu}} e_\nu + \sum_{i \neq \mu, \nu} e_i \cdot \frac{t_{i\nu}}{t_{\mu \nu}} & (\text{при } j' = \mu) \\ v'_j &= v_j - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} v_\nu = e_j - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} e_\nu + \sum_{i \neq \mu, \nu} \left(t_{ij} - \frac{t_{i\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} \right) \cdot e_i & (\text{при } j' = j \neq \mu, \nu). \end{aligned} \quad (9-26)$$

Функционал β принимает на них значения

$$\begin{aligned} \langle \beta, v'_\mu \rangle &= \frac{1}{t_{\mu \nu}} \langle \beta, v_\nu \rangle = \frac{t_{0\nu}}{t_{\mu \nu}} & (\text{при } j' = \mu) \\ \langle \beta, v'_j \rangle &= \langle \beta, v_j \rangle - \frac{t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} \langle \beta, v_\nu \rangle = t_{0j} - \frac{t_{0\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} & (\text{при } j' = j \neq \mu, \nu). \end{aligned} \quad (9-27)$$

Вершина $b' = b - t_{\mu 0} v_\nu / t_{\mu \nu}$ имеет I' -координаты

$$\langle e_{i'}^*, b' \rangle = \begin{cases} -t_{\mu 0} / t_{\mu \nu} & \text{при } i' = \nu \\ t_{i0} - t_{i\nu} t_{\mu 0} / t_{\mu \nu} & \text{при } i' = i \neq \mu, \nu \end{cases} \quad (9-28)$$

и $\langle \beta, b' \rangle = \langle \beta, b \rangle - t_{\mu 0} \langle \beta, v_\nu \rangle / t_{\mu \nu} = t_{00} - t_{\mu 0} t_{0\nu} / t_{\mu \nu} > t_{00}$. Таким образом, элементы симплекс-таблицы T' выражаются через элементы симплекс-таблицы T по формулам

$$\begin{aligned} t'_{\mu \nu} &= \frac{1}{t_{\mu \nu}} & t'_{\nu j} &= -\frac{t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} \quad \text{при } j \neq \mu, \nu \\ t'_{i\mu} &= \frac{t_{i\nu}}{t_{\mu \nu}} \quad \text{при } i \neq \mu, \nu & t'_{ij} &= t_{ij} - \frac{t_{i\nu} t_{\mu j}}{t_{\mu \nu}} \quad \text{при } i, j \neq \mu, \nu. \end{aligned} \quad (9-29)$$

¹Такие вершины называются *симплициальными*. Например, у додекаэдра и куба все вершины симплициальны, а у октаэдра и икосаэдра — нет.

Если записать отвечающий элементу $\mu \in J'$ столбец таблицы T' на место отмеченного столбца таблицы T , а отвечающую элементу $\nu \in I'$ строку таблицы T' на место отмеченной строки таблицы T , то правило пересчёта таблицы можно сформулировать так:

- элемент в клетке (μ, ν) заменяется на обратный
- все остальные элементы отмеченного столбца делятся на $t_{\mu\nu}$
- все остальные элементы отмеченной строки делятся на $-t_{\mu\nu}$
- из каждого элемента t_{ij} , расположенного вне отмеченных строки и столбца, вычитается делённое на $t_{\mu\nu}$ произведение двух элементов, расположенных в отмеченной строке и в отмеченном столбце на той же вертикали и на той же горизонтали, что и элемент t_{ij} .

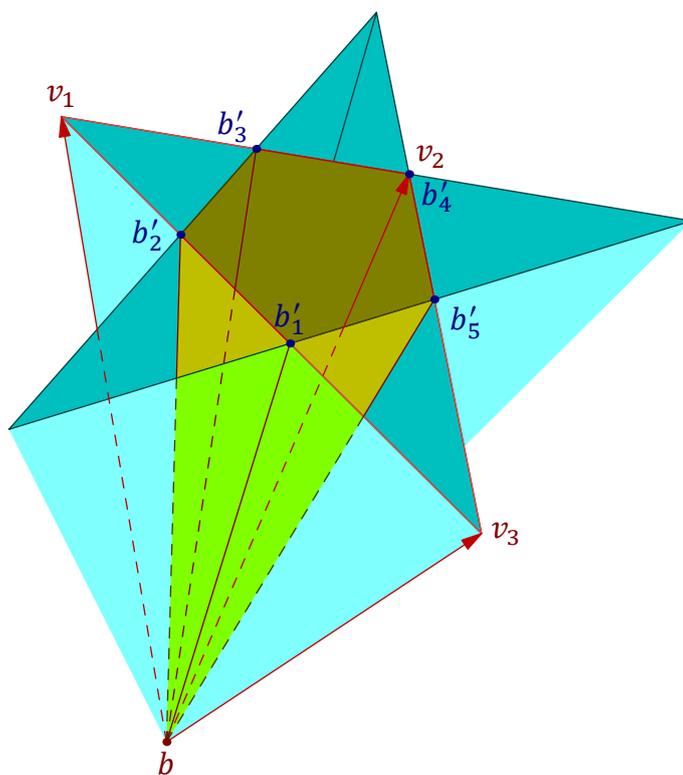


Рис. 9◊3. Рёбра v_1 и v_3 симплициального конуса $b + \sigma_{v_1, v_2, v_3}$ не являются рёбрами пятигранного угла многогранника M при вершине b .

Если вершина b не симплициальная, т. е. в самом левом столбце таблицы T под чертой встречаются элементы $t_{i0} = \langle e_i^*, b \rangle = 0$, то кроме координатных гиперплоскостей $\text{Ann } e_j^*$ с $j \in J$ через вершину b проходят ещё и все те гиперплоскости $\text{Ann } e_i^*$, для которых $t_{i0} = 0$. Если в пересечении отвечающей такому элементу i строки с отмеченным столбцом стоит отрицательное число $t_{i\nu} < 0$, мы получим в (9-24) значение $t^* = 0$. Это говорит о том, что ребро $b + v_\nu t$ симплициального конуса $b + \sigma_{v_1, v_2, \dots, v_n}$ не является ребром многогранника M , как это происходит, к примеру, с рёбрами v_1 и v_3 на рис. 9◊3, где в вершине b сходится сразу пять граней трёхмерного многогранника. В этом случае всё равно следует поменять элемент $\nu \in J$ с одним из тех элементов $\mu \in I$, для которых $t_{\mu\nu} < 0$, а $t_{\mu 0} = 0$. При этом в координатном

симплексе при вершине b гиперплоскость $\text{Ann } e_\nu^*$ заменится на гиперплоскость $\text{Ann } e_\mu^*$, и мы получим другой набор из n трансверсально пересекающихся в вершине b гиперграней многогранника. Поскольку каждое выходящее из вершины b ребро многогранника является ребром симплицеального конуса, образованного какими-нибудь n трансверсально пересекающимися в вершине b гипергранями многогранника M , перебрав все такие конусы, мы либо убедимся, что вдоль всех выходящих из вершины b рёбер функционал β не убывает, а значит, его значение в вершине b минимальное на многограннике M , либо отыщем такое ребро, вдоль которого β убывает, и тогда мы либо сможем перейти в другую вершину b' с $\langle \beta, b' \rangle < \langle \beta, b \rangle$, либо убедимся, что функционал β не ограничен снизу на многограннике M .

Чтобы избежать заикливания при переборе координатных симплексов с вершиной в b , введём на множестве строк таблицы T лексикографический порядок, при котором строка τ' лексикографически меньше строки τ'' , что записывается как $\tau' <_{\text{lex}} \tau''$, если самый левый из не совпадающих элементов этих строк меньше в строке¹ τ' . Кроме того, помимо условий (S1) – (S3) наложим на таблицу T дополнительное условие

(S4) каждая стоящая под горизонтальной чертой симплекс-таблицы T строка

$$\tau_i = (t_{i0} \mid t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}), \quad \text{где } i \in I,$$

лексикографически положительна, т. е. самый левый её ненулевой элемент больше нуля.

Это условие автоматически выполнено в любой симплицеальной вершине b , поскольку для такой вершины $t_{i0} = \langle e_i^*, b \rangle > 0$ при всех $i \in I$.

Упражнение 9.8. Убедитесь, что для произвольных строк τ, τ', τ'' и положительного числа $x \in \mathbb{R}$ имеют место импликации

$$\begin{aligned} x\tau' &\leq_{\text{lex}} x\tau'' \iff \tau' \leq_{\text{lex}} \tau'' \iff \tau' + \tau \leq_{\text{lex}} \tau'' + \tau \\ \tau' &\leq_{\text{lex}} \tau'' \iff -\tau' \geq_{\text{lex}} -\tau''. \end{aligned}$$

Если отмеченный столбец $\nu \in J$ таблицы T уже выбран, в качестве отмеченной строки таблицы T выберем ту строку τ_μ , у которой $t_{\mu\nu} < 0$ и отношение $-\tau_\mu / t_{\mu\nu}$ лексикографически минимально среди всех отношений

$$-\frac{\tau_i}{t_{i\nu}} = \left(-\frac{t_{i0}}{t_{i\nu}} \mid -\frac{t_{i1}}{t_{i\nu}}, -\frac{t_{i2}}{t_{i\nu}}, \dots, -\frac{t_{in}}{t_{i\nu}} \right) \quad (9-30)$$

соответствующих элементам $i \in I$ с $t_{i\nu} < 0$. Обратите внимание, что это делает выбор элемента $\mu \in I$ однозначным.

Лемма 9.5

Если симплекс-таблица T удовлетворяет условиям (S1) – (S4) и в ней имеются элементы $t_{0\nu} < 0$ и $t_{i\nu} < 0$, то преобразованная по указанным выше правилам симплекс-таблица $T' = (t'_{ij})$ тоже удовлетворяет условиям (S4) – (S4), а её верхняя строка τ'_0 строго лексикографически меньше верхней строки τ_0 таблицы T .

¹Например, $(0, 1, 10, 5) <_{\text{lex}} (0, 2, -1, 0)$.

Доказательство. Свойства (S1)–(S3) очевидным образом наследуются при преобразовании симплекс таблицы. Далее, из формул (9-26) вытекает, что строки $\tau_{i'}$ таблицы T' выражаются через строки τ_i таблицы T по правилам

$$\begin{aligned}\tau'_\nu &= -t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + (t_{\mu\nu}^{-1} - 1)\delta_\nu \quad (\text{при } i' = \mu) \\ \tau'_i &= \tau_i - t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\delta_\nu, \quad (\text{при } i' = i \neq \mu, \nu),\end{aligned}$$

где через δ_ν обозначена строка, содержащая 1 в отмеченном столбце и нули во всех остальных местах. Поскольку $t_{\mu\nu} < 0$, но при этом $\tau_\mu > 0$ по свойству (S4), отмеченная строка содержит положительный элемент, стоящий строго левее отмеченного столбца. Поэтому $\tau'_\nu > 0$, и при $i \neq \mu, \nu$ и $t_{i\nu} \geq 0$ выполняется неравенство $-t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu + t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\delta_\nu \geq 0$, из которого $\tau'_i \geq \tau_i > 0$. При $i \neq \mu, \nu$ и $t_{i\nu} < 0$ в силу выбора μ выполняется неравенство $-t_{i\nu}^{-1}\tau_i > -t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu$. Значит, $\tau_i - t_{i\nu}t_{\mu\nu}^{-1}\tau_\mu > 0$ и самый левый положительный элемент этой разности стоит строго левее отмеченного столбца. Поэтому при добавлении к этой разности любой кратности строки δ_ν она останется строго положительной. Тем самым, $\tau'_{i'} > 0$ при всех $i' \in I'$. Поскольку $t_{0\nu}t_{\mu\nu}^{-1} > 0$ и $\tau_\mu > \delta_\nu$, верхняя строка $\tau'_0 = \tau_0 - t_{0\nu}t_{\mu\nu}^{-1}(\tau_\mu - \delta_\nu) > \tau_0$. \square

ТЕОРЕМА 9.7

Если начальная таблица T удовлетворяет условиям (S1)–(S4), то после конечного числа преобразований получится либо таблица, в которой все $t_{0j} \geq 0$, и тогда значение функционала β достигает в вершине b своего минимума на многограннике M , либо таблица, в которой $t_{0\nu} < 0$ и $t_{i\nu} \geq 0$ для всех $i \in I$ при некотором $\nu \in J$, и тогда функционал β не ограничен снизу на многограннике M .

Доказательство. Поскольку симплекс-таблица однозначно определяется разбиением (S1) и таких разбиений конечное число, обеспечиваемый предыдущей леммой перебор симплекс-таблиц, удовлетворяющих условиям (S1)–(S4), при котором верхняя строка таблицы строго лексикографически убывает, в конце концов приведёт к выполнению одного из двух перечисленных в теореме альтернативных условий, запрещающих применение лем. 9.5. \square

Замечание 9.2. (о симплицальных многогранниках) Приведённый многогранник $M \subset \mathbb{A}(V)$ называется *симплициальным*, если все его вершины симплицальны, т. е. все исходящие из любой вершины рёбра образуют базис векторного пространства V . Непустой многогранник

$$M_b = (b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$$

симплициален тогда и только тогда, когда класс $[b]_V \in \mathbb{R}^m/V$ не лежит в объединении конечно-го числа координатных гиперплоскостей $(V + \text{Ann } e_i^*)/V \subset \mathbb{R}^m/V$, где i пробегает объединение дополнений ко всем таким подмножествам $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, что $\mathbb{R}^m = V \oplus H_J$. В самом деле, такой класс $[b]$ при любом удовлетворяющем условиям (S1)–(S3) разбиении координат пространства \mathbb{R}^m задаст вершину $b \in M$, все координаты которой ненулевые. Таким образом, натолкнуться на несимплициальный многогранник в реальных «производственно-бытовых» задачах линейной оптимизации практически невероятно. Поэтому при программировании вычислений для ускорения работы можно исключить из описанного выше алгоритма лексикографическое сравнение строк при выборе отмеченной строки μ , заменив его разумным ограничением на число итераций и малым шевелением начальных данных в случае, когда зацикливание паче чаяния случится.

9.4.2. Решение стандартной задачи. Опыт показывает, что любая задача линейной оптимизации сравнительно легко переформулируется так, что выполняются условия (S1) – (S4). Рассмотрим, к примеру, стандартную задачу (9-17), где для заданного столбца $c \in \mathbb{R}^n$ требуется найти такое решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \quad (9-31)$$

что все $x_i \geq 0$ и число $xc = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n$ имеет минимальное возможное значение. Меняя при необходимости знаки в обеих частях уравнений, добьёмся того, чтобы все строки $(-b_i, a_1, a_2, \dots, a_n)$ стали лексикографически положительны. Введём дополнительные переменные y_1, y_2, \dots, y_k по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= -b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= -b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ y_3 &= -b_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \\ &\vdots \\ y_k &= -b_k + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{aligned}$$

и рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{k+n}$ с координатами $(y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n)$ подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$, порождённое векторами $v_j = e_j + u_j$, где $e_j \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq n$, суть стандартные базисные векторы, двойственные ко векторам $x_j = e_j^*$, а векторы u_j имеют координаты $\langle y_i, u_j \rangle = a_{ij}$ при $1 \leq i \leq k$ и $\langle x_\ell, u_j \rangle = 0$ при $1 \leq \ell \leq n$. Многогранник $M = (-b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ удовлетворяет условиям (S1) – (S4) для разбиения $I \sqcup J$, в котором множество I нумерует дополнительные координаты y_i , а множество J нумерует исходные координаты x_j . Пересечение $M' = M \cap H_I$ многогранника M с координатной гиперплоскостью $H_I = \text{Ann}(y_1, y_2, \dots, y_k)$ состоит из точек, J -координаты которых (x_1, x_2, \dots, x_n) как раз и являются решениями системы (9-31), лежащими в положительном октанте $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Рассмотрим ковектор

$$\beta = G \cdot \left(\sum_i y_i \right) + \sum_j c_j x_j \in \mathbb{R}^{m*}, \quad (9-32)$$

где $G \gg 0$ это фиксированное очень большое положительное число. Покажем, что задача минимизации этого функционала на многограннике M , которую можно решить симплекс-методом, эквивалентна исходной задаче (9-31).

Если функционал β достигает своего минимума в такой вершине b' , что $y_i(b') > 0$ для какого-то i , то многогранник M' пуст, поскольку в противном случае для любой точки $z \in M'$ при $G \gg 0$ выполнялось бы неравенство $\beta(b') > \beta(z)$, т. к. все $y_\nu(z) = 0$. Тем самым, в этом случае задача (9-31) не имеет решений.

Если функционал β достигает минимума в такой вершине $b' \in M$, где все $y_i(b') = 0$, то $b' \in M'$ и функционал $\sum_j c_j x_j$ достигает своего минимума при $x_i = x_i(b')$. Эта точка решает задачу (9-31).

Если функционал β не ограничен на M снизу, то ковектор (9-32) не принадлежит конусу $\alpha_M^\vee \subset V^*$, двойственному к асимптотическому конусу многогранника M . Конус α_M^\vee является выпуклой оболочкой конуса $\sigma_{M'}^\vee$, порождённого ограничениями координатных функционалов x_i на подпространство $V \subset \mathbb{R}^m$, и конуса, порождённого ограничениями на V функционалов y_i . Так как первое слагаемое в (9-32) принадлежит второму из этих конусов, неограниченность функционала β снизу на многограннике M означает, что $\sum_j c_j x_j \notin \alpha_{M'}^\vee$. Поэтому при $M' \neq \emptyset$ форма $\sum_j c_j x_j$ не ограничена снизу на M' .

Наконец, определить, пуст многогранник M' или нет, можно найдя минимум заведомо ограниченного снизу функционала $G \cdot (\sum_i y_i) \in \alpha_M^\vee$ на многограннике M . Если он достигается в вершине $b' \notin \text{Ann}(y_1, y_2, \dots, y_k)$, то $M' = \emptyset$. А если в такой вершине $b' \in M$, где все $y_\nu(b') = 0$, то $b' \in M'$.

ПРИМЕР 9.3 (ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ВЕКТОРА КОНУСУ)

Выясним, лежит ли вектор $w = (4, 14, -9, -22)$ в порождённом векторами

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 2, 3, 5) & v_3 &= (2, 0, -4, -3) & v_5 &= (0, -3, 2, 0) \\ v_2 &= (3, 2, -1, -6) & v_4 &= (-3, 2, 1, 1) & v_6 &= (1, 1, -2, -3), \end{aligned}$$

конусе $\sigma_{v_1, \dots, v_6} \subset \mathbb{R}^4$, т. е. имеет ли система уравнений $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_6 v_6$ решение $(x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^6$. В развёрнутом виде эта система выглядит как

$$\begin{cases} 4 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 & +x_6 \\ 14 = 2x_1 + 2x_2 & + 2x_4 - 3x_5 + x_6 \\ -9 = 3x_1 - x_2 - 4x_3 & + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ -22 = 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 & + x_4 & - 3x_6 \end{cases} \quad (9-33)$$

Умножим обе части первых двух уравнений на -1 , чтобы левые части стали отрицательными:

$$\begin{cases} -4 = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 & -x_6 \\ -14 = -2x_1 - 2x_2 & - 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ -9 = 3x_1 - x_2 - 4x_3 & + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ -22 = 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 & + x_4 & - 3x_6 \end{cases}$$

Теперь перенесём константы слева направо и заменим нули в левой части на новые переменные

$$\begin{aligned} x_7 &= 4 + x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 & -x_6 \\ x_8 &= 14 - 2x_1 - 2x_2 & - 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ x_9 &= 9 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 & + x_4 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_{10} &= 22 + 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 & + x_4 & - 3x_6 \end{aligned} \quad (9-34)$$

Уравнения (9-34) задают в \mathbb{R}^{10} шестимерное аффинное подпространство $b + V \subset \mathbb{R}^{10}$, удовлетворяющее условиям (S1) – (S4) для

$$I = \{7, 8, 9, 10\}, \quad J = \{1, 2, \dots, 6\}, \quad b = (0, \dots, 0, 4, 14, 9, 22).$$

Система (9-33) имеет решение в $\mathbb{R}_{\geq 0}^6$, если и только если для произвольно зафиксированного очень большого числа $G \gg 0$ линейный функционал

$$\begin{aligned} \beta(x_1, x_2, \dots, x_{10}) &= G \cdot (x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) = \\ &= 10G + Gx_1 - 10Gx_2 - Gx_3 + Gx_4 + 5Gx_5 - 3Gx_6, \end{aligned} \quad (9-35)$$

достигает своего минимума на многограннике $M = (b + V) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{10}$ в такой вершине b' , у которой $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0$. Равенства (9-34) и (9-35) собираются в симплекс-таблицу

49	7	-12	-9	3	1	-7	G
4	1	-3	-2	3	0	-1	7
14	-2	-2	0	-2	3	-1	8
9	3	-1	-4	1	-2	-2	9
22	5	-6	-3	1	0	-3	10
	1	2	3	4	5	6	

(9-36)

где в верхней строчке написаны только коэффициенты при G у значений $\langle \beta, b \rangle$ и $\langle b, e_j \rangle$ функционала β на векторах b и $e_j, j \in J$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.9. Покажите, что коэффициент при G в каждом столбце симплекс-таблицы равен сумме всех стоящих под чертой элементов этого столбца.

Снизу и справа от таблицы подписаны элементы множеств I, J соответствующие тем строкам и столбцам, напротив которых они стоят. Отметим столбец, отвечающей координате «2». Все элементы в нём отрицательны, и минимум отношений

$$-\frac{t_{1,0}}{t_{1,2}} = \frac{4}{3}, \quad -\frac{t_{2,0}}{t_{2,2}} = 7, \quad -\frac{t_{3,0}}{t_{3,2}} = 9, \quad -\frac{t_{4,0}}{t_{4,2}} = \frac{22}{6}$$

достигается в строке, отвечающей координате «7». Таким образом, мы должны перейти к новому разбиению координат на подмножества $I' = \{2, 8, 9, 10\}$ и $J' = \{1, 7, 3, 4, 5, 6\}$. Его симплекс-таблица вычисляется по правилам со стр. 163 и имеет вид

33	3	4	-1	-9	1	-3	G
4/3	1/3	-1/3	-2/3	1	0	-1/3	2
34/3	-8/3	2/3	4/3	-4	3	-1/3	8
23/3	8/3	1/3	-10/3	0	-2	-5/3	9
14	3	2	1	-5	0	-1	10
	1	7	3	4	5	6	

(9-37)

Элемент (2, 7) в этой таблице обратен элементу (7, 2) из предыдущей, отличные от (2, 7) элементы столбца «7» в (9-37) получаются делением соответствующих элементов столбца «2» таблицы (9-36) на её элемент (7, 2), тогда как отличные от (2, 7) элементы строки «2» в (9-37) суть взятые с противоположным знаком отношения элементов строки «7» таблицы (9-36) к её элементу (7, 2). Все остальные клетки таблицы (9-37) получаются из клеток таблицы (9-36) по правилу прямоугольника: например, для клетки (9, 3)

$$t'_{9,3} = t_{9,3} - \frac{t_{7,3}t_{9,2}}{t_{7,2}} = -4 - \frac{-1 \cdot (-2)}{-3} = -4 + \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Отмечаем таблице (9-37) столбец, соответствующий координате «4». В нём два отрицательных элемента, и меньшее из отношений $-t_{8,0}/t_{8,4} = 17/6, -t_{10,0}/t_{10,4} = 14/5$ стоит в строке «10». Меняя друг с другом индексы «4» и «10» по правилам со стр. 163, получаем таблицу

39/5	-12/5	2/5	-14/5	9/5	1	-6/5	G
62/15	14/15	1/15	-7/15	-1/5	0	-8/15	2
2/15	-76/15	-14/15	8/15	4/5	3	7/15	8
23/3	8/3	1/3	-10/3	0	-2	-5/3	9
14/5	3/5	2/5	1/5	-1/5	0	-1/5	4
	1	7	3	10	5	6	

Отмечаем столбец «1». В нём есть лишь один отрицательный элемент, в строке «8». Меняя элементы «1» и «8», получаем следующую таблицу:

147/19	9/19	16/19	-58/19	27/19	-8/19	-27/19	<i>G</i>
79/19	-7/38	-2/19	-7/19	-1/19	21/38	-17/38	2
1/38	-15/76	-7/38	2/19	3/19	45/76	7/76	1
147/19	-10/19	-3/19	-58/19	8/19	-8/19	-27/19	9
107/38	-9/76	11/38	5/19	-2/19	27/76	-11/76	4
	8	7	3	10	5	6	

Отмечаем столбец «3». В нём два отрицательных элемента, и меньшее из отношений

$$-\frac{t_{2,0}}{t_{2,3}} = \frac{79}{7} \quad \text{и} \quad -\frac{t_{9,0}}{t_{9,3}} = \frac{147}{58}$$

стоит в строке «9». Меняя «3» и «9», получаем заключительную таблицу

0	1	1	1	1	0	0	<i>G</i>
187/58	-7/58	-5/58	7/58	-3/29	35/58	-8/29	2
17/58	-25/116	-11/58	-1/29	5/29	67/116	5/116	1
147/58	-5/29	-3/58	-19/58	4/29	-4/29	-27/58	3
101/29	-19/116	8/29	-5/58	-2/29	37/116	-31/116	4
	8	7	9	10	5	6	

которая показывает, что функционал β достиг своего минимума в вершине с координатами

$$x_2 = 187/58, \quad x_1 = 17/58, \quad x_3 = 147/58, \quad x_4 = 101/29$$

и нулевыми остальными координатами. Таким образом,

$$w = \frac{187}{58} v_2 + \frac{17}{58} v_1 + \frac{147}{58} v_3 + \frac{101}{29} v_4.$$

§10. Проективное пространство

10.1. Проективное пространство. С $(n + 1)$ -мерным векторным пространством V над произвольным полем \mathbb{k} помимо $(n + 1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого по определению являются одномерные векторные подпространства в V или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы наблюдать их как «обычные точки», внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^* \setminus 0$ это ненулевая линейная форма на V (см. рис. 10◊1).

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Такие экраны U_ξ называются *аффинными картами* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств, лежащих в n -мерном векторном подпространстве $\text{Ann } \xi \subset V$ параллельном экрану U_ξ . Таким образом, невидимые в карте U_ξ точки n -мерного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют $(n - 1)$ -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ . Точки $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ .

Из сказанного вытекает, что n -мерное проективное пространство \mathbb{P}_n разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств всех размерностей от 0 до n :

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0,$$

где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ это одна точка.

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

10.1.1. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты x_0, x_1, \dots, x_n относительно какого-нибудь базиса e_0, e_1, \dots, e_n . Два ненулевых вектора

$$v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны. Последнее равносильно равенству отношений¹ $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$.

¹При этом равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$, в которых x и y либо одновременно отличны от нуля, либо одновременно нулевые, тоже допускаются и считаются истинными.

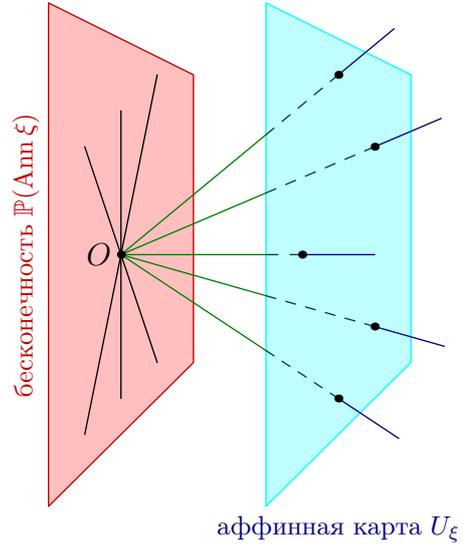


Рис. 10◊1. Проективный мир.

Иначе говоря, с точкой $p \in \mathbb{P}_n$ взаимно однозначно связаны не координаты ненулевого вектора, задающего эту точку, а только отношения $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ между ними. Эти отношения называются *однородными координатами* точки p в базисе e_0, e_1, \dots, e_n .

10.1.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$, таких что $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ образуют базис в V^* , задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, пусть векторы $e_0, e_1, \dots, e_m \in V$ составляют двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ базис пространства V . За начало отсчёта аффинной координатной системы в карте U_ξ принимается точка $e_0 \in U_\xi$, а в качестве базиса векторного пространства $\text{Ann } \xi$, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ , берутся векторы e_1, e_2, \dots, e_n . Для вычисления локальных аффинных координат относительно такого репера у точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ следует выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p , базисный вектор $v = p / \xi(p) \in U_\xi$ с $\xi(v) = 1$, и вычислить значения n линейных форм ξ_i на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p) / \xi(p)$, $1 \leq i \leq n$, зависят от однородных координат точки p *не линейно*, а дробно линейно.

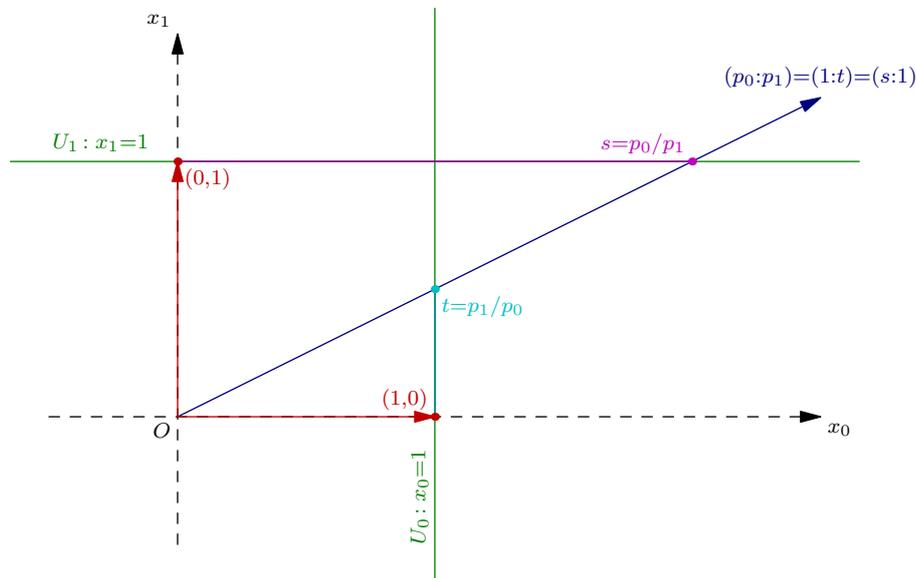


Рис. 10◊2. Стандартные карты на \mathbb{P}_1 .

ПРИМЕР 10.1 (ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ, СР. С № 3.7 НА СТР. 47)

Как мы видели в н° 3.7 на стр. 47, проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, которые представляют собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$, см. рис. 10◊2. Карта U_0 покрывает все точки \mathbb{P}_1 кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, единственной бесконечно удалённой точки для карты U_0 . Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $(1 : \frac{x_1}{x_0})$ и функция $w = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $w = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1 . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты z и w одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$,

видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $z = 1/w$.

Упражнение 10.3. Убедитесь в этом.

Иначе говоря, проективная прямая $\mathbb{P}_1(\mathbb{k})$ является результатом склейки двух аффинных прямых $\mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{k}$ с координатами z и w вдоль подмножеств $z \neq 0$ и $w \neq 0$ путём отождествления точки с координатой z на одной прямой и точки с координатой $w = 1/z$ на другой для всех $z, w \neq 0$. В н° 3.7 на стр. 47 мы видели, что над полями $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ результатами такой склейки являются, соответственно окружность и сфера (см. рис. 3◊19 на стр. 48 и рис. 3◊20 на стр. 49), т. к. окружность (соотв. сфера) диаметра 1 точно также склеиваются из двух касательных прямых \mathbb{R} (соотв. плоскостей \mathbb{C}), проведённых в диаметрально противоположных точках и проектирующихся на окружность (соотв. сферу) из точки, диаметрально противоположной к точке касания.

Пример 10.2 (вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)

Как топологическое пространство, вещественная проективная плоскость допускает следующее наглядное описание. Каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^3 пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, x_0 \geq 0$. При этом любая не лежащая в плоскости $x_0 = 0$ прямая пересекает полусферу ровно в одной, внутренней точке, а каждая прямая из плоскости $x_0 = 0$ пересекает полусферу в двух диаметрально противоположных точках границы. Таким образом, топологическое пространство $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ гомеоморфно¹ полусфере, у которой склеены диаметрально противоположные точки границы. Поскольку полусфера гомеоморфна квадрату, то же пространство получится при склейке противоположных сторон квадрата с обращением их ориентации, как на рис. 10◊3.

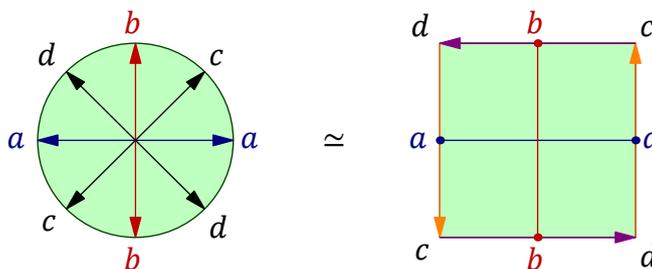


Рис. 10◊3. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это квадрат со склеенными противоположными точками границы.

Результат такой склейки иначе можно описать как ленту Мёбиуса, к граничной окружности которой приклеен — по своей граничной окружности — диск, см. рис. 10◊4.

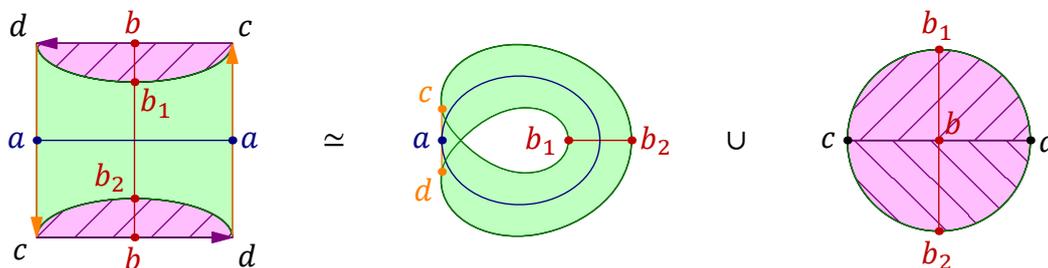


Рис. 10◊4. $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей.

¹Биективное отображение между топологическими пространствами называется гомеоморфизмом, если и оно, и обратное к нему отображения оба непрерывны.

Обратите внимание, что красный вертикальный и синий горизонтальный отрезки квадрата превращаются при склейке в две петли¹ на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, которые пересекаются по одной точке, причём при малых шевелениях этих петель они по-прежнему будут пересекаться в одной точке. Это означает, что ни одну из них нельзя стянуть в точку непрерывной деформацией внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Убедитесь, что устойчивое к малым шевелениям количество точек пересечения непрерывно стягиваемой в точку петли с любой другой петлёй чётно.

При этом, если петлю a , т. е. экватор ленты Мёбиуса, пройти в одном направлении дважды, то возникающая таким образом «удвоенная петля» непрерывно деформируется в границу ленты Мёбиуса, а значит, может быть стянута внутри $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ в точку по приклеенному к границе ленты Мёбиуса диску. Таким образом, на $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ есть нестягиваемая петля, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 10.3 (вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$)

В прим. 7.4 на стр. 108 мы видели, что каждая собственная линейная изометрия трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 является поворотом вокруг некоторой прямой. Изобразим поворот вокруг прямой с вектором скорости e единичной длины на угол $\varphi \in [0, \pi]$, если смотреть вдоль вектора e , точкой² $\varphi \cdot e \in \mathbb{R}^3$. В результате все повороты на углы, меньшие π , изобразятся внутренними точками шара радиуса π с центром в нуле. Диаметально противоположным точкам ограничивающей этот шар сферы отвечает одна и та же изометрия — поворот на угол π вокруг соединяющей эти точки прямой³. Таким образом собственная ортогональная группа $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ евклидова пространства \mathbb{R}^3 гомеоморфна трёхмерному шару со склеенными диаметально противоположными точками ограничивающей этот шар сферы. С другой стороны, конструкция из предыдущего прим. 10.2, применённая к пространству \mathbb{R}^4 , показывает, что вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ допускает точно такое же описание: каждая проходящая через начало координат прямая в \mathbb{R}^4 пересекает единичную замкнутую полусферу $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_0 \geq 0$, и все не лежащие в плоскости $x_0 = 0$ прямые пересекают её в единственной внутренней точке, а прямые из плоскости $x_0 = 0$ — по двум диаметально противоположным точкам граничной трёхмерной сферы $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$. Остаётся заметить, что полусфера в \mathbb{R}^4 гомеоморфна шару в \mathbb{R}^3 .

УПРАЖНЕНИЕ 10.5. Убедитесь, что семейство вращений вокруг фиксированной оси в фиксированном направлении на углы от 0 до 2π в фиксированном направлении тоже образуют в пространстве $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ нестягиваемую петлю, двойной обход которой стягиваем.

ПРИМЕР 10.4 (стандартное аффинное покрытие \mathbb{P}_n)

Набор из $(n + 1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в \mathbb{A}^{n+1} уравнениями $x_\nu = 1$, называется *стандартным открытым покрытием* координатного проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n линейных форм $t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = x_i / x_\nu$, где $0 \leq i \leq n$ и $i \neq \nu$. Таким образом, пространство \mathbb{P}_n можно представлять себе как результат склейки $(n + 1)$ различных копий U_0, U_1, \dots, U_n аффинного пространства \mathbb{A}^n по их фактическим пересечениям внутри \mathbb{P}_n . В однородных координатах на \mathbb{P}_n пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ описывается как множество всех таких x, y

¹Т. е. в замкнутые кривые, являющиеся непрерывными образами окружности.

²Т. е. концом вектора длины $\varphi \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, отложенного в направлении единичного вектора e .

³Он виден как поворот на угол π независимо от того направления на оси, вдоль которого Вы его наблюдаете.

которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это множество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

10.2. Задание фигур полиномиальными уравнениями. Если зафиксировать в векторном пространстве V^* базис x_0, x_1, \dots, x_n , каждому многочлену $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ можно сопоставить функцию $\tilde{f} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой в точке $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ равно $f(p_0, p_1, \dots, p_n)$, результату подстановки значений координат этой точки вместо переменных в многочлен f . Получающиеся таким образом функции $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ называются *полиномиальными*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.6 (ПО АЛГЕБРЕ). Покажите, что: а) полиномиальные функции образуют подалгебру¹ в \mathbb{k} -алгебре всех функций $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ б) эта подалгебра не зависит от выбора базиса в V , использованного для её определения в) над любым конечным полем \mathbb{k} любая функция $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ может быть (многими способами) записана в виде \tilde{f} с разными $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ г) над любым бесконечным полем существуют неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, и равенство полиномиальных функций $\tilde{f} = \tilde{g}$ влечёт равенство задающих их многочленов $f = g$ в $\mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через

$$V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$$

и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью*, задаваемой многочленом f . Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных (неоднородных) уравнений.

На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ отличный от константы многочлен от однородных координат, вообще говоря, не задаёт никакой функции. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени $d > 0$ множество его нулей²

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

является корректно определённым подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0, .$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* и тоже обозначается через $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений³ систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

¹Т. е. подкольцо и одновременно векторное подпространство.

²Рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы.

³Как и выше, рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, проективизации ненулевых векторных подпространств $U \subset V$. Они задаются системами однородных линейных уравнений. Так, через любые две различные точки $a, b \in \mathbb{P}(V)$ проходит *проективная прямая* (ab) , которая представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a, b и состоит из всевозможных ненулевых векторов $\lambda a + \mu b$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Она может быть задана системой однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\text{Ann } a \cap \text{Ann } b$ или какой-нибудь базис в этом подпространстве. Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов в разложении вектора $v = \lambda a + \mu b \in (ab)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на проективной прямой (ab) .

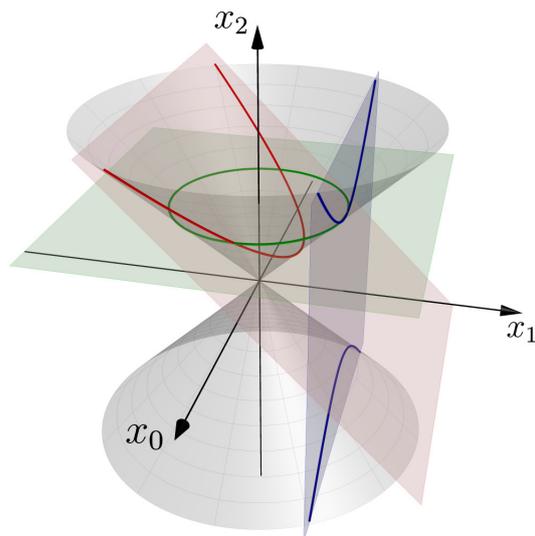
УПРАЖНЕНИЕ 10.7. Рассмотрим произвольную аффинную карту $U_\xi \subset \mathbb{P}_n$ и произвольное k -мерное проективное подпространство $K \subset \mathbb{P}_n$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \emptyset$, либо $K \cap U_\xi$ является k -мерным аффинным подпространством в U_ξ .

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство¹ $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$.

ПРИМЕР 10.5 (Аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C , заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \quad (10-1)$$



В стандартной карте U_{x_1} , где $x_1 = 1$, в локальных координатах

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1$$

$$t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (10-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2} , где $x_2 = 1$, с локальными координатами

$$t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$$

$$t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$$

мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в координатах

$$\text{Рис. 10} \diamond 5. \text{ Конус. } t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1 + x_2)$$

$$u = (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$$

мы получим² уравнение параболы $t^2 = u$. Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (10-1) в различных аффинных картах. Вид кривой C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C , касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 10♦5).

¹ В частности, любые две прямые на \mathbb{P}_2 пересекаются.

² После переноса x_1^2 из левой части (10-1) в правую и деления обеих частей на $x_2 + x_1$.

10.2.1. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности. Пусть аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в аффинном координатном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$ задаётся (неоднородным) многочленом степени d вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый многочлен f_i . Вложим \mathbb{A}^n в проективное координатное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в качестве стандартной аффинной карты U_0 и образуем однородный многочлен

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который получается из f умножением каждого монома на такую степень переменной x_0 , которая делает степень всего монома равной d . Многочлен \bar{f} превращается в f , если положить $x_0 = 1$. Таким образом, многочлены f и \bar{f} однозначно определяют друг по другу. Проективная гиперповерхность $V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$ называется *проективным замыканием* аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Последняя является пересечением проективной гиперповерхности $V(\bar{f})$ со стандартной аффинной картой U_0 . Дополнение $V(\bar{f}) \setminus U_0 = V(\bar{f}) \cap \mathbb{P}(\text{Ann } x_0)$, т. е. пересечение гиперповерхности $V(\bar{f})$ с бесконечно удалённой проективной гиперплоскостью аффинной карты U_0 , задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ на этой гиперплоскости однородным уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, т. е. старшей однородной компонентой многочлена f . Точки этой проективной гиперповерхности называются *асимптотическими направлениями* аффинной гиперповерхности $V(f)$.

Например, проективное замыкание аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ это проективная кубическая кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в стандартной аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

10.2.2. Пространство гиперповерхностей. Однородные многочлены фиксированной степени d вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы будем обозначать через $S^d V^* \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.9. Найдите размерность пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным* уравнением на $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d , проходящие через заданную точку p , образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями $V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m)$ задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение $V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)$.

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы частенько называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей¹ всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

ПРИМЕР 10.6 (НАБОРЫ ТОЧЕК НА \mathbb{P}_1 И КРИВАЯ ВЕРОНЕЗЕ)

Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \mathbb{k}^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ (среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d -той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{v=1}^d \det(x, p_v) = \prod_{v=1}^d (p_{v,1}x_0 - p_{v,0}x_1), \quad \text{где } p_v = (p_{v,0} : p_{v,1}). \quad (10-2)$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой A_1 , мы будем называть точки $p_v \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1 . В этом смысле разложение (10-2) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на \mathbb{P}_1 , а если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей², будет ровно d . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} всевозможные d -точечные конфигурации на \mathbb{P}_1 взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$ -мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1 .

Покажем, что над произвольным полем \mathbb{k} , характеристика которого не делит d , те конфигурации из d точек на \mathbb{P}_1 , в которых все d точек слипаются в одну, образуют алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$. Эта кривая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой d -той степени* и является образом *отображения Веронезе*

$$v_d : \mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \rightarrow \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*), \quad (10-3)$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$, задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$, в её d -ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$, задающую d -кратную точку p . Условимся записывать $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^{\nu},$$

где a_k суть частные от деления коэффициентов многочлена f на биномиальные коэффициенты³ $\binom{d}{k}$, и используем отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно. В этих обозначениях кривая Веронезе описывается параметрическим уравнением

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = (\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1} \alpha_1 : \alpha_0^{d-2} \alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d), \quad (10-4)$$

¹Над любым полем!

²Под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую многочлен f делится в $\mathbb{k}[t_0, t_1]$.

³Если $\text{char } \mathbb{k} = p$ делит d , то записать f в таком виде невозможно, поскольку некоторые биномиальные коэффициенты обратятся в нуль. Например, при $d = p$ весь образ отображения (10-3) лежит на прямой, проходящей через x_0^p и x_1^p , поскольку $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^p = \alpha_0^p x_0^p + \alpha_1^p x_1^p$ при $\text{char } \mathbb{k} = p$.

из которого вытекает, что кривая C_d состоит из всех таких точек $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это равносильно равенству

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

т. е. системе однородных квадратичных уравнений $a_i a_j = a_{i+1} a_{j-1}$, $1 \leq i < j \leq d$.

Например, коника Веронезе $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ состоит из всех ненулевых квадратных трёхчленов¹

$$a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2,$$

являющихся полными квадратами. Она описывается хорошо известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \quad (10-5)$$

и допускает следующее параметрическое описание:

$$a_0 = \alpha_0^2, \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_1^2, \quad (10-6)$$

где $(\alpha_0 : \alpha_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Пересечение кривой (10-4) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_v \cdot \alpha_0^{d-v} \alpha_1^v$ степени d . Поскольку таких точек не более d , над произвольным полем \mathbb{k} , характеристика которого не делит d , никакие $d + 1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leq m \leq d$ никакие $m + 1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m - 1)$ -мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит d , пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек². Именно поэтому мы и говорим, что *степень* кривой C_d равна d .

10.3. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \emptyset$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в \mathbb{P}_3 дополнительные. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства $U, W \subset V$ трансверсальны: $U \cap W = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n + 1) = \dim V,$$

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U , ни в W . Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая каждое из подпространств K, L . В самом деле, в качестве точек q и r , задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения вектора v , задающего точку p , и наоборот, если вектор v , задающий точку p оказался в

¹Как обычно, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

²Некоторые из которых могут совпадать друг с другом.

двумерной линейной оболочке ненулевых векторов $u \in U$ и $w \in W$, то одномерные подпространства, натянутые на u и w должны содержать компоненты разложения вектора v в силу единственности его разложения по U и W .

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ определено отображение

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L, \tag{10-7}$$

которое тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L той единственной прямой, что проходит через p и пересекает оба подпространства K и L . Отображение (10-7) называется *проекцией на L из K* . В согласованных с разложением $V = U \oplus W$ однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ таких, что $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ являются координатами в K , а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$ — в L , проекция π_L^K просто удаляет первые $(m + 1)$ координат x_ν с $0 \leq \nu \leq m$.

Пример 10.7 (проекция коники на прямую)

Спроектируем гладкую конику C , заданную уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ из прим. 10.5, на прямую L , заданную уравнением $x_0 = 0$, из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$. В стандартной аффинной карте U_2 , где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \rightarrow L$ выглядит как на рис. 10◊6. Она устанавливает бирациональную биекцию между прямой L и коникой C в том смысле, что однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть рациональные алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= \\ &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2 t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \end{aligned} \tag{10-8}$$

Упражнение 10.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что когда (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ вторая из них перечисляет все пифагоровы тройки¹ $(q_0 : q_1 : q_2)$.

а само отображение $\pi_L^p : C \rightarrow L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой $x_0 = x_2$ (на рис. 10◊6 это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p , и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t , являющиеся рациональными функциями от t , и координаты точки p .

Отметим, что коника C переводится в конику Веронезе $a_1^2 = a_0 a_2$ из (10-5) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_2 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

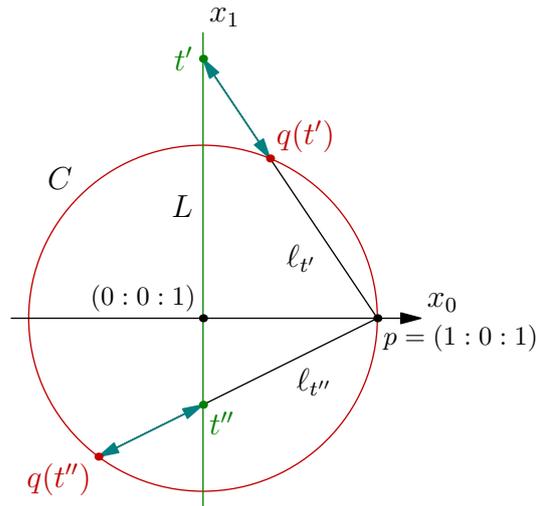


Рис. 10◊6. Проектирование коники на прямую.

¹Т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$.

и параметризация (10-6) кривой Веронезе при этой замене координат превращается в точности в параметризацию (10-8).

10.4. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \simeq W$ корректно определяет биекцию $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.11. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$.

Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \simeq L_2$.

ТЕОРЕМА 10.1

Для любых двух упорядоченных наборов из $(n + 2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U), \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W),$$

в каждом из которых никакие $(n + 1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \rightarrow W$, такой что $\bar{F}(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i , представляющие точки p_i и q_i , и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W . Оператор $F : U \rightarrow W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i , когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \mathbb{k}$. В частности, для того, чтобы точки p_0, p_1, \dots, p_n переводились преобразованием \bar{F} в точки q_0, q_1, \dots, q_n , необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении $u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n + 1$ точка¹ оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ (при всех $0 \leq i \leq n$), из которых

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n).$$

Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. \square

Следствие 10.1

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. \square

Пример 10.8 (четырёхвершинник и эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$)

Любые четыре точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, задают конфигурацию из трёх пар прямых, соединяющих непересекающиеся пары точек (см. рис. 10◊7). Эта конфигурация называется *четырёхвершинником $abcd$* , а пары прямых, проходящих через непересекающиеся пары точек, называются *противоположными сторонами* этого четырёхвершинника. Точки пересечений пар противоположных сторон

$$x = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad z = (ad) \cap (bc) \quad (10-9)$$

¹А именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1} .

и проходящие через них три прямые называют *ассоциированным треугольником* xuz четырёхвершинника $abcd$. Согласно теор. 10.1 на стр. 181, каждая перестановка точек a, b, c, d однозначно задаёт линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_2 \simeq \mathbb{P}_2$, переводящее четырёхвершинник $abcd$ в себя, а значит, как-то переставляющее вершины x, y, z ассоциированного с ним треугольника. Возникающий таким образом гомоморфизм групп перестановок $\pi : S_4 \rightarrow S_3$ сюръективен, поскольку транспозиция точек a, b и транспозиция точек a, c приводят, соответственно, к транспозициям точек y, z и точек x, z , которые порождают группу треугольника xuz . Ядро гомоморфизма¹ π состоит из тождественной перестановки и трёх пар непересекающихся транспозиций:

$$\ker \pi = \{(a, b, c, d), (b, a, d, c), (c, d, a, b), (d, c, b, a)\}.$$

Эта четырёхэлементная группа перестановок называется *группой Клейна* или *группой двуугольника* и обозначается V_4 или D_2 .

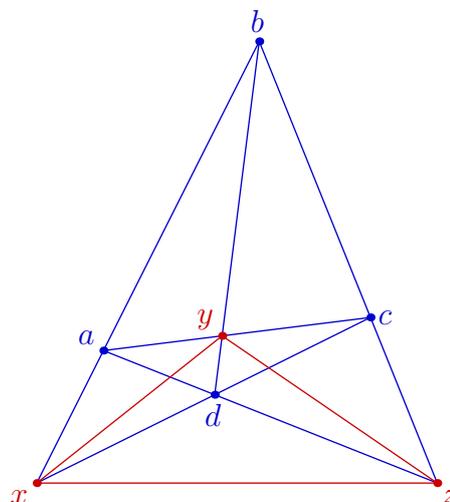


Рис. 10◊7. Четырёхвершинник.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ГРУППЫ)

Согласно теор. 10.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $GL(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$. Эта фактор группа обозначается $PGL(V) = GL(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $GL(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1} , проективная группа $PGL(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

ПРИМЕР 10.9 (ДРОБНО ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ)

Группа $PGL_2(\mathbb{k})$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$.

Она действует на \mathbb{P}_1 по правилу

$$A : (x_0 : x_1) \mapsto ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$. Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в $\infty, 0, 1$, очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q} \quad (10-10)$$

10.5. Гомографии. Многие геометрические задачи так или иначе связаны с соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, такими что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются бирациональные² биекции или *гомографии*.

¹Напомним, что ядром гомоморфизма групп $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ называется подгруппа $\ker \varphi \subset G_1$, состоящая из всех элементов группы G_1 , отображающихся в единицу группы G_2 .

²Соответствие между точками называется *бирациональным*, если координаты соответственных точек являются рациональными функциями друг друга.

ТЕОРЕМА 10.2

Если над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} с $\text{char } \mathbb{k} = 0$ имеется биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой t может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \quad (10-11)$$

то φ является линейным проективным изоморфизмом¹.

Доказательство. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, формулу (10-11) можно переписать² как $\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (F(x_0, x_1) : G(x_0, x_1))$, где F и G не пропорциональные друг другу однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $d = \deg F = \deg G$. Если точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, то однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot F(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0, x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 ровно один корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$. Над алгебраически замкнутым полем такое возможно, только если этот корень d -кратный. Поэтому в пространстве \mathbb{P}_d однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) прямая $(F, G) = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1\}$ имеет бесконечно много³ точек пересечения с кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из прим. 10.6 на стр. 178, где мы видели, что при $d \geq 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. \square

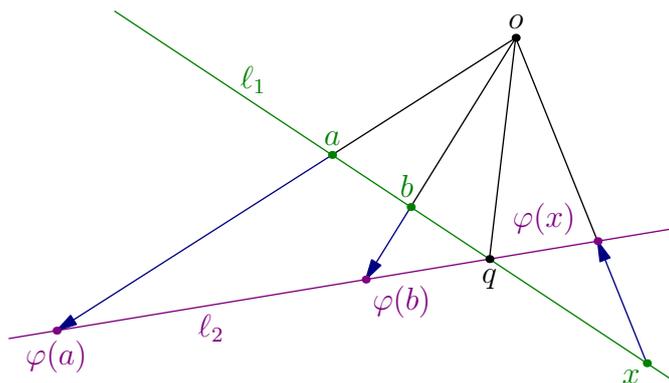


Рис. 10♦8. Перспектива.

ПРИМЕР 10.10 (ПЕРСПЕКТИВЫ)

Важным примером гомографии является центральная проекция прямой $\ell_1 \subset \mathbb{P}_2$ на другую прямую $\ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ из произвольной точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ (см. рис. 10♦8). Мы будем называть такую гомографию *перспективой* с центром o и обозначать $o : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.12. Убедитесь, что перспектива в самом деле является гомографией (т. е. биективна и бирациональна).

Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\cong} \ell_2$ является перспективой, если и только если она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя. В самом деле, беря в качестве o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b)$,

¹И, в частности, однозначно продолжается на всю прямую.

²Конечное множество, где отображение φ не определено, может при этом поменяться.

³Т. к. поле \mathbb{k} бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек.

как на рис. 10◊8, видим, что перспектива $o : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ также, как и φ , и, стало быть, совпадает с φ , т. к. дробно линейный изоморфизм однозначно определяется своим действием на три различных точки.

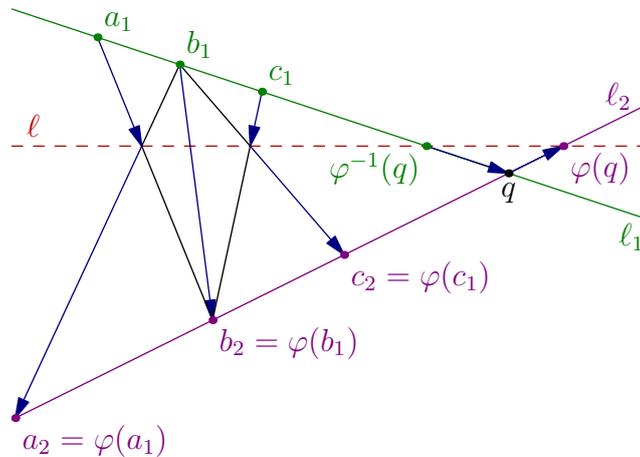


Рис. 10◊9. Перекрёстная ось.

Предложение 10.1

Пусть прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ пересекаются в точке $q = \ell_1 \cap \ell_2$. Если для некоторой прямой ℓ и точек $b_1 \in \ell_1$ и $b_2 \in \ell_2$ гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ раскладывается в композицию перспектив

$$\varphi = (b_1 : \ell \rightarrow \ell_2) \circ (b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell), \quad \text{где } b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2, \quad (10-12)$$

(см. рис. 10◊9), то $b_2 = \varphi(b_1)$, а ℓ проходит через точки $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Наоборот, каждую гомографию $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ можно разложить в композицию (10-12), в которой точку $b_1 \in \ell_1$ можно выбрать произвольно, точка $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ не зависит от выбора $b_1 \in \ell_1$.

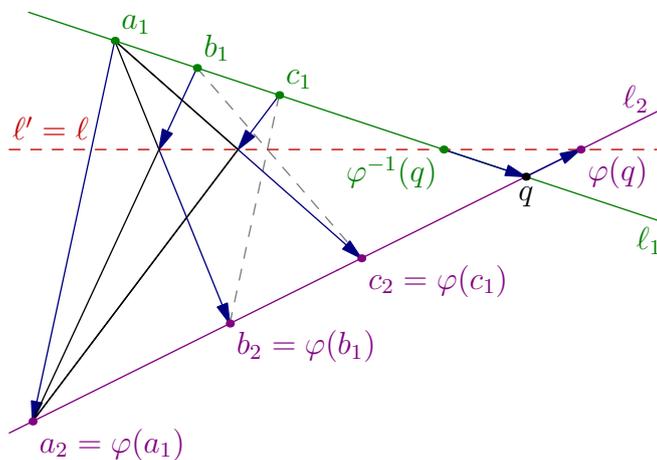


Рис. 10◊10. Равенство $\ell' = \ell$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из рис. 10◊9. Для доказательства второго рассмотрим произвольные три различных и отличных от $q = \ell_1 \cap \ell_2$ точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ и обозначим через $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ их образы относительно φ . Возьмём в качестве ℓ прямую, проходящую через точки пересечения пар «перекрёстных» прямых $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$. Из

рис. 10◊9 очевидно, что композиция перспектив из правой части (10-12) переводит a_1, b_1, c_1 соответственно в a_2, b_2, c_2 и, стало быть, совпадает с φ . Чтобы убедиться, что прямая ℓ не зависит от b_1 повторим предыдущее рассуждение, заменив в нём тройку a_1, b_1, c_1 — тройкой c_1, a_1, b_1 (см. рис. 10◊10). Получим разложение $\varphi = (a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2) \circ (a_2 : \ell' \rightarrow \ell)$, в котором прямая ℓ' проходит через точки пересечения пар перекрёстных прямых $(a_1 c_2) \cap (c_1, a_2)$ и $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$. Обе прямые ℓ и ℓ' проходят через точку $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$, а также (согласно первому утверждению предложения) через точки¹ $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Поэтому $\ell = \ell'$. \square

Следствие 10.2 (перекрёстная ось гомографии)

Для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ и точек $x \neq y$, независимо пробегающих прямую ℓ_1 , GMT пересечений «перекрёстных прямых» $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ представляет собою прямую², проходящую через точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$.

Замечание 10.1. Обратите внимание, что предл. 10.1 и сл. 10.2 справедливы и для перспектив, когда точки $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$ и $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$ совпадают друг с другом и с $\ell_1 \cap \ell_2$ и сами по себе не определяют перекрёстную ось ℓ однозначно.

УПРАЖНЕНИЕ 10.13. На \mathbb{P}_2 даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Гомография $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$ переводит три данные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в три данные точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Одной линейкой постройте образ $\varphi(x)$ произвольно заданной точки $x \in \ell_1$.

10.6. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и аффинной координатой $x = x_0 / x_1$. Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0 / a_1$ и $b = b_0 / b_1$ любых двух точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2

Для четырёх различных точек $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)}. \quad (10-13)$$

называется *двойным отношением*³ этих четырёх точек.

УПРАЖНЕНИЕ 10.14. Пусть точки c, d имеют координаты γ, δ в аффинной карте с началом в b , для которой $a = \infty$, т. е. $c = b + \gamma a, d = b + \delta a$. Убедитесь, что $[a, b, c, d] = \delta / \gamma$.

¹Совпадающие друг с другом, если φ перспектива.

²Эта прямая называется *перекрёстной осью* гомографии φ (по-английски: *cross-axis*).

³По-английски *cross-ratio*.

10.6.1. Геометрический смысл двойного отношения. Согласно формуле (10-10) двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме \mathbb{P}_1 , переводящем точки p_1, p_2, p_3 в точки $\infty, 0, 1$ соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме $\infty, 0$ и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 10.15. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (10-13) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть, содержащая разности аффинных координат точек, не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней, при условии, что эта карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны.

Упражнение 10.16. Убедитесь в этом а) прямым вычислением б) выведите инвариантность двойного отношения из н° 1.6.2 на стр. 22.

Предложение 10.2

Биекция $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_1$ является линейным проективным изоморфизмом, если и только если она сохраняет двойные отношения.

Доказательство. Пусть φ переводит точки a, b и c в $\infty, 0$ и 1 соответственно. Если φ сохраняет двойные отношения, то каждая точка $t \in \mathbb{P}_1 \setminus \{a, b, c\}$ переходит в точку $\varphi(t) = [a, b, c, t] = \frac{(t-b)(c-a)}{(t-a)(c-b)}$, т. е. φ дробно линейно. \square

10.6.2. Общие и специальные четвёрки точек. Из формулы (10-13) очевидно, что одновременная перестановка двух непересекающихся пар точек не меняет двойного отношения от-
ношения:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = t. \quad (10-14)$$

где $t \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$ это образ точки p_4 при гомографии $\vartheta : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 0, 1)$. Двойное отношение $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ равно образу точки p_4 при гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, \infty, 1)$, которая получится, если следом за гомографией ϑ применить гомографию $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$, действующую по правилу $t \mapsto 1/t$. Тем самым,

$$[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/t \quad (10-15)$$

Аналогично, p_4 переводится в $[p_3, p_2, p_1, p_4]$ и $[p_1, p_3, p_2, p_4]$ гомографиями $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (\infty, 1, 0)$, композициями ϑ с преобразованиями $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, 0, \infty)$ и $(\infty, 0, 1) \mapsto (\infty, 1, 0)$, задаваемыми формулами $t \mapsto t/(t-1)$ и $t \mapsto 1-t$. Поэтому

$$\begin{aligned} [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = t/(t-1) \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= [p_3, p_1, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_3, p_1] = 1-t. \end{aligned} \quad (10-16)$$

Поскольку гомографии $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(p_1, p_2, p_3) \mapsto (0, 1, \infty)$ получаются применением вслед за ϑ гомографий $(\infty, 0, 1) \mapsto (1, \infty, 0)$ и $(\infty, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$, действующих по формулам $t \mapsto (t-1)/t$ и $t \mapsto 1/(1-t)$, получаем

$$\begin{aligned} [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (t-1)/t \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_3, p_1] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1-t). \end{aligned} \quad (10-17)$$

Формулы (10-14)-(10-17) описывают все возможные значения двойного отношения, возникающие при 24 перестановках точек p_1, p_2, p_3, p_4 . Если $t \in \mathbb{k}$ таково, что все шесть значений

$$t, \quad 1/t, \quad t/(t-1), \quad 1-t, \quad (t-1)/t, \quad 1/(1-t) \quad (10-18)$$

из правых частей формул (10-14)-(10-17) различны, то никакую перестановку точек p_i кроме четырёх перестановок¹ $(p_1, p_2, p_3, p_4), (p_2, p_1, p_4, p_3), (p_3, p_4, p_1, p_2), (p_4, p_3, p_2, p_1)$ невозможно осуществить дробно линейным преобразованием проективной прямой. Такие четвёрки точек называются *общими*.

При значениях $t = -1, 2, 1/2$, удовлетворяющих равенствам $t = 1/t, t = t/(t-1)$ и $t = 1-t$ соответственно, двойное отношение $[p_1, p_2, p_3, p_4] = t$ пробегает при перестановках точек всего три различных значения и не меняется при транспозициях² $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$. Если же t удовлетворяют любому из двух эквивалентных друг другу квадратных уравнений³ $t = (t-1)/t$ или $t = 1/(1-t)$, то двойное отношение точек p_i не меняется при циклических перестановках точек p_1, p_2, p_3 и может принимать всего два различных значения. Четвёрка точек с двойным отношением, равным одному из этих пяти специальных значений, называется *специальной*. Таким образом, при перестановках точек, образующих специальную четвёрку, двойное отношение принимает либо три, либо два различных значения, тогда как для общей четвёрки все шесть значений (10-18) различны. Геометрически, специальность четвёрки точек означает существование гомографии, осуществляющей перестановку этих точек, отличную от четырёх клейновских перестановок.

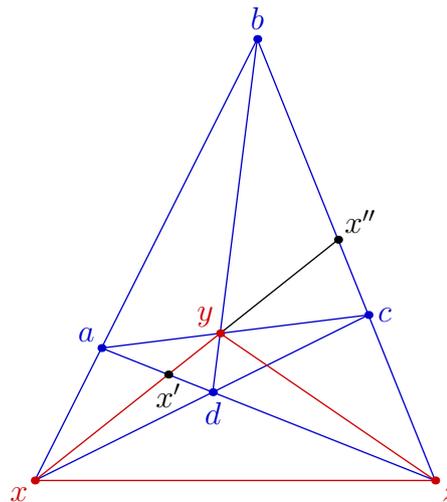


Рис. 10.11.

10.6.3. Гармонические пары точек. Четвёрка точек $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$. Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d . При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Выше мы видели, что гармоничность двух пар точек равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар⁴. Так как двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой как единого целого, *гармоничность* является *симметричным* бинарным отношением на множестве *неупорядоченных* пар точек на \mathbb{P}_1 .

Пример 10.11 (гармонические пары прямых в четырёхвершиннике, продолжение прим. 10.8)

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в вершинах x, y, z треугольника, ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$, пара сторон четырёхвершинника гармонична

¹Составляющих группу Клейна из прим. 10.8 на стр. 181.

²А также остальных восьми перестановках из подгруппы, порождённой такой транспозицией и четырьмя клейновскими перестановками.

³Равносильных уравнению $t^2 - t + 1 = 0$, корнями которого являются отличные от -1 кубические корни из единицы, лежащие в поле \mathbb{k} .

⁴См. формулу (10-15) на стр. 186.

паре сторон треугольника xuz , см. рис. 10◊11. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) и одновременно — точками прямой (bc) . Мы должны проверить, что прямая (xu) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x' , x'' , что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из u являются дробно-линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc) , возникают следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Так как при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1 .

§11. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$.

11.1. Квадрики и их уравнения. Гиперповерхность второй степени $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, задаваемая в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ ненулевым однородным квадратичным многочленом $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой*. Проективизация $\mathbb{P}(S^2V^*)$ пространства однородных многочленов второй степени называется *пространством квадрик* в $\mathbb{P}(V)$. Квадрики на плоскости \mathbb{P}_2 называются *кониками*, в пространстве \mathbb{P}_3 — *квадратичными поверхностями*.

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Убедитесь, что размерность пространства квадрик в \mathbb{P}_n равна $n(n+3)/2$.

В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ относительно какого-нибудь базиса e_0, e_1, \dots, e_n в пространстве V любой квадратичный многочлен q можно записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x^t A x,$$

где x обозначает столбец координат, $x^t = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ это транспонированная к x строка координат, а $A = (a_{ij})$ это *симметричная* матрица, имеющая при $i \neq j$ в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину¹ коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$. Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма

$$\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad (u, w) \mapsto \tilde{q}(u, w),$$

такая что $q(x) = \tilde{q}(x, x)$. Она называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\tilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = x^t A y = \frac{1}{2} \sum_j y_j \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)). \quad (11-1)$$

Матрица A это *матрица Грама* билинейной формы \tilde{q} в базисе e , т. е. $a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Убедитесь, что матрица Грама A' формы q в базисе² $e' = eC$ выражается через матрицу Грама A базиса e по формуле $A' = C^t A C$.

11.1.1. Определитель и ранг квадратичной формы. Из [упр. 11.2](#) вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$ умножается на *ненулевой квадрат*. Тем самым, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля \mathbb{k} , не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Обратите внимание, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} класс $\det q \in \mathbb{k}/(\mathbb{k}^*)^2 = \{0, 1\}$ может принимать всего два значения: 0 и 1.

Над произвольным полем \mathbb{k} квадрики с нулевым определителем Грама называются *вырожденными* или *особыми*, а с ненулевым — *невырожденными* или *гладкими*.

¹Обратите внимание, что при $\text{char} \mathbb{k} = 2$ не все квадратичные формы так представляются.

²Здесь $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$ представляют собою строки из векторов, а $C = (c_{ij})$ это квадратная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$ по столбцам которой стоят координаты векторов из базиса e' в базисе e .

Поскольку для произвольной матрицы A и любой обратимой матрицы C выполняются равенства¹ $\text{rk } CA = \text{rk } A = \text{rk } AC$, ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* формы q и обозначается $\text{rk } q$.

11.1.2. Проективная конгруэнтность. Две квадрики называются *проективно конгруэнтными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Из предыдущего вытекает, что квадрики, имеющие различный ранг $\text{rk } q$ или определитель Грама $\det q \in \mathbb{k}/(\mathbb{k}^*)^2$, не могут быть проективно конгруэнтны.

ТЕОРЕМА 11.1 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Над произвольным полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ для любой квадратичной формы q существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. При $\dim V \leq 1$ или $q = 0$ доказывать нечего. Пусть существует вектор $e \in V$ с $q(e) = \tilde{q}(e, e) \neq 0$. Обозначим через $e^\perp = \{u \in V \mid \tilde{q}(u, e) = 0\}$ ортогональное дополнение к e относительно билинейной формы \tilde{q} .

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Убедитесь, что $V = (\mathbb{k} \cdot e) \oplus e^\perp$ при $\dim V \geq 2$.

По индукции в подпространстве e^\perp есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему вектор e , получаем искомый базис во всём пространстве. \square

СЛЕДСТВИЕ 11.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любая квадрика q задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$, где $r = \text{rk } q$. В частности, две квадрики проективно конгруэнтны, если и только если у них одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i / \sqrt{q(e_i)}$. \square

ПРИМЕР 11.1 (квадрики на \mathbb{P}_1)

Из **теор. 11.1** вытекает, что бинарная² квадратичная форма над любым полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + ax_1^2 = 0$, где $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае класс $\det(q)$ по модулю умножения на ненулевые квадраты совпадает с классом коэффициента a , и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$, и форма вырождена.

Особая квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0 , задающей точку $(0 : 1)$.

Гладкая квадрика $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в \mathbb{k} , и над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} это невозможно. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + ax_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на \mathbb{P}_1 два разных корня $(\pm\delta : 1)$, т. е. гладкая квадрика состоит в этом случае из двух различных точек

Итак, геометрия квадрики $V(q) \subset \mathbb{P}_1$, задаваемой бинарной квадратичной формой

$$q(x) = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$$

¹Левое (соотв. правое) умножение матрицы A на любую матрицу задаёт линейное преобразование строк (соотв. столбцов) матрицы A , что не увеличивает её ранг. Тем самым, при умножении на обратимую матрицу ранг вообще не меняется.

²Т. е. от двух переменных.

полностью определяется классом её *дискриминанта* $D/4 \stackrel{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0 a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадратика является двойной точкой, если он единичный, то парой различных точек, если он не квадрат (что невозможно над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k}), то квадратика пуста.

Следствие 11.2

Квадрика $Q \subset \mathbb{P}^n$ может пересекать прямую $\ell \subset \mathbb{P}^n$ ровно одним из следующих четырёх способов: либо $\ell \subset Q$, либо $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, либо $\ell \cap Q$ это две различные точки, либо $\ell \cap Q = \emptyset$, причём последний случай невозможен над алгебраически замкнутым полем. \square

11.1.3. Корреляция, ядро и особые точки. С каждой квадратичной формой $q \in S^2 V^*$ помимо симметричной билинейной формы $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ связан линейный оператор корреляции $\hat{q} : V \rightarrow V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в ковектор $\hat{q}(v) : V \rightarrow \mathbb{k}$, $w \mapsto \tilde{q}(w, v)$, действующий на векторы из V скалярным умножением на вектор v посредством билинейной формы \tilde{q} .

Упражнение 11.4. Убедитесь, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^* , совпадает с матрицей Грама A базиса e .

В частности, невырожденность квадратичной формы q равносильна тому, что корреляция биективна. Пространство $\ker \hat{q} = \{v \in V \mid \forall w \in V \tilde{q}(w, v) = 0\}$ называется *ядром* квадратичной формы q . Его проецивизация обозначается $\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ и называется *пространством особых точек* или *вершинным пространством* квадратика Q . Обратите внимание, что $\text{Sing } Q \subset Q$. Так как $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \text{rk } A$, мы ещё раз видим, что ранг матрицы Грама квадратичной формы не зависит от выбора базиса.

Теорема 11.2

Пересечение особой квадратика Q с любым дополнительным к $\text{Sing } Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собою гладкую квадратика $Q' = L \cap Q$ в подпространстве L , и исходная квадратика Q является *линейным соединением*¹ Q' и $\text{Sing } Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\tilde{q}(u, v) = \tilde{q}(u, u') + \tilde{q}(u, u'') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \text{Sing } Q$ и не лежит на квадратике Q , то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p . Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\text{Sing } Q$, либо целиком лежит на Q , либо больше нигде не пересекает квадратика. \square

Пример 11.2 (особые коники)

Пространство Sing особых точек негладкой коники $C \subset \mathbb{P}^2$ это либо точка, либо прямая. Если $\text{Sing } Q$ это одна точка $s \in \mathbb{P}^2$, то по сл. 11.2 пересечение $C \cap \ell$ с любой прямой $\ell \not\ni s$ является гладкой квадратикой в ℓ , т. е. либо пусто, либо является парой различных точек $a, b \in \ell$. В первом случае $C = s$ состоит из единственной точки s и такого не бывает над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} . Во втором случае $C = (sa) \cup (sb)$ представляет собою пару пересекающихся

¹Т. е. объединением всех прямых вида (ab) с $a \in Q'$ и $b \in \text{Sing } Q$.

прямых. Такую конику C называют *приводимой* или *распавшейся*. Уравнение распавшейся коники является произведением двух линейных форм, задающих прямые, на которые эта коника распадается.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Над полем \mathbb{R} напишите уравнение особой коники, состоящей из единственной точки.

Если $\text{Sing } C = \ell$ это прямая, то $\text{rk } C = 1$ и матрица Грама коники C является произведением столбца и строки, пропорциональных друг другу в силу симметричности матрицы Грама. Тем самым, уравнение коники C это квадрат линейной формы, задающей прямую ℓ . Такая коника называется *двойной прямой*.

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Убедитесь, что любая квадратичная форма ранга 1 является квадратом линейной формы.

11.1.4. Касательное пространство к квадрике. Прямая, проходящая через точку p квадрики Q , называется *касательной* к Q в p , если она либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p . Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p , называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается $T_p Q$.

ЛЕММА 11.1

Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики $Q = V(q)$ в точке $a \in Q$, если и только если $\tilde{q}(a, b) = 0$.

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ в базисе a, b равна

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(b, a) & \tilde{q}(b, b) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\det q|_U = 0$, если и только если $\tilde{q}(a, b) = \tilde{q}(b, a) = 0$. □

СЛЕДСТВИЕ 11.3

Видимый из точки $b \notin Q$ контур¹ квадрики Q высекается из Q гиперплоскостью

$$\text{Ann } \hat{q}(b) = \{x \mid \tilde{q}(b, x) = 0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 11.4

Следующие три условия на точку $p \in Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ эквивалентны друг другу:

- 1) точка p особа, т. е. $p \in \text{Sing } Q$
- 2) каждая проходящая через p прямая касается квадрики Q в точке p , т. е. $T_p Q = \mathbb{P}(V)$
- 3) все частные производные многочлена q зануляются в точке p , т. е. $\forall i \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$. □

СЛЕДСТВИЕ 11.5

Касательное пространство $T_p Q = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p, x) = 0\}$ к квадрике $Q \subset \mathbb{P}(V)$ в гладкой точке $p \in Q$ является гиперплоскостью коразмерности 1 в $\mathbb{P}(V)$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1

Квадрика, имеющая хоть одну гладкую точку, не содержится в гиперплоскости.

¹Т. е. ГМТ пересечения с квадрикой Q всевозможных касательных, опущенных на неё из точки b .

Доказательство. Пусть $Q \subset \mathbb{P}_n$ и точка $a \in Q$ неособа. Случай $n = 1$ был разобран в [прим. 11.1](#) на стр. 190. Пусть $n \geq 2$. Если квадрика Q содержится в гиперплоскости H , то каждая проходящая через точку a и не содержащаяся в H прямая пересекает Q ровно в одной точке a и, стало быть, касается Q в a . Поэтому $\mathbb{P}_n = H \cup T_p Q$ является объединением двух гиперплоскостей, что невозможно. \square

Упражнение 11.7. Покажите, что проективное пространство над отличным от \mathbb{F}_2 полем не разбивается в объединение двух гиперплоскостей.

11.2. Полярные преобразования. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle \xi, v \rangle = 0$ на ковектор $\xi \in V^*$ и вектор $v \in V$ задаёт при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}_n^\times$ гиперплоскость в \mathbb{P}_n , а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в \mathbb{P}_n^\times , состоящую из всех гиперплоскостей в \mathbb{P}_n , проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$. Биекция $U \leftrightarrow \text{Ann}(U)$ между векторными подпространствами дополнительных размерностей в V и V^* , которую мы обсуждали в [н° 4.4.3](#) на стр. 64, после перехода к проективизациям становится для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ обращающей включения биекцией между m -мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n и $(n-1-m)$ -мерными проективными подпространствами в \mathbb{P}_n^\times , и называется *проективной двойственностью*. Она переводит проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\text{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L , и превращает пересечения подпространств в линейные соединения их образов и наоборот. Это позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, подчас довольно сильно отличающиеся от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

11.2.1. Поляритет гладкой квадрики. Поскольку корреляция $\hat{q} : V \simeq V^*$ невырожденной квадратичной формы q является линейным изоморфизмом, она задаёт биективное проективное преобразование $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$, $v \mapsto \mathbb{P}(\text{Ann } \hat{q}(v))$, не меняющееся при умножении квадратичной формы q на ненулевую константу. Оно называется *полярным преобразованием* или просто *поляритетом* относительно гладкой квадрики $Q = V(q)$ и переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\tilde{q}(p, x) = 0$. Такие точка p и гиперплоскость L называются, соответственно, *полюсом* и *полярной* друг друга относительно квадрики Q . Геометрически, полярная точки $p \notin Q$ представляет собою гиперплоскость, высекающую видимый из точки p контур квадрики¹ Q , а полярная точки $p \in Q$ это касательная гиперплоскость $T_p Q$. Таким образом, квадрика однозначно восстанавливается по своему поляритету как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\tilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b , точка a лежит на поляре точки b , если и только если точка b лежит на поляре точки a . Такие точки a и b называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q , а предыдущее наблюдение известно как *полярная двойственность*.

Упражнение 11.8. Постройте² полярную данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно заданной окружности. Особое внимание уделите случаям, когда заданная прямая не пересекает окружности, а заданная точка лежит внутри очерчиваемого этой окружностью круга.

¹Ср. с [сл. 11.3](#) на стр. 192.

²Желающие могут пользоваться линейкой и циркулем, но [рис. 11♦12](#) на стр. 204 показывает, что последний не нужен.

Предложение 11.2

Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d . Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q , когда они гармоничны по отношению к точкам c, d .

Доказательство. Обозначим проходящую через точки a, b, c, d прямую через ℓ . Сопряжение относительно квадрики Q задаёт на прямой ℓ инволюцию $\sigma_Q : \ell \rightarrow \ell, x \mapsto \ell \cap \bar{q}(x)$, которая переводит точку $x \in \ell$ в точку пересечения её полярны с прямой ℓ . Точки c и d неподвижны относительно инволюции σ_Q . Если инволюция σ_Q меняет местами точки a и b , то $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$, откуда $[a, b, c, d] = -1$. Наоборот, если $[a, b, c, d] = -1$, то отображение $\sigma_{c,d} : \ell \rightarrow \ell$, переводящее точку $x \in \ell$ в единственную такую точку $y \in \ell$, что $[x, y, c, d] = -1$, является инволютивной гомографией.

Упражнение 11.9. Убедитесь в этом, и покажите, что для любых двух точек $c, d \in \ell$ существует единственная инволюция $\sigma_{c,d} : \ell \rightarrow \ell$, для которой точки c и d являются неподвижными, причём в любой аффинной карте, где $d = \infty$, эта инволюция выглядит как центральная симметрия относительно c .

Так как гомографии $\sigma_{c,d}$ и σ_Q одинаково действуют на 4 точки a, b, c, d , они совпадают, а значит, точки a и b сопряжены относительно Q . \square

Упражнение 11.10. Дайте чисто алгебраическое доказательство предл. 11.2.

Предложение 11.3

Для неособой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ и произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ множество гиперплоскостей, полярных относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве \mathbb{P}_n^\times квадрику в Q^Γ того же ранга, что и квадрика Q . Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на \mathbb{P}_n матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика Q^Γ имеет в двойственных однородных координатах на \mathbb{P}_n^\times матрицу $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \rightleftarrows \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из \mathbb{P}_n со столбцом координат x в точку двойственного пространства \mathbb{P}_n^\times со строкой координат $\xi = x^t\Gamma$ и является биекцией. Полярные гиперплоскости ξ точек $x \in Q$ задаются в \mathbb{P}_n^\times уравнением, которое получается подстановкой в задающее квадрику Q уравнение $x^tAx = 0$ точек $x = \Gamma^{-1}\xi^t$. Это даёт на ξ уравнение $\xi\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}\xi^t = 0$. \square

Следствие 11.6

Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в \mathbb{P}_n^\times гладкую квадрику Q^\times . Матрицы Грама квадрик Q и Q^\times в двойственных базисах пространств \mathbb{P}_n и \mathbb{P}_n^\times обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q — это в точности касательные пространства T_pQ . \square

11.2.2. Поляритеты над незамкнутыми полями. Над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы q , задающие *пустые* квадрики Q . Все такие формы автоматически невырождены, и их поляритеты вполне наблюдаемы геометрически, а пустота квадрики означает лишь то, что ни одна точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 11.11. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

Из [теор. 10.1](#) на стр. 181 вытекает, что два поляритета $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы $q_1, q_2 \in S^2(V^*)$ пропорциональны.

ТЕОРЕМА 11.3

Две непустые гладкие квадрики над бесконечным полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ совпадают, если и только если их уравнения пропорциональны.

Доказательство. Если $V(q_1) = V(q_2)$ в $\mathbb{P}(V)$, то поляритеты $\bar{q}_1, \bar{q}_2 : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ совпадают во всех точках квадрики $Q = V(q_1) = V(q_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.12. Покажите, что в условиях теоремы на любой непустой гладкой квадрике в \mathbb{P}_n найдутся $n + 2$ точки, никакие $(n + 1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости.

Из [упр. 11.12](#) и [теор. 10.1](#) на стр. 181 вытекает, что корреляции $\hat{q}_1, \hat{q}_2 : V \rightarrow V^*$ пропорциональны. Тем самым, формы q_1 и q_2 имеют пропорциональные матрицы Грама. \square

11.3. Коники. Квадрики на плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$, называемое *пространством коник*. Над алгебраически замкнутым полем есть ровно три проективно не конгруэнтных коники¹:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые)
- *распавшаяся коника* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка)
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

11.3.1. Параметризация гладкой коники. Всякая непустая гладкая коника $C \subset \mathbb{P}_2$ над любым полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 0$ допускает квадратичную рациональную параметризацию — вложение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2, \quad (t_0, t_1) \mapsto (\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)),$$

которое задаётся тремя взаимно простыми в совокупности однородными многочленами второй степени $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{k}[t_0, t_1]$ и биективно отображает прямую \mathbb{P}_1 на конику C . Геометрически такую параметризацию можно получить проектируя конику C из любой точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ . Каждая отличная от касательной прямая (px) с $x \in \ell$ пересекает конику C по двум различным точкам, одной из которых является p . Если вторая точка пересечения $p' = p'(x)$ имеет в базисе p, x на прямой (px) однородные координаты $(\lambda_0 : \lambda_1)$, то это отношение является отличным от $p = (1 : 0)$ корнем уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p, p) & q(p, x) \\ q(x, p) & q(x, x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 2q(p, x) \cdot \lambda_0 \lambda_1 + q(x, x) \cdot \lambda_1^2 = 0$$

и равно $(\lambda_0 : \lambda_1) = (q(x, x) : -2q(p, x))$. Отображение

$$\ell \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad x \mapsto q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in C \tag{11-2}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.13. Убедитесь, что три координаты точки $q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x$ на \mathbb{P}_2 являются однородными квадратичными полиномами от пары внутренних однородных координат

¹Ср. с [прим. 11.1](#) на стр. 190.

²А именно, объединение двух прямых $x_0 = \pm i x_1$, пересекающихся в особой точке $(0 : 0 : 1)$.

точки x на прямой ℓ в любом базисе этой прямой, и что формула (11-2) корректно сопоставляет точке $x = T_p C \cap \ell$ точку $p \in C$.

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} квадратичную параметризацию гладкой коники можно получить преобразовав её уравнение линейной заменой координат к виду Веронезе¹

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \quad (11-3)$$

и воспользовавшись рациональной параметризацией коники Веронезе по формуле²

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : a_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2). \quad (11-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.14. Убедитесь, что проекция коники $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 11.4

Гладкая коника и заданная однородным уравнением степени d кривая на \mathbb{P}_2 либо пересекаются не более, чем по $2d$ точкам, либо коника целиком содержится в кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными квадратичными полиномами от $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t , при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. \square

Предложение 11.5

Каждые пять точек в \mathbb{P}_2 лежат на некоторой конике. Если никакие четыре из точек не коллинеарны, такая коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то она ещё и гладкая.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2 V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в \mathbb{P}_5 имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по [предл. 11.4](#). \square

Следствие 11.7

Каждые пять прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, касаются единственной гладкой коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: пять точек на \mathbb{P}_2^\times , двойственные пяти заданным прямым на \mathbb{P}_2 , лежат на единственной гладкой конике $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$. Двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ и является искомой. \square

¹См. [прим. 10.6](#) на стр. 178.

²См. формулу (10-6) на стр. 179.

Пример 11.3 (геометрическая классификация гомографий между прямыми)

Пусть гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя несовпадающими прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$, соответственно, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Возникают две возможности, представленные на рис. 11◊1 и рис. 11◊2: либо соединяющие соответственные точки три прямые $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ пересекаются в одной точке p , либо нет. Как мы видели в прим. 10.10, первое означает, что φ является перспективой с центром в p , и это равносильно равенству $\varphi(q) = q$. Во втором случае пять прямых $\ell_1, \ell_2, (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ удовлетворяют сл. 11.7, т. е. существует единственная гладкая коника C , касающаяся всех этих пяти прямых. Преобразование $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения прямой ℓ_2 с отличной от ℓ_1 касательной, опущенной из x на C , является гомографией ℓ_1 на ℓ_2 , ибо оно биективно и рационально. В самом деле, коэффициенты уравнений касательных, опущенных из x на C , суть точки пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \text{Ann}(x)$. Одна из них, задающая прямую ℓ_1 , известна. Поэтому вторая, т. е. набор коэффициентов уравнения прямой (x, y) , рационально через неё выражается. Поскольку C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1 , гомография $C : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ совпадает с φ . Обратите внимание, что образом и прообразом точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$ в этом случае являются точки пересечения $\ell_2 \cap C$ и $\ell_1 \cap C$ соответственно.

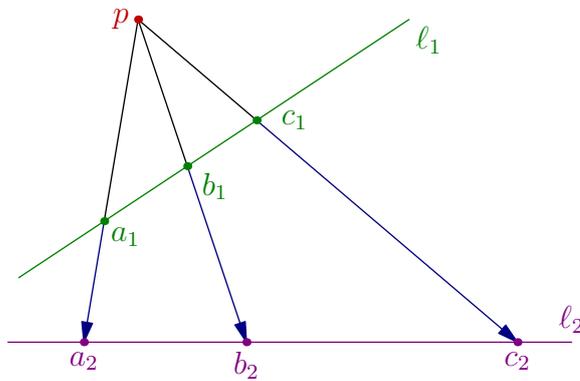


Рис. 11◊1. Перспектива $p : \ell_1 \rightarrow \ell_2$.

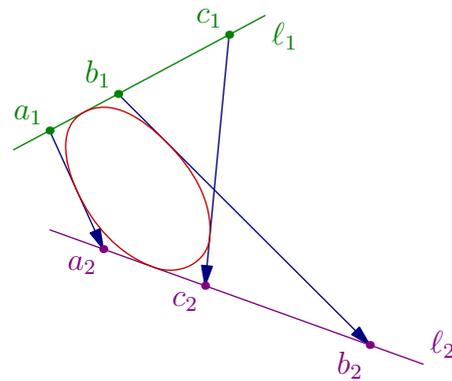


Рис. 11◊2. Гомография $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$.

Итак, каждая гомография $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. В обоих случаях центр p и коника C определяются по гомографии *однозначно*. Перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$, отвечающий особой конике C , распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы. Однако такие прямые можно выбирать многими способами: годится любая пара прямых, соединяющих соответственные точки гомографии.

Пример 11.4 (геометрическая классификация гомографий между пучками прямых)

Этот пример двойствен предыдущему. Пусть гомография $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ пучка прямых с центром в точке p_1 в пучок прямых с центром в точке $p_2 \neq p_1$ переводит три различные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3 \ni p_1$, отличные от прямой $(p_1 p_2)$, в прямые $\ell''_1, \ell''_2, \ell''_3 \ni p_1$. Обозначим три точки пересечения соответственных прямых через $q_i = \ell'_i \cap \ell''_i, i = 1, 2, 3$. Поскольку никакие четыре из точек p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 не коллинеарны, через них проходит единственная коника C_φ . Она представляет собою ГМТ точек пересечений соответственных прямых $\ell \cap \varphi(\ell)$ гомографии φ , поскольку отображение, переводящее прямую $(p_1 p)$ в прямую $(p_2 p)$ для всех $p \in C_\varphi$, тоже задаёт гомографию $p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$, действующую на три прямые ℓ'_i точно также, как φ , см. рис. 11◊4.

Если коника C_φ гладкая, то она переводит касательную прямую $T_{p_1}C_\varphi$ в прямую (p_1p_2) , а прямую (p_1p_2) — в касательную $T_{p_2}C_\varphi$. Если коника C_φ не гладкая, то $C_\varphi = (p_1p_2) \cup (q_1q_2q_3)$, точки q_1, q_2, q_3 коллинеарны, и гомография φ переводит прямую (p_1p_2) в себя, т. е. является перспективой, см. рис. 11◊3. В отличие от предыдущего прим. 11.3 задающая перспективу вырожденная коника здесь определяется этой перспективой однозначно.

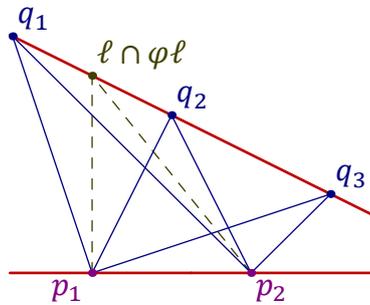


Рис. 11◊3. Перспектива $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

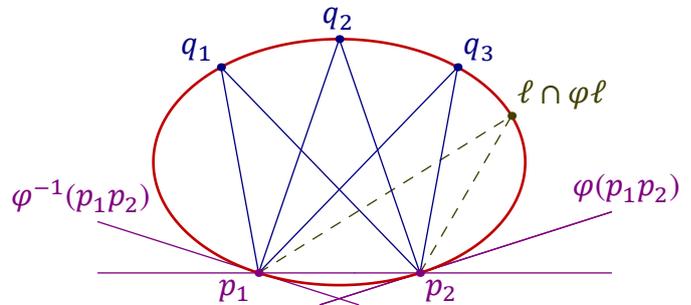


Рис. 11◊4. Гомография $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$.

Предложение II.6 (ТЕОРЕМА О ВПИСАННО-ОПИСАННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ)

Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику Q' , если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники Q'' .

Доказательство. Пусть точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ лежат на конике Q' , как на рис. 11◊5. Рассмотрим прямые $\ell_1 = (A_1B_1), \ell_2 = (A_2B_2)$ и обозначим через $C_2 : \ell_1 \simeq Q'$ и $C_1 : Q' \simeq \ell_2$ проекцию прямой ℓ_1 из точки C_2 на конику Q' и проекцию коники Q' на прямую ℓ_2 из точки C_1 . Композиция этих двух проекций $[C_1 : Q' \simeq \ell_2] \circ [C_2 : \ell_1 \simeq Q'] : \ell_1 \simeq \ell_2$ переводит $A_1 \mapsto M, K \mapsto B_2, L \mapsto A_2, B_1 \mapsto N$ и является неперспективной гомографией. Значит, она задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике Q'' , вписанной в оба треугольника. Обратная импликация проективно двойственна только что доказанной. \square

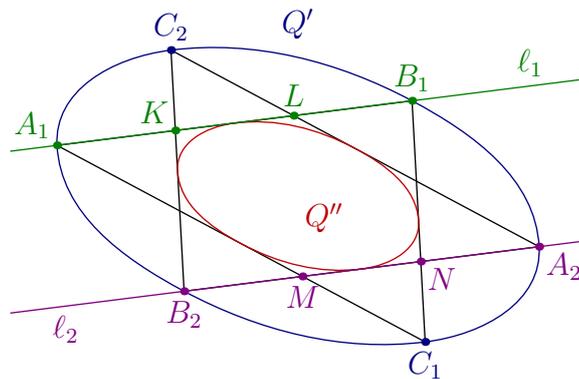


Рис. 11◊5. Вписанно-описанные треугольники.

Следствие II.8 (Поризм Понселе для треугольников)

Если пара коник Q' и Q'' такова, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'' , то такой же треугольник $A_2B_2C_2$ (одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'') можно нарисовать стартовав с любой точки $A_2 \in Q' \setminus Q''$.

Доказательство. В самом деле, проведём из A_2 две касательных (A_2B_2) и (A_2C_2) к конике Q'' до их пересечения с Q' в точках $B_2, C_2 \in Q'$, как на рис. 11◊5. По предл. 11.6, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых $(AB), (BC), (CA), (A_2B_2), (A_2C_2)$, эта коника и есть Q'' . \square

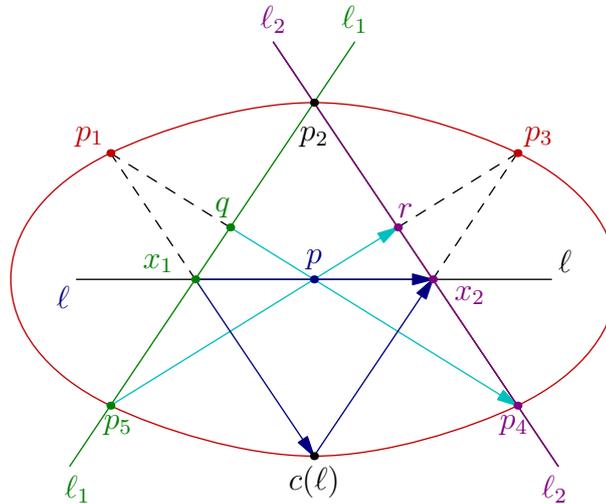


Рис. 11◊6. Трассировка коники линейкой.

Пример 11.5 (трассировка коники линейкой)

Точки гладкой коники C , проходящей через пять данных точек p_1, p_2, \dots, p_5 , никакие 3 из которых не коллинеарны, можно эффективно строить одной линейкой следующим образом. Рассмотрим прямые $\ell_1 = (p_2p_5), \ell_2 = (p_2p_4)$ и точку $p = (p_1p_4) \cap (p_3p_5)$, как на рис. 11◊6. Перспектива $p : \ell_1 \simeq \ell_2$ действует на лежащие на прямой ℓ_1 три точки p_2, p_5 и $q = \ell_1 \cap (p_2p_4)$ так же, как композиция проекции $p_1 : \ell_1 \simeq C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки $p_1 \in C$ и проекции $p_3 : C \simeq \ell_2$ коники C на прямую ℓ_2 из точки $p_3 \in C$. Стало быть, они совпадают. Поэтому для любой прямой ℓ , проходящей через p и пересекающейся с прямыми ℓ_1 и ℓ_2 в точках x_1 и x_2 соответственно, точка $c(\ell) = (p_1x_1) \cap (p_2x_2)$ лежит на конике C , см. рис. 11◊6. Если ℓ пробежит пучок прямых с центром в p , точка $c(\ell)$ нарисует конику C .

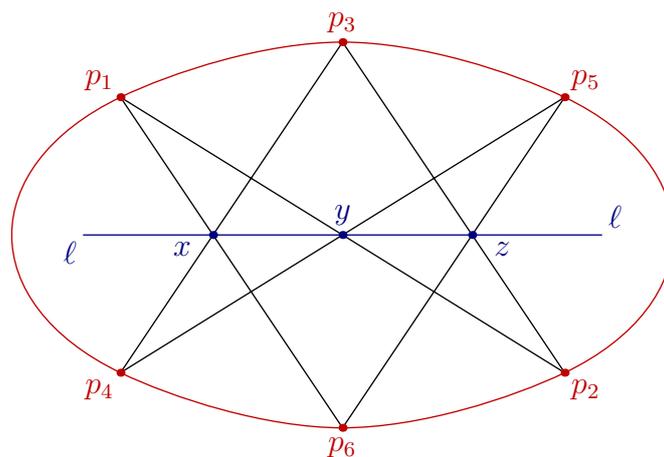


Рис. 11◊7. Гексограмма Паскаля.

ТЕОРЕМА 11.4 (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ)

Шесть точек p_1, p_2, \dots, p_6 , никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника p_1, p_2, \dots, p_6 , см. рис. 11◊7 и рис. 11◊8.

Доказательство. Полагая $\ell_1 = (p_3p_4)$ и $\ell_2 = (p_3p_2)$, как на рис. 11◊6 на стр. 199, мы видим, что условие $z \in (xy)$ означает, что x переходит в z при перспективе

$$y : \ell_1 \rightarrow \ell_2, \quad (11-5)$$

которая, согласно прим. 11.5, раскладывается в композицию проекций

$$(p_5 : C \simeq \ell_2) \circ (p_1 : \ell_1 \simeq C) \quad (11-6)$$

где C — гладкая коника, проходящая через p_1, p_2, \dots, p_5 . Но тогда $p_6 = (p_5z) \cap (p_3x) \in C$. Наоборот, если $(p_5z) \cap (p_3x) \in C$, то точка $z \in \ell_2$ является образом точки $x \in \ell_1$ при композиции проекций (11-6), а значит, и при перспективе (11-5), откуда $z \in (xy)$. \square

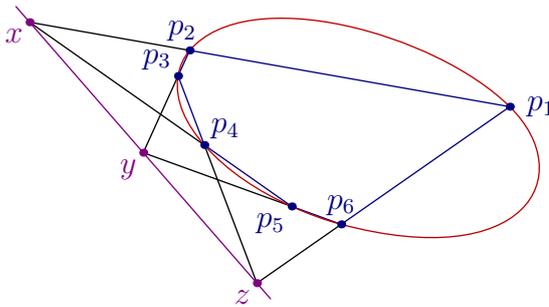


Рис. 11◊8. Вписанный шестиугольник.

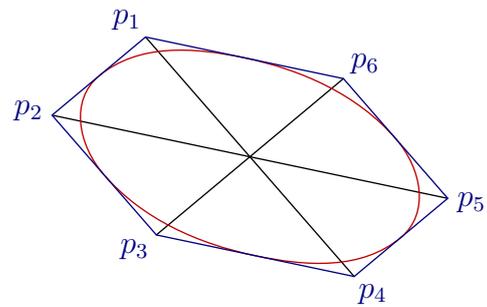


Рис. 11◊9. Описанный шестиугольник.

Следствие 11.9 (ТЕОРЕМА БРИАНШОНА)

Шестиугольник p_1, p_2, \dots, p_6 тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали $(p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6)$ пересекаются в одной точке (см. рис. 11◊9).

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. \square

11.4. Внутренняя геометрия гладкой коники. Двойственные прямые $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ канонически изоморфны друг другу посредством биекции $\mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1^\times$, $v \mapsto \text{Ann } v$, которая на языке координат сопоставляет точке $(p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ точку $p_1x_0 - p_0x_1 \in \mathbb{P}_1^\times$, координаты которой в двойственном базисе на \mathbb{P}_1^\times суть $(p_1 : -p_0)$.

В прим. 10.6 на стр. 178 мы видели, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} , $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$, плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ параметризует неупорядоченные пары точек на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Точкам $p = (p_0 : p_1), q = (q_0 : q_1)$ отвечает одномерное пространство в S^2U^* , порождённое квадратичной формой $f_{p,q}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(x, p) \cdot \det(x, q) = a_0(p, q) \cdot x_0^2 + 2a_1(p, q) \cdot x_0x_1 + a_2(p, q) \cdot x_1^2$ с коэффициентами $a_0(p, q) = p_1q_1$, $a_1(p, q) = -(p_1q_0 + p_0q_1)/2$, $a_2(p, q) = p_0q_0$. Допуская известную вольность, мы будем обозначать эту точку на \mathbb{P}_2 как $\{p, q\}$. Пары совпадающих точек $\{p, p\} \in \mathbb{P}_2$ изображаются гладкой коникой Веронезе C_{ver} , состоящей из всех ненулевых

квадратичных форм от (x_0, x_1) с нулевым определителем или, что то же самое, из квадратичных форм вида $f_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det^2(x, p)$, где $p \in \mathbb{P}_1$. В развёрнутом виде¹

$$\begin{aligned} f_p(x) &= a_0(p) \cdot x_0^2 + 2a_1(p) \cdot x_0x_1 + a_2(p) \cdot x_1^2, \quad \text{где} \\ a_0(p) &= p_1^2, \quad a_1(p) = -p_0p_1, \quad a_2(p) = p_0^2. \end{aligned} \quad (11-7)$$

Пары $\{p, t\} \in \mathbb{P}_2$, в которых точка $p \in \mathbb{P}_1$ фиксирована, а точка t пробегает прямую \mathbb{P}_1 , изображаются на плоскости $\mathbb{P}(S^2U^*)$ в виде *прямой*, которая состоит из всех зануляющихся в точке p квадратичных форм f на \mathbb{P}_1 и задаётся линейным по f уравнением $f(p) = 0$. Так, касательные к конике Веронезе C_{ver} , восстановленные в точках $\{p, p\}$ и $\{q, q\}$, суть прямые, состоящие из точек вида $\{p, t\}$ и $\{q, s\}$ соответственно. Они пересекаются в точке $\{p, q\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.15. Покажите, что прямая на \mathbb{P}_2 тогда и только тогда имеет вид $\{p, t\}$, где p фиксирована, а t пробегает \mathbb{P}_1 , когда она касается коники Веронезе, и опишите, из каких точек $\{x, y\} \in \mathbb{P}_2$ состоит прямая, соединяющая две различные точки $\{a, b\}, \{c, d\} \in \mathbb{P}_2$, в терминах двойных отношений между точками a, b, c, d, x, y .

Над алгебраически замкнутым полем все гладкие коники проективно конгруэнтны друг другу, и произвольную гладкую конику C на \mathbb{P}_2 можно записать в подходящих однородных координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$ уравнением $a_1^2 = a_0a_2$, после чего воспринимать её как конику Веронезе, а объёмлющую плоскость — как множество неупорядоченных пар точек на проективной прямой. Иначе говоря, над алгебраически замкнутым полем характеристики $\neq 2$ проективная плоскость с заданной на ней гладкой коникой может быть отождествлена с множеством неупорядоченных пар точек на \mathbb{P}_1 так, что коника будет изображать пары совпадающих точек.

11.4.1. Двойное отношение и внутренние координаты на конике. Назовём *двойным отношением* четырёх точек p_1, p_2, p_3, p_4 на гладкой конике C двойное отношение проекций этих точек на произвольную прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ из любой пятой точки $p_5 \in C$, отличной от всех четырёх и не лежащей на ℓ , или, что то же самое, двойное отношение четырёх прямых (p_5p_i) , $1 \leq i \leq 4$, в пучке прямых с центром в p_5 .

УПРАЖНЕНИЕ 11.16. Убедитесь, что это двойное отношение не зависит ни от выбора прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$, ни от выбора точки $p_5 \in C$, и что любая биекция между кониками $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2$, индуцированная линейным проективным преобразованием $\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_2$ объёмлющей плоскости, сохраняет двойное отношение точек на этих кониках.

На конике Веронезе $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ введённое только что двойное отношение любых четырёх точек $\{p_i, p_i\}$, $1 \leq i \leq 4$, совпадает с двойным отношением четырёх точек p_i на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$, поскольку композиция отображения Веронезе $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\simeq} C_{\text{ver}}$, $p \mapsto \{p, p\}$, и проекции коники C_{ver} из любой её точки на любую не проходящую через эту точку прямую является рациональной биекцией между двумя проективными прямыми, а стало быть², линейна и сохраняет двойные отношения.

УПРАЖНЕНИЕ 11.17. Убедитесь, что эта композиция и в самом деле рациональна.

Таким образом, любая гладкая коника C может быть с сохранением двойного отношения отождествлена с проективной прямой, и по [предл. 10.2](#) на стр. 186 любые два таких отождествления

¹Обратите внимание что написанная в формуле (11-7) параметризация коники Веронезе отличается от той, что была в форм. (11-4) на стр. 196: параметризация (11-7) является композицией квадратичного вложения Веронезе $\mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2U^*)$, $\psi(x) \mapsto \psi^2(x)$, из формулы (11-4) и предыдущего изоморфизма двойственных прямых $\mathbb{P}(U) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}(U^*)$, $(p_0 : p_1) \mapsto (p_1 : -p_0)$.

²См. [теор. 10.2](#) на стр. 183.

отличаются на гомографию этой прямой. В частности, на гладкой конике имеются внутренние однородные координаты, которые переносятся с \mathbb{P}_1 при помощи произвольной сохраняющей двойные отношения биекции $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} C$, и любые две таких координатных системы получаются друг из друга линейным проективным преобразованием.

Предложение 11.7

Гладкая коника C , проходящая через пять точек p_1, p_2, \dots, p_5 , никакие три из которых не коллинеарны, представляет собою ГМТ p , таких что в пучке прямых с центром в p двойное отношение четырёх прямых (p, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, равно двойному отношению четырёх прямых (p_5, p_i) , $1 \leq i \leq 4$, в пучке прямых с центром в точке p_5 .

Доказательство. Из [упр. 11.16](#) вытекает, что все точки $p \in C$ обладают этим свойством. Для любой другой точки p , обладающей этим свойством, обозначим через Q конику, проходящую через точки p, p_1, p_2, p_3 и p_5 . Отображение $\gamma_Q : p^\times \rightarrow p_5^\times$ из пучка прямых с центром в точке p в пучок прямых с центром в p_5 , переводящее прямую (pq) в прямую (p_5q) для всех $q \in Q$, биективно и рационально, а значит является гомографией. Гомография γ_Q переводит три прямые (pp_i) , $1 \leq i \leq 3$, в три прямые (p_5p_i) , $1 \leq i \leq 3$. Поскольку $[(p, p_1), (p, p_2), (p, p_3), (p, p_4)] = [(p_5, p_1), (p_5, p_2), (p_5, p_3), (p_5, p_4)]$, прямая (pp_4) переходит в прямую (p_5p_4) , откуда $p_4 \in Q$. Но единственная коника, проходящая через пять точек p_1, p_2, \dots, p_5 , это коника C . Поэтому $Q = C$ и $p \in C$. \square

Упражнение 11.18. Пусть никакие три из пяти различных точек $p, q, a, b, c \in \mathbb{P}_2$ не коллинеарны. Обозначим через $\gamma : p^\times \rightarrow q^\times$ единственную гомографию пучка прямых с центром в p в пучок прямых с центром в q , переводящую прямые $(pa), (pb), (pc)$ в прямые $(qa), (qb), (qc)$ соответственно. Опишите ГМТ пересечения $\ell \cap \gamma(\ell)$ по всем $\ell \in p^\times$.

11.4.2. Гомографии на гладкой конике. Биективное преобразование $\varphi : C \xrightarrow{\sim} C$ гладкой коники C называется *гомографией*, если оно сохраняет двойные отношения. Это равносильно тому, что во внутренних однородных координатах на C преобразование φ линейно, а также тому, что при какой-либо (а следовательно, и при любой) сохраняющей двойные отношения биекции $\psi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ преобразование $\psi\varphi\psi^{-1} : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ является гомографией на \mathbb{P}_1 . По [теор. 10.2](#) любое биективное (всюду или за исключением конечного множества точек) отображение $\varphi : C \rightarrow C$, которое во внутренних однородных координатах на конике задаётся рациональной формулой вида $\varphi(\alpha_0 : \alpha_1) = (f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1))$, где $f, g \in \mathbb{k}[t]$, является гомографией. Для любых двух упорядоченных троек различных точек на гладкой конике C существует единственная гомография $C \xrightarrow{\sim} C$, переводящая первую тройку точек во вторую с сохранением порядка.

Предложение 11.8

Каждая гомография $\gamma : C \xrightarrow{\sim} C$ гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ однозначно продолжается до линейного проективного автоморфизма $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, ограничение которого на C совпадает с γ , и наоборот, любой линейный проективный автоморфизм $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, переводящий конику C в себя, задаёт на ней гомографию.

Доказательство. Выберем на конике C пять точек p_1, p_2, \dots, p_5 , и пусть $\gamma(p_i) = q_i$. Существует единственный линейный проективный автоморфизм $\tilde{\gamma} : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$, такой что $\tilde{\gamma}(p_i) = q_i$ при $1 \leq i \leq 4$. Поскольку он сохраняет двойные отношения в пучках прямых, двойное отношение четырёх прямых (q_5, q_i) , $1 \leq i \leq 4$, в пучке q_5^\times равно двойному отношению четырёх прямых

$(p_5, p_i), 1 \leq i \leq 4$, в пучке p_5^\times . Последнее двойное отношение равно двойному отношению четырёх прямых $(p_5, q_i), 1 \leq i \leq 4$, из того же пучка, т. к. отображение $\gamma : C \simeq C, p_i \mapsto q_i$, является гомографией и сохраняет определённое в начале [н° 11.4.1](#) двойное отношение точек на конике. Таким образом, для любых пяти точек $p_1, p_2, \dots, p_5 \in C$ двойные отношения прямых проходящих через точки p_1, p_2, p_3, p_4 в пучках прямых с центрами в точках p_5 и $\tilde{\gamma}(p_5)$ равны другу. По [предл. 11.7](#) $\tilde{\gamma}(p_5) \in C$, что доказывает первое утверждение предложения. Второе утверждение вытекает из [упр. 11.16](#). \square

Пример 11.6 (инволюции)

Гомография $\sigma : C \rightarrow C$ называется *инволюцией*, если она обратна самой себе, т. е. $\sigma^2 = \text{Id}_C$. Тожественная инволюция $\sigma = \text{Id}_C$ называется *тривиальной*. Пусть точки a_1, a_2, b_1, b_2 на конике C различны и инволюция $\sigma : C \rightarrow C$ переставляет одноимённые точки $a_1 \leftrightarrow a_2$ и $b_1 \leftrightarrow b_2$ как на [рис. 11◊10](#). Обозначим точку пересечения прямых $(a_1 a_2)$ и $(b_1 b_2)$ через s . Пучок прямых с центром в s задаёт биективное преобразование $\sigma_s : C \simeq C$, переставляющее точки пересечения коники C с каждой проходящей через s прямой.

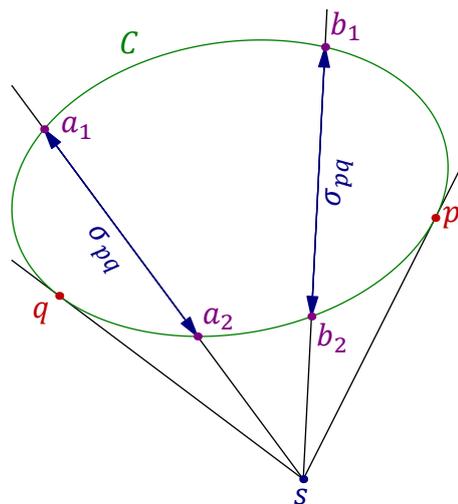


Рис. 11◊10. Инволюция на конике.

Упражнение 11.19. Убедитесь, что это преобразование рационально.

Следовательно, σ_s является гомографией, а значит, совпадает с инволюцией σ , поскольку действует на четыре точки a_1, a_2, b_1, b_2 также, как и σ . В частности, неподвижными точками инволюции σ являются две точки, образующие видимый из точки s контур коники C .

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} с $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ каждая нетривиальная инволюция на проективной прямой или на гладкой конике имеет ровно две различных неподвижных точки, и для любой пары различных точек существует единственная инволюция оставляющая каждую из точек на месте. Геометрически, инволюция $\sigma_{pq} : \mathbb{P}_1 \simeq \mathbb{P}_1$ с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ переставляет друг с другом такие точки a, b , что точки $\{a, a\}$ и $\{b, b\}$ коники Веронезе $C_{\text{вер}} \subset \mathbb{P}_2$ лежат на одной прямой с точкой $\{p, q\} \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 11.20. Убедитесь, что $\sigma_{pq}(a) = b$ для точек $a, b \notin \{p, q\}$, если и только если $[p, q, a, b] = -1$, и напишите явную формулу для координат неподвижных точек p, q инволюции σ_{pq} , если известны координаты точек $a, b, \sigma_{pq}(a), \sigma_{pq}(b)$ и все эти точки различны.

Пример 11.7 (перекрёстная ось гомографии на конике)

Гомография $\varphi : C \rightarrow C$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C$ является композицией проекций $b_2 : C \rightarrow \ell$ и $b_1 : \ell \rightarrow C$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1 b_2) \cap (b_1 a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1 c_2)$ пар перекрёстных прямых на [рис. 11◊11](#). Поскольку неподвижные точки гомографии φ суть точки пересечения $\ell \cap C$, прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C$, а φ имеет либо ровно две неподвижные точки, либо ровно одну, и последнее означает, что прямая ℓ касается коники C в этой неподвижной точке. Таким образом, прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают конику C . Отсюда получается ещё одно доказательство теоремы

Паскаля: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, которая переводит точки a_1, b_1, c_1 в точки a_2, b_2, c_2 , лежат на перекрёстной оси ℓ этой гомографии.

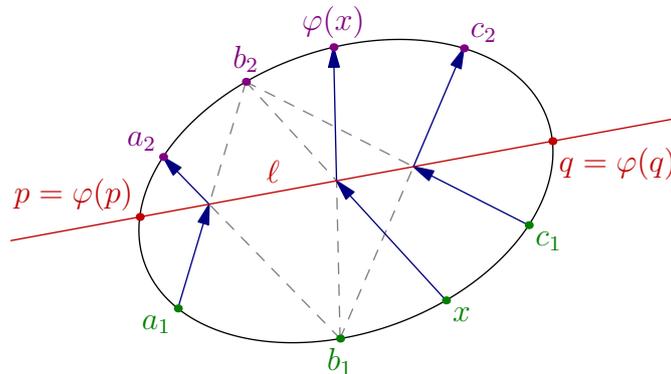


Рис. 11◊11. Перекрёстная ось гомографии на конике.

Перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \rightarrow C$ легко строится одной линейкой, если известно действие φ на какие-нибудь три точки. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$, а также указать неподвижные точки гомографии φ . В частности, две касательные к гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2$, опущенные из заданной точки $s \in \mathbb{P}_2$, тоже можно построить одной линейкой, найдя неподвижные точки инволюции $\sigma_s : C \rightarrow C$, задаваемой пучком прямых с центром в s , см. рис. 11◊12. Более простое построение можно извлечь из упр. 11.21.

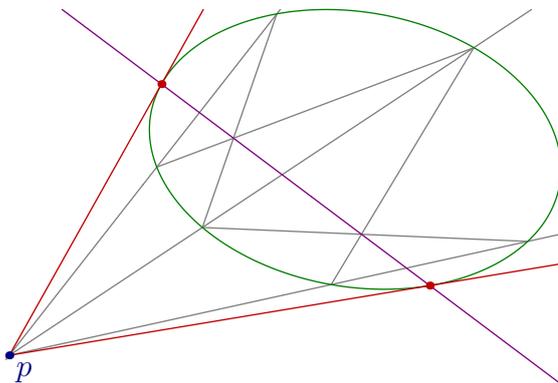


Рис. 11◊12. Построение касательных.

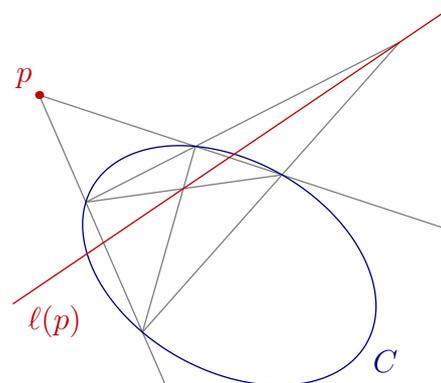


Рис. 11◊13. Построение поляр.

УПРАЖНЕНИЕ 11.21 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 11◊13 построение¹ одной линейкой поляр $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C .

Пример 11.8 (пары коммутирующих инволюций)

Две сопряжённые относительно гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ точки $a, b \in \mathbb{P}_2 \setminus C$ задают на конике C коммутирующие друг с другом инволюции $\sigma_a, \sigma_b : C \rightarrow C$, см. рис. 11◊14. В самом деле,

¹Принадлежащее Якобу Штейнеру (1796–1863), см. Я. Штейнер. «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга», Харьковская математическая библиотека, Харьков, 1910 (или любое другое издание).

запараметризуем пучок прямых с центром в b точками полярной к b прямой ℓ_b и рассмотрим на нём инволюцию $\alpha : \ell_b \simeq \ell_b$ с неподвижными точками a и p , отвечающими прямой (ba) и полярной к точке a прямой ℓ_a , как на рис. 11◊14. Точки $c, d \in \ell_q$ находятся в инволюции α , если и только если они гармоничны точкам a, p . Пусть прямая (bc) пересекает конику C в точке c' . Тогда на прямой (ac') точки a и $p' = (ac') \cap \ell_p$ гармоничны точкам c и $d' = (ac) \cap (bd)$, поскольку четвёрка точек a, p', c', d' является образом четвёрки точек a, p, c, d при перспективе $\gamma_b : \ell_b \simeq (ac')$. С другой стороны, по предл. 11.2 на стр. 194 сопряжённые друг другу относительно коники C точки a и p' прямой (ac') гармоничны точкам пересечения этой прямой с коникой C . Поэтому отличная от c' точка пересечения прямой (ac') с коникой C совпадает с d' . Таким образом, любые две пары находящихся в инволюции σ_a точек коники C одновременно являются и двумя парами точек, находящихся в инволюции σ_b , см. рис. 11◊14.

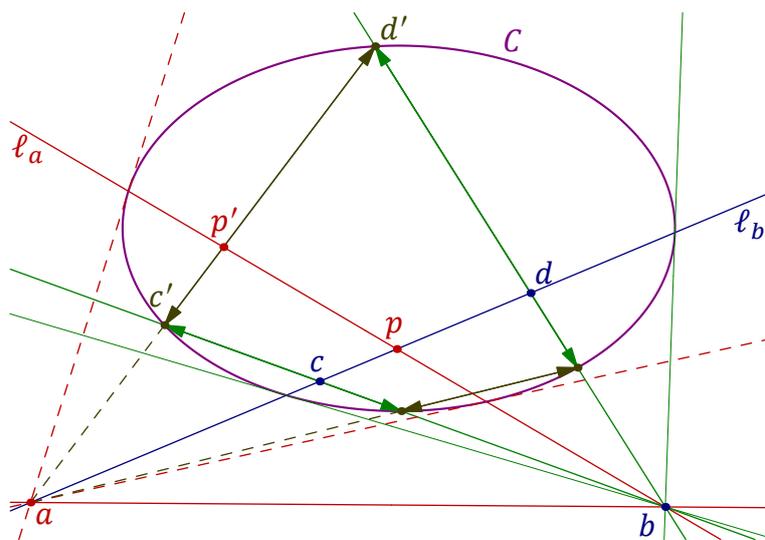


Рис. 11◊14. Инволюции с центрами в сопряжённых точках перестановочны.

УПРАЖНЕНИЕ 11.22. Убедитесь, что и наоборот, центры $p, q \in \mathbb{P}_2$ любых двух перестановочных друг с другом инволюций $\sigma_p, \sigma_q : C \simeq C$ гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$ сопряжены друг другу относительно C .

11.5. Квадратичные поверхности. Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, где $\dim V = 4$, образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поэтому любые 9 точек в \mathbb{P}_3 лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в \mathbb{P}_3 лежат на квадрике, проходящей через три тройки различных точек, выбранных каждая на своей прямой. Над алгебраически замкнутым полем есть ровно четыре проективно не конгруэнтных друг другу квадрики:

- двойная плоскость $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- распавшаяся квадрика¹ $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- простой конус² $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

¹Или объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i x_1$, т. е. линейное соединение особой прямой (e_2, e_3) и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, образующих гладкую квадрику на дополнительной прямой (e_0, e_1) , ср. с теор. 11.2 на стр. 191.

²Или линейное соединение одной особой точки с гладкой коникой в дополнительной плоскости.

- гладкая квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (ранг 4).

УПРАЖНЕНИЕ 11.23. Покажите, что особая квадрика в \mathbb{P}_3 над произвольным полем \mathbb{k} не может содержать трёх попарно не пересекающихся прямых и выведите отсюда, что любые три такие прямые в \mathbb{P}_3 лежат на гладкой квадрике.

11.5.1. Квадрика Сегре. Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в \mathbb{P}_3 является квадрика Сегре в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}))$, состоящая из ненулевых матриц A ранга 1 и задаваемая квадратным уравнением $\det(A) = 0$. Она называется *квадрикой Сегре* и обозначается

$$Q_S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (11-8)$$

С каждым ненулевым линейным оператором $F : U \rightarrow U$ ранга 1 связаны единственный с точностью до пропорциональности вектор $v \in U$, порождающий одномерный образ оператора F , и однозначно определяемый оператором F и вектором v ковектор $\xi \in U^*$, такой что $F(u) = \xi(u) \cdot v$ для всех $u \in U$. Ядро оператора F совпадает с ядром функционала $\xi : U \rightarrow \mathbb{k}$, и при умножении вектора v на λ , функционал ξ умножается на λ^{-1} . В этой ситуации мы пишем, что $F = v \otimes \xi$, и говорим, что оператор F является *тензорным произведением* вектора v и ковектора ξ . Любые вектор $v \in U$ и ковектор $\xi \in U^*$ задают линейный оператор ранга 1 на U

$$v \otimes \xi : U \rightarrow U, \quad u \mapsto v \cdot \xi(u). \quad (11-9)$$

В ситуации, когда $U = \mathbb{k}^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств \mathbb{k}^2 и \mathbb{k}^{2*} координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1) = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \quad (11-10)$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(U)$ одномерное подпространство в $\text{End}(U)$, натянутое на оператор (11-9) с матрицей (11-10), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(U)),$$

которое биективно отображает $\mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$ и переводит два семейства «координатных прямых» на $\mathbb{P}_1^* \times \mathbb{P}_1$ в два семейства прямых на Q_S , поскольку для каждого $\xi \in \mathbb{P}_1^*$ прямая $\xi \times \mathbb{P}_1$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а для каждого $v \in \mathbb{P}_1$ прямая $\mathbb{P}_1^* \times v$ изобразится матрицами с фиксированным отношением $v = (x_0 : x_1)$ между строками. Все прямые в каждом из этих двух семейств попарно не пересекаются друг с другом, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка квадрики Q_S является точкой пересечения единственной пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, т. к. проходящая через произвольную точку $p \in Q_S$ и целиком лежащая на квадрике Q_S прямая содержится в пересечении $Q_S \cap T_p Q_S$, которое представляет собою плоскую конику, а значит, полностью исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Предложение 11.9

Над алгебраически замкнутым полем¹ через любые три попарно не пересекающиеся прямые в \mathbb{P}_3 проходит единственная, автоматически гладкая квадрака. Она является объединением всех прямых, пересекающих каждую из трёх заданных.

Доказательство. Поскольку ни на одной из перечисленных в начале н° 11.5 особых квадрак над алгебраически замкнутым полем нет трёх попарно не пересекающихся прямых, любая квадрака Q , проходящая через такие прямые, автоматически является гладкой, т. е. проективно конгруэнтна квадраке Сегре и заматается двумя семействами прямых. Три заданные прямые, будучи попарно не пересекающимися, принадлежат одному из этих семейств, и любая прямая из второго семейства пересекает каждую из них. С другой стороны, любая прямая, пересекающая каждую из трёх данных имеет три разных точки на квадраке Q и поэтому лежит на ней целиком, т. е. является одной из прямых второго семейства. \square

Упражнение 11.24. Покажите, что касательное пространство к квадраке Сегре в точке $v \otimes \xi$ состоит из таких линейных операторов $F : U \rightarrow U$, что $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$.

11.6. Подпространства, лежащие на квадраках. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на квадраке $Q \subset \mathbb{P}_n$, называется *планарностью* квадраки Q . Планарность пустой квадраки по определению равна -1 . Таким образом, 0 -планарные квадраки суть непустые квадраки, не содержащие прямых.

Лемма 11.2

Планарность гладкой квадраки $Q \subset \mathbb{P}_n$ над произвольным полем \mathbb{k} , $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, не превышает половины размерности квадраки Q , т. е. не больше целой части $[(n - 1)/2]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = n + 1$, и $L = \mathbb{P}(W) \subset Q = V(q)$, где $q \in S^2V^*$. Поскольку ограничение формы q на подпространство $W \subset V$ тождественно нулевое, оператор корреляции $\hat{q} : V \rightarrow V^*$ переводит подпространство W внутрь подпространства $\text{Ann}(W) \subset V^*$. В силу невырожденности формы q этот оператор инъективен, откуда

$$\dim(W) = \dim \hat{q}(W) \leq \dim \text{Ann } W = \dim V - \dim W.$$

Таким образом, $2 \dim W \leq \dim V$, т. е. $2 \dim L \leq n - 1$. \square

Лемма 11.3

Сечение гладкой квадраки Q произвольной гиперплоскостью Π либо является гладкой квадракой в гиперплоскости Π , либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Последнее равносильно тому, что $\Pi = T_p Q$ касается квадраки в точке p .

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первое утверждение вытекает из включения $\ker \hat{q}|_W \subset \hat{q}^{-1}(\text{Ann } W)$ и равенства $\dim \hat{q}^{-1}(\text{Ann } W) = \dim \text{Ann } W = \dim V - \dim W = 1$. Пусть $\ker \hat{q}|_W \neq 0$ порождается ненулевым вектором p . Тогда $p \in Q \cap \Pi$ и $\text{Ann}(\hat{q}(p)) = W$, откуда $T_p Q = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_p Q = \mathbb{P}(\text{Ann } \hat{q}(p))$, то $p \in \text{Ann } \hat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения оператора \hat{q} на подпространство $\text{Ann } \hat{q}$. \square

¹Ниже мы увидим, что это условие можно существенно ослабить. Скажем, над полем \mathbb{R} предл. 11.9 тоже верно.

Предложение 11.10

Над произвольным полем \mathbb{k} с $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$ проективные подпространства L размерности m , лежащие на n -мерной гладкой квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ и проходящие через заданную точку $p \in Q$, биективно соответствуют всевозможным $(m-1)$ -мерным проективным подпространствам L' , лежащим на $(n-2)$ -мерной гладкой квадрике $Q'_{n-2} = \mathbb{P}_{n-1} \cap Q$, которую квадрика Q высекает из произвольной не проходящей через точку p гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_p Q$.

Доказательство. Всякая m -мерная плоскость $L \subset Q$, проходящая через точку $p \in Q$, лежит в пересечении $Q \cap T_p Q$. Согласно лем. 11.3 это пересечение является особой квадрикой с единственной особой точкой p , а значит, по теор. 11.2 на стр. 191 представляет собою конус с вершиной в точке p над гладкой квадрикой Q' , которая высекается квадрикой Q из любой не проходящей через p гиперплоскости $H \subset T_p Q$. Поэтому $(m-1)$ -мерная плоскость $L' = L \cap H = L \cap Q'$ лежит на Q' . Наоборот, линейное соединение точки p с произвольной $(m-1)$ -мерной плоскостью $L' \subset Q'$ содержит p и лежит в Q . \square

Следствие 11.10

Мощность множества k -мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике Q и проходящих через заданную точку $p \in Q$, одинакова для всех точек $p \in Q$. В частности, через каждую точку гладкой m -планарной квадрики можно провести лежащую на квадрике m -мерную плоскость.

Доказательство. Если $a, b \in Q$ и $b \notin T_a Q$, то $H = T_a Q \cap T_b Q$ одновременно является не проходящей через a гиперплоскостью в $T_a Q$ и не проходящей через b гиперплоскостью в $T_b Q$. По предл. 11.10 множество проходящих через точку a k -мерных плоскостей, лежащих на Q , и множество проходящих через точку a k -мерных плоскостей, лежащих на Q , оба находятся в биекции с множеством всех $(k-1)$ -мерными плоскостей, лежащих на гладкой квадрике $Q \cap H$ в H . Тем самым, эти два множества равномощны. Если $b \in T_a Q$, рассмотрим любую точку $c \in Q \setminus (T_a Q \cup T_b Q)$. По уже доказанному, множество k -мерных плоскостей, лежащих на Q и проходящих через точку c , равномощно и такому же множеству плоскостей, проходящих через a , и такому же множеству плоскостей, проходящих через b . \square

Следствие 11.11

Гладкая n -мерная квадрика $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем $[n/2]$ -планарна.

Доказательство. Это так при $n = 0, 1, 2$. Поскольку все гладкие n -мерные квадрики над алгебраически замкнутым полем проективно конгруэнтны, общий случай получается из предл. 11.10 по индукции. \square

§12. Пространства со скалярным произведением

В этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$.

12.1. Скалярные произведения. Будем называть *скалярным произведением* на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} любую невырожденную симметричную билинейную форму $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Напомню, что *невырожденность* равносильна выполнению любого из следующих эквивалентных условий:

- (1) матрица Грама $B = (\beta(e_i, e_j))$ какого-нибудь (а значит, и любого) базиса пространства V невырождена
- (2) оператор корреляции $\hat{\beta} : V \simeq V^*$, сопоставляющий вектору $v \in V$ функционал скалярного умножения на этот вектор $\hat{\beta}(v) : V^* \rightarrow \mathbb{k}, w \mapsto \beta(w, v)$, является изоморфизмом
- (3) оператор $\hat{\beta}$ сюръективен, т. е. $\forall \xi \in V^* \exists w \in V : \xi(v) = \beta(v, w)$ для всех $v \in V$
- (4) оператор $\hat{\beta}$ инъективен, т. е. \forall ненулевого $v \in V \exists v' \in V : \beta(v', v) \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Убедитесь, что эти свойства действительно равносильны друг другу, и для любого базиса e_1, e_2, \dots, e_n в пространстве V со скалярным произведением β существует единственный *ортогонально двойственный* базис $e_1^\times, e_2^\times, \dots, e_n^\times$, такой что

$$\beta(e_i, e_j^\times) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (12-1)$$

причём разложения любого вектора $v \in V$ по эти базисам имеют вид

$$v = \sum_{i=1}^n \beta(v, e_i^\times) \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \beta(v, e_i) \cdot e_i^\times. \quad (12-2)$$

ЛЕММА 12.1

Если ограничение $\beta_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$ симметричной билинейной формы¹ $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ на подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U \oplus U^\perp$, где $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}$.

Доказательство. Поскольку корреляция $\hat{\beta}_U : U \simeq U^*$ биективна, для каждого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$, т. е. $v - v_U \in U^\perp$. Тем самым, любой вектор $v \in V$ однозначно записывается как $v = v_U + v_{U^\perp}$ с $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} = v - v_U \in U^\perp$. \square

12.1.1. Ортогональные разложения и ортогональные проекции. Прямое разложение из **лем. 12.1** называется *ортогональным разложением*. Оно имеется для любого подпространства $U \subset V$, на которое форма β ограничивается невырождено². Невырожденность формы β на всём пространстве V в этом случае равносильна невырожденности её ограничения на U^\perp . Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ произвольного вектора $v = v_U + v_{U^\perp} \in V$ называются *ортогональными*

¹Которая не предполагается невырожденной.

²Не следует думать, что ограничение скалярного произведения на подпространство невырождено. Оно может оказаться даже тождественно нулевым, см. **прим. 12.1** на стр. 210 ниже.

проекциями вектора v на подпространства U и U^\perp . Первая из них однозначно характеризуется тем, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$. Если задана пара ортогонально двойственных друг другу базисов u_1, u_2, \dots, u_k и $u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_k^\times$ подпространства U , то по формуле (12-2)

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta(v_U, u_i^\times) \cdot u_i = \sum_{i=1}^n \beta(v, u_i^\times) \cdot u_i.$$

Из любых двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1 \oplus V_2$ и снабдить его таким скалярным произведением, для которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2 . Это скалярное произведение обозначается $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ и задаётся формулой

$$[\beta_1 \dot{+} \beta_2]((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2).$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1 , а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2 , имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ обозначается $V_1 \dot{+} V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2 .

12.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v, v) = 0$. Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет изотропных векторов. Скалярное произведение называется *анизотропным*, если анизотропно всё пространство V . Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Поскольку для анизотропной формы выполняется условие (4) со стр. 209, она автоматически невырождена. В частности, для любого анизотропного подпространства $U \subset V$ имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$ из лем. 12.1.

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Убедитесь, что скалярное произведение с матрицей Грама B на двумерном пространстве \mathbb{k}^2 анизотропно, если и только если $-\det B$ не квадрат в \mathbb{k} .

Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным*, если $\beta(u, u) = 0$ для всех $u \in U$. Поскольку

$$4\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u - w, u - w)$$

подпространство $U \subset V$ изотропно, если и только если скалярное произведение ограничивается на U в тождественно нулевую форму.

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Докажите, что $2 \dim U \leq \dim V$ для любого изотропного подпространства U в любом пространстве V со скалярным произведением.

Следующий ниже пример показывает, что эта оценка является точной.

ПРИМЕР 12.1 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО H_{2n})

Рассмотрим n -мерное векторное пространство V и зададим на прямой сумме $H_{2n} \stackrel{\text{def}}{=} V^* \oplus V$ скалярное произведение h формулой

$$h((\xi_1, v_1), (\xi_2, v_2)) = \xi_1(v_2) + \xi_2(v_1). \quad (12-3)$$

Иными словами, скалярное произведение вектора $v \in V$ и ковектора $\xi \in V^*$ равно их свёртке $\langle \xi, v \rangle = \xi(v) = e_{v^*}(\xi)$, а все скалярные произведения векторов с векторами и ковекторов с ковекторами нулевые. Последнее означает что прямые слагаемые $V, V^* \subset H_{2n}$ являются изотропными подпространствами половинной размерности. Матрица Грама формы h в любом базисе $(e_1^*, 0), (e_2^*, 0), \dots, (e_n^*, 0), (0, e_1), (0, e_2), \dots, (0, e_n) \in V^* \oplus V$, составленном из двойственных друг другу базисов $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in V^*$ и $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ имеет блочный вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (12-4)$$

где E и 0 суть единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$. В частности, форма h симметрична и невырождена. Базисы в H_{2n} с матрицей Грама (12-4) называются *гиперболическими*. Ортогональный базис в гиперболическом пространстве H_{2n} существует только при $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Пример такого базиса доставляют векторы $p_i = e_i + e_i^*$ и $q_i = e_i - e_i^*$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Постройте изометрический¹ изоморфизм $H_{2m} \dot{+} H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$.

Предложение 12.1

Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$. При этом любой базис подпространства U можно дополнить до гиперболического базиса пространства W .

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис u_1, u_2, \dots, u_m в U , дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\times, u_2^\times, \dots, u_m^\times$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (12-5)$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\times любой линейной комбинации векторов u_i . Заменяем каждый из векторов u_j^\times на вектор

$$w_j = u_j^\times - \frac{1}{2} \sum_v \beta(u_j^\times, u_v^\times) \cdot u_v.$$

Векторы w_1, w_2, \dots, w_m по-прежнему удовлетворяют соотношениям (12-5) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2} \beta(u_i^\times, u_j^\times) - \frac{1}{2} \beta(u_j^\times, u_i^\times) = 0,$$

т. е. $2m$ векторов $u_i, w_j, 1 \leq i, j \leq m$, образуют гиперболический базис своей линейной оболочки, которую мы и возьмём в качестве W . \square

ТЕОРЕМА 12.1

Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V = H_{2k} \oplus H_{2k}^\perp$, второе слагаемое которой $W = H_{2k}^\perp$ анизотропно (при этом $H_{2k} = 0$ и $H_{2k} = V$ тоже допускаются).

¹Т. е. сохраняющий скалярные произведения векторов.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если есть ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по [предл. 12.1](#) он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и по [лем. 12.1](#) $V = H_2 \oplus H_2^\perp$. По индукции, $H_2^\perp = H_{2m} \oplus W$, где $W = H_{2m}^\perp$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus W$. \square

Замечание 12.1. В [теор. 12.4](#) на стр. 215 мы увидим, что разложение из [теор. 12.1](#) единственно в следующем смысле: если $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Следствие 12.1

Всякая квадратичная форма q над произвольным полем \mathbb{k} с $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1x_{i+1} + x_2x_{i+2} + \dots + x_ix_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2}, \dots, x_r)$, где $r = \text{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. \square

Следствие 12.2

Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

- 1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству
- 2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств
- 3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Пусть выполнено (2). По [упр. 12.3](#) размерность каждого из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V , что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2} \dim V$. Тем самым, (2) \Rightarrow (3). По [предл. 12.1](#) на стр. 211 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2} \dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем V , что даёт импликацию (3) \Rightarrow (1). \square

12.3. Изометрии. Линейное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ между пространствами V_1 и V_2 со скалярными произведениями β_1 и β_2 называется *изометрическим*, если для всех $u, w \in V_1$ выполняется равенство $\beta_1(u, w) = \beta_2(f(u), f(w))$. Изометричность линейного эндоморфизма $f : V \rightarrow V$ пространства V со скалярным произведением β означает, что матрица F оператора f , записанная в базисе с матрицей Грама B , удовлетворят соотношению

$$F^t \cdot B \cdot F = B. \quad (12-6)$$

Поскольку $\det B \neq 0$, мы заключаем, что и $\det F \neq 0$. В частности, каждый изометрический оператор обратим, причём матрица обратного оператора имеет вид

$$F^{-1} = B^{-1}F^tB. \quad (12-7)$$

Тем самым, изометрические эндоморфизмы пространства V со скалярным произведением β образуют группу. Она называется *ортогональной группой* или *группой изометрий* и обозначается $O(V)$ или $O_\beta(V)$, если важно указать, какое именно скалярное произведение имеется в виду.

ПРИМЕР 12.2 (ИЗОМЕТРИИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ)

Оператор $f : H_2 \rightarrow H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e, e^* \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (12-8)$$

Над полем \mathbb{R} оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e + e^*)/\sqrt{2}$, $q = (e - e^*)/\sqrt{2}$, оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота¹:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix},$$

где $\text{ch } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\text{sh } t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t . Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии². Несобственный оператор \tilde{F}_λ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси гиперболы.

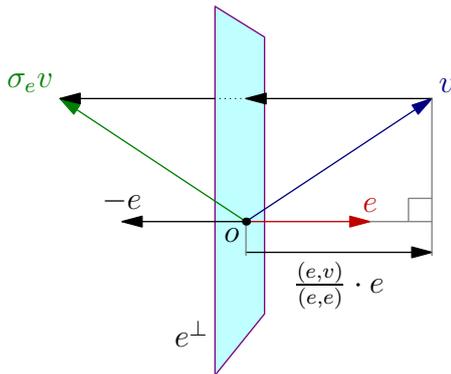


Рис. 12◊1. Отражение σ_e .

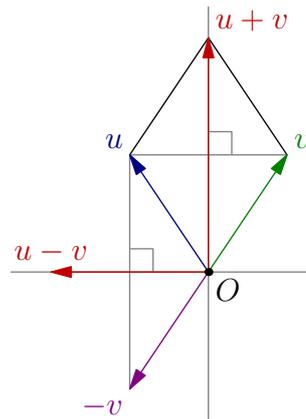


Рис. 12◊2. Отражения в ромбе.

¹См. формулу (3-16) на стр. 42.

²С проективной точки зрения, при проходе параметра λ через 0 или через ∞ орбита $F_\lambda v$ перескакивает через бесконечно удалённую прямую на другую ветвь той же гиперболы.

ПРИМЕР 12.3 (ОТРАЖЕНИЕ В ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \mathbb{k} \cdot e \oplus e^\perp$. Точно так же, как и в евклидовом случае¹ назовём *отражением* в гиперплоскости e^\perp оператор $\sigma_e : V \rightarrow V$, тождественно действующий на e^\perp и переводящий e в $-e$, см. рис. 12◊1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$ переходит при этом² в

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2 \frac{\beta(e, v)}{\beta(e, e)} \cdot e \quad (12-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.5. Убедитесь, что $\sigma_e \in O_\beta(V)$ и $\sigma_e^2 = \text{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in O(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

ЛЕММА 12.2

В каждом пространстве V со скалярным произведением β для любых двух различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u, u) = \beta(v, v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v , либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u + v, u - v$ натянута на них ромба (см. рис. 12◊2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u + v, u - v) = \beta(u, u) - \beta(v, v) = 0,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v . Тем самым, хотя бы одно из отражений $\sigma_{u-v}, \sigma_{u+v}$ определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Проверьте, последние равенства.

ТЕОРЕМА 12.2

Всякая изометрия n -мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n$ отражений.

Доказательство. Индукция по n . Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \rightarrow V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость v^\perp . По индукции, действие σf на v^\perp является композицией не более $2n - 2$ отражений в гиперплоскостях внутри v^\perp . Продолжим их до отражений всего пространства V , добавив в зеркало каждого отражения вектор v . Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости v^\perp , а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf , как оператор на всём пространстве V , есть композиция построенных $2n - 2$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости v^\perp . Следовательно, $f = \sigma \sigma f$ это композиция не более $2n$ отражений. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.7. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях лем. 12.2 всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v , и выведите отсюда, что любая изометрия n -мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

¹См. п° 7.1.1 на стр. 107.

²Ср. с форм. (7-2) на стр. 107.

ТЕОРЕМА 12.3 (ЛЕММА ВИТТА)

Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств $U_1, U_1 \dot{+} W_1, W_1$ изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки $U_2, U_2 \dot{+} W_2, W_2$. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \simeq U_2$ и $g : W_1 \simeq W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dot{+} W_1 \rightarrow U_2 \dot{+} W_2, (u, w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометрическим изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \simeq U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dot{+} W_1 \simeq U_2 \dot{+} W_2,$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \simeq W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u , то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u, 0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dot{+} W_2$, переводящее $h(u, 0)$ в $(\pm f(u), 0)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dot{+} W_1 \simeq U_2 \dot{+} W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \simeq W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dot{+} W_1 = \mathbb{k} \cdot u \dot{+} u^\perp \dot{+} W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dot{+} W_2 = \mathbb{k} \cdot f(u) \dot{+} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

в которых $u^\perp \subset U_1$ и $f(u)^\perp \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\mathbb{k} \cdot u$ и $\mathbb{k} \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \simeq f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dot{+} W_1 \simeq f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

к которым применимо индуктивное предположение. □

ТЕОРЕМА 12.4

Построенное в теор. 12.1 разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geq k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $\text{Id} : V \rightarrow V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)} \dot{+} W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \simeq H_{2(m-k)} \dot{+} W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. □

СЛЕДСТВИЕ 12.3

Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \simeq W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f \in O(V)$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \simeq W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \simeq W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto (\varphi(u), \psi(u'))$ является требуемым автоморфизмом пространства V . В силу сделанных предположений имеются изометрические изоморфизмы $\eta : U \oplus U^\perp \simeq V$, $(u, u') \mapsto u + u'$, и $\zeta : U \oplus W^\perp \simeq V$, $(u, w') \mapsto \varphi(u) + w'$. Композиция $\zeta^{-1}\eta : U \oplus U^\perp \simeq U \oplus W^\perp$ тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта¹ ортогоналы U^\perp и W^\perp изометрически изоморфны. \square

Следствие 12.4

Для каждого натурального k в диапазоне $1 \leq k \leq \dim V/2$ группа изометрий $O(V)$ транзитивно действует на k -мерных изотропных и $2k$ -мерных гиперболических подпространствах в V .

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из сл. 12.3, а про изотропные — получается из него применением предл. 12.1. \square

Следствие 12.5

Группа линейных проективных автоморфизмов $\mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n$, переводящих в себя гладкую квадратичную $Q \subset \mathbb{P}_n$ транзитивно действует на лежащих на Q линейных подпространствах любой фиксированной размерности (в частности, на точках квадратички). \square

Следствие 12.6

Планарность гладкой проективной квадратички $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ на единицу меньше половины размерности гиперболического слагаемого в разложении из теор. 12.1 на стр. 211 для пространства V со скалярным произведением \tilde{q} . \square

12.4. Вещественные квадратичные формы. Из теоремы Лагранжа² вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном вектором пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \quad (12-10)$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (12-10) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, а упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой* вещественной квадратичной формы q . Сумма $p + m = \text{rk } q$ равна рангу формы q и не зависит от выбора базиса. Форма q корректно задаёт невырожденную квадратичную форму q_{red} на фактор пространстве $W = V / \ker q$, поскольку $\tilde{q}(w_1 + u_1, w_2 + u_2) = \tilde{q}(w_1, w_2)$ для любых $u_1, u_2 \in \ker q$. В представлении (12-10) ядро $\ker q$ совпадает с линейной оболочкой всех базисных векторов e_i с номерами $i > p + m$, не задействованными в формуле (12-10), классы остальных базисных векторов по модулю $\ker q$ образуют базис пространства W , и в этом базисе форма q_{red} записывается в точности формулой (12-10). Заменяя V на W , а q на q_{red} , будем считать форму $q = q_{\text{red}}$ невырожденной, а $\dim V = p + q$. Тогда каждая пара отличающихся знаком квадратов $x_i^2 - x_{p+i}^2$ в формуле (12-10), где $1 \leq i \leq \min(p, m)$, отвечает двумерному подпространству с базисом e_i, e_{p+i} , которое является гиперболической плоскостью с гиперболическим базисом $(e_i \pm e_{p+i}) / \sqrt{2}$, а всё пространство V раскладывается в прямую ортогональную сумму $\min(p, m)$ таких плоскостей и анизотропного подпространства натянутого на остальные

¹См. теор. 12.3 на стр. 215.

²См. теор. 11.1 на стр. 190.

базисные векторы, форма на котором является суммой квадратов координат при $p > m$ и минус суммой квадратов координат при $p < m$. При $p = m$ форма (12-10) гиперболическая.

Мы заключаем, что разность $p - m$ в формуле (12-10) также не зависит от выбора базиса, в котором форма q имеет такой вид, и по абсолютной величине равна размерности анизотропной компоненты скалярного произведения \tilde{q} , причём при $p - m > 0$ эта анизотропная компонента евклидова (форма на ней положительно определена), а при $p - m < 0$ *антиевклидова* (с отрицательно определённым скалярным произведением). В частности, для любого $n \in \mathbb{N}$ над полем \mathbb{R} имеются, с точностью до изометрии, ровно два анизотропных n -мерных пространства со скалярным произведением: евклидово, с положительно определённым скалярным произведением, и антиевклидово, с отрицательно определённым скалярным произведением. Разность $p - m$ называется *индексом* квадратичной формы q . Произвольные две вещественные квадратичные формы тогда и только тогда переводятся друг в друга обратимой линейной заменой координат, когда они имеют одинаковый ранг и индекс или, что то же самое, одинаковые сигнатуры.

12.4.1. Отыскание сигнатуры. Зафиксируем в V базис и обозначим через $V_k \subset V$ линейную оболочку первых k базисных векторов e_1, e_2, \dots, e_k , а через Δ_k их определитель Грама, т. е. главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама выбранного базиса, сосредоточенный в первых k строках и первых k столбцах, и рассматриваемый по модулю умножения на ненулевые положительные числа (ненулевые квадраты поля \mathbb{R}). Если он нулевой, ограничение $q|_{V_k}$ особа, и в частности, обладает изотропными векторами. Если ограничение $q|_{V_k}$ неособо, то $\Delta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограниченной формы $q|_{V_k}$. Если в последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$ не встречается большого числа следующих подряд нулей, то читая её слева направо, можно проследить изменение индекса формы $q|_{V_i}$ при переходе от V_i к V_{i+1} и/или появление гиперболического слагаемого при переходе от V_i к V_{i+2} , что позволяет эффективно определить индекс.

Например, пусть $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$. Поскольку форма $q|_{V_2}$ особа, пространство V_2 является прямой ортогональной суммой отрицательной анизотропной прямой $\mathbb{R}e_1$ и изотропной прямой. Поскольку ограничение на V_3 неособо, ортогональное дополнение к e_1 внутри V_3 тоже неособо и содержит изотропный вектор. Поэтому оно является гиперболической плоскостью, а $V_3 = \mathbb{R}e_1 \oplus H_2$. Обратите внимание, что Δ_3 в этом случае *обязан* отличаться знаком от Δ_1 , что мы и наблюдаем¹.

УПРАЖНЕНИЕ 12.8. Пусть $\Delta_{i-1} \neq 0$, $\Delta_i = 0$ и $\Delta_{i+1} \neq 0$. Покажите, что $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} < 0$ и $V_{i+1} = V_{i-1} \oplus H_2$.

Итак, ограничение $q|_{V_3}$ имеет сигнатуру (1, 2). Те же аргументы показывают, что ограничение формы на V_3^\perp невырождено и содержит изотропный вектор, а значит имеет сигнатуру (2, 1) или (1, 2). Поскольку знаки у Δ_3 и Δ_6 противоположны, имеет место первое, и полная сигнатура q на \mathbb{R}^6 равна (1, 2) + (2, 1) = (3, 3). Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹А квадратичных форм с $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_3 < 0$ просто не существует!

Если все $\Delta_k \neq 0$, все ограничения $q|_{V_k}$ неособы, и соседние миноры Δ_i, Δ_{i+1} различаются знаком, если и только если отрицательный индекс инерции $m_{i+1} = m_i + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции m в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\dim V}$. Это наблюдение обычно называют *законом инерции*.

12.4.2. Вещественные проективные квадрики. Поскольку над полем \mathbb{R} при каждом натуральном k есть единственная с точностью до изометрии и умножения на константу анизотропная форма $\alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$, любая гладкая вещественная квадратика в $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+2})$ в подходящих однородных координатах задаётся уравнением

$$x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1} = x_{2m+2}^2 + x_{2m+3}^2 + \dots + x_{n+1}^2, \quad (12-11)$$

в котором $-1 \leq m \leq n/2$. Мы будем обозначать такую квадратичку $Q_{n,m}$ и называть n -мерной и m -планарной. Квадратичная форма (12-11) имеет сигнатуру $(n+2-m, m)$, индекс $n+2-2m$, размерность её гиперболической компоненты равна $2m+2$, а её максимальные изотропные векторные подпространства $(m+1)$ -мерны. Поэтому гладкая вещественная квадратика определяется числами m, n однозначно с точностью до проективной конгруэнтности, и при $m \geq 0$ все квадрики $Q_{n,m}$ попарно проективно не конгруэнтны друг другу. Все (-1) -планарные квадрики $Q_{n,-1}$, задаваемые анизотропными уравнениями $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, пусты. В ортогональном базисе уравнение квадрики $Q_{n,m}$ принимает вид

$$t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_m^2 = t_{m+1}^2 + t_{m+2}^2 + \dots + t_{n+1}^2.$$

Гиперболические координаты x_ν связаны с ортогональными координатами t_ν формулами

$$x_{2i} = t_{m+i} + t_i, \quad x_{2i+1} = t_{m+i} - t_i \quad \text{при } 0 \leq i \leq m \quad \text{и} \quad x_j = t_j \quad \text{при } 2m+2 \leq j \leq n+2.$$

Квадрики $t_0^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$ планарности 0 называются *эллиптическими*. Эллиптическая квадратика не содержит проективных подпространств положительной размерности. Все квадрики планарности 1 и выше принято называть *гиперболическими*, хотя, в строгом смысле слова, гиперболическими квадратичными формами среди них задаются только квадрики $Q_{2m,m}$.

Упражнение 12.9. Покажите, что пересечение гладкой вещественной m -планарной квадрики $Q_{n,m}$ с касательной гиперплоскостью является конусом над гладкой квадратикой $Q_{n-2,m-1}$ планарности $m-1$.

12.5. Аффинные квадрики. Пусть основное поле \mathbb{k} бесконечно, и $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Множество точек

$$X = V(f) = \{v \in \mathbb{A}(V) \mid f(v) = 0\},$$

задаваемое в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ неоднородным многочленом второй степени

$$f = f_0 + f_1 + f_2, \quad \text{где } f_0 \in \mathbb{k}, f_1 \in V^*, f_2 \in S^2 V^*,$$

называется *аффинной квадратикой*. Две аффинных квадрики $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}(V)$ называются *аффинно эквивалентными*, если они переводятся одна в другую некоторым аффинным автоморфизмом $F : \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}(V)$. Рассмотрим векторное пространство $W = \mathbb{k} \oplus V$ размерности $1 + \dim V$ и обозначим через $e_0 = (1, 0) \in W$ базисный вектор дополнительного одномерного слагаемого. Через $x_0 \in W^*$ обозначим такой базисный ковектор в аннуляторе $\text{Ann } V \subset W^*$, что $x_0(e_0) = 1$. Вложим $\mathbb{A}(V)$ в $\mathbb{P}(W)$ в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = U_{x_0} = e_0 + V \subset W$ и

рассмотрим проективное замыкание¹ $Q = \bar{X} = V(q) \subset \mathbb{P}(W)$ аффинной квадррики $X \subset U_0$, задаваемое однородным квадратичным многочленом

$$q = \bar{f} = f_0 \cdot x_0^2 + f_1 \cdot x_0 + f_2 \in S^2 W^*. \quad (12-12)$$

Тогда $q(e_0 + v) = f(v)$ для всех $v \in V$, т. е. $Q \cap U_0 = X$. Квадратичная форма (12-12), рассматриваемая с точностью до умножения на ненулевую константу, называется *расширенной квадратичной формой* аффинной квадррики X . Например, расширенной формой окружности $x_1^2 + x_2 = 1$ является однородная квадратичная форма $-x_0^2 + x_1^2 + x_2$. Обозначим через

$$H_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ann}(x_0) = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$$

бесконечно удалённую гиперплоскость карты U_0 . Проективная квадррика

$$Q_\infty \stackrel{\text{def}}{=} Q \cap H_\infty = Q \setminus X \subset \mathbb{P}(V)$$

называется *асимптотической квадррикой* аффинной квадррики of X . Она задаётся в $\mathbb{P}(V) = H_\infty$ однородной компонентой второй степени $q|_V = f_2 \in S^2 V^*$ неоднородного многочлена f , задающего аффинную квадррику X . Изучение аффинных квадррик с точностью до аффинной конгруэнтности равносильно изучению лежащих в проективном пространстве пар «проективная квадррика Q + гиперплоскость H , такая что $H \not\subset Q$ и $Q \not\subset H$ » с точностью до их проективной конгруэнтности.

Предложение 12.2

Пусть непустые аффинные квадррики $X' = V(f')$, $X'' = V(f'') \subset \mathbb{A}(V)$ имеют проективные замыкания $Q' = V(q')$, $Q'' = V(q'') \subset \mathbb{P}(W)$. Тогда X' и X'' аффинно конгруэнтны, если и только если существует такой линейный проективный изоморфизм $\bar{F} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, что $\bar{F}(Q') = Q''$ и $\bar{F}(H_\infty) = H_\infty$.

Доказательство. Всякий аффинный автоморфизм $\varphi : U_0 \xrightarrow{\sim} U_0$ имеет вид

$$e + v \mapsto \varphi(e) + D_\varphi v \quad \forall v \in V, \quad (12-13)$$

где $\varphi(e) \in V$, а дифференциал² $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ является линейным изоморфизмом. Тогда линейное отображение $F : W \xrightarrow{\sim} W$, задаваемое в терминах разложения $W = \mathbb{k} \oplus V$ блочной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi(e) & D_\varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda\varphi(e) + v \end{pmatrix}, \quad (12-14)$$

где $1 \in \mathbb{k}$ и $0 \in V$, переводит в себя подпространство $V \subset W$, гиперплоскость $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$ и аффинную карту U_0 , причём $F|_{U_0} = \varphi$. Наоборот, всякий проективный автоморфизм $\bar{F} : \mathbb{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, задаваемый линейным автоморфизмом $F : W \xrightarrow{\sim} W$ и переводящий в себя гиперплоскость $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$, действует на $W = \mathbb{k} \oplus V$ блочной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ u & \psi \end{pmatrix},$$

¹См. н° 10.2.1 на стр. 177.

²См. н° 2.1 на стр. 24.

где $\mu \in \mathbb{k}$, $0, u \in V$, $f \in V$, $\psi \in \text{End } V$. Поскольку F обратим, $\mu \neq 0$ и $\psi \in \text{GL}(V)$. Если, не меняя проективного преобразования \bar{F} , перескалировать линейный изоморфизм F так, чтобы $\mu = 1$, получится в точности матрица вида (12-14), отображающая аффинную карту U_0 в себя и действующая на ней аффинным автоморфизмом (12-13) с $\varphi(e) = u$. Таким образом, аффинные автоморфизмы пространства $\mathbb{A}(V)$ это в точности проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(W)$, переводящие в себя бесконечно удалённую гиперплоскость $H_\infty = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(W)$. Если такой проективный автоморфизм $\bar{F} : \mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}(W)$ переводит Q' в Q'' , то его ограничение на $U_0 = \mathbb{P}(W) \setminus H_\infty$ переводит $X' = Q' \setminus H_\infty$ в $X'' = Q'' \setminus H_\infty$. Наоборот, если $\bar{F}(Q' \setminus H_\infty) = Q'' \setminus H_\infty$, то проективные квадрики $F(Q')$ и Q'' совпадают друг с другом всюду вне гиперплоскости H_∞ . Идущая ниже лемма 12.3 утверждает, что тогда они совпадают вообще всюду. \square

ЛЕММА 12.3

Пусть гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_n$ и непустая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ над бесконечным полем \mathbb{k} таковы, что $Q \not\subset H$ и $H \not\subset Q$. Тогда пересечение $Q \cap H$ однозначно определяется дополнением $Q \setminus H$.

Доказательство. При $n = 1$ это следует из прим. 11.1 на стр. 190. Пусть $n \geq 2$ и $Q = V(q)$. Если Q гладкая, в дополнении $Q \setminus H$ есть $n + 2$ точки, никакие $n + 1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости¹. По ним однозначно восстанавливается поляритет² $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$, а тем самым, и матрица Грама формы q с точностью до пропорциональности. Если квадрика Q особа, но имеет гладкую точку $a \in Q \setminus H$, рассмотрим любое дополнительное к $\text{Sing } Q$ проективное подпространство $L \ni a$. По теор. 11.2 на стр. 191 квадрика Q является линейным соединением вершинного подпространства $\text{Sing } Q$ и непустой гладкой квадрики $Q' = Q \cap L \ni a$. По уже доказанному, пересечение $Q' \cap H'$ этой квадрики с гиперплоскостью $H' = H \cap L$ в пространстве L однозначно определяется дополнением $Q' \setminus H'$. Пересечение $\text{Sing } Q \cap H$ также однозначно восстанавливается по $Q \setminus H$, поскольку каждая прямая (a, b) с $b \in \text{Sing } Q \cap H$ лежит на Q и все точки этой прямой кроме точки b лежат в $Q \setminus H$. Тем самым, и пересечение $Q \cap H$, являющееся линейным соединением $Q' \cap H$ с $\text{Sing } Q \cap H$, тоже однозначно восстанавливается по дополнению $Q \setminus H$. Если же все точки дополнения $Q \setminus H$ особы, то все точки пересечения $Q \cap H$ тоже особы, т. к. в противном случае точки любой лежащей на Q прямой (ab) , соединяющей гладкую точку $a \in Q \cap H$ с особой точкой $b \in Q \setminus H$, все кроме b являются гладкими и все кроме a не лежат в H . Тем самым, квадрика $Q = \text{Sing } Q$ вся особа и является не содержащимся в гиперплоскости H проективным подпространством. Его собственное проективное подпространство $Q \cap H$ однозначно восстанавливается как линейная оболочка дополнения $Q \setminus H$. \square

Аффинные квадрики $X \subset \mathbb{A}(V)$ разбиваются на четыре класса: гладкие центральные квадрики, параболоиды, простые конусы и цилиндры, в соответствии с тем гладки или нет из проективные замыкания $Q = \bar{X} \subset \mathbb{P}(W)$ и асимптотические квадрики $Q_\infty = Q \cap H_\infty = Q \setminus X \subset \mathbb{P}(V)$.

12.5.1. Гладкие центральные квадрики. Если обе квадрики Q и Q_∞ гладкие, аффинная квадрика X называется *гладкой центральной*. В этом случае бесконечно удалённая гиперплоскость H_∞ не касается квадрики Q и полюс s гиперплоскости H_∞ относительно Q находится в аффинной карте U_0 и не лежит на квадрике. Он называется *центром* аффинной квадрики X , ибо квадрика X центрально симметрична относительно s : на любой проходящей через s прямой, пересекающей квадрику X в точках a, b , а гиперплоскость H_∞ — в точке d , по предл. 11.2

¹См. упр. 11.12 на стр. 195.

²См. п° 11.2.1 на стр. 193.

на стр. 194 выполняется равенство $[d, c, a, b] = -1$, означающее, что точка c является центром точек a, b .

На языке уравнений, квадратика $X = V(f_0 + f_1 + f_2)$ центральна, если и только если её расширенная квадратичная форма $q = f_0x_0^2 + f_1x_0 + f_2$ и квадратичная однородная компонента f_2 обе имеют ненулевые определители Грама. Если поместить начало аффинной координатной системы в центр квадрики, а в качестве базиса в V взять ортогональный базис формы f_2 , линейная форма f_1 в многочлене f занулится, а свободный член f_0 , напротив, будет ненулевым.

УПРАЖНЕНИЕ 12.10. Убедитесь в этом.

Сокращая на f_0 , приводим уравнение квадрики X к виду

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 = 1. \quad (12-15)$$

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} это уравнение перескалыванием переменных упрощается до $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем все гладкие центральные аффинные квадрики аффинно конгруэнтны. Над полем \mathbb{R} уравнение (12-15) упрощается до

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = \pm 1, \quad \text{где } p \geq m, \quad p + m = n \quad (12-16)$$

где при $p = m = n/2$ в правой части всегда можно поставить¹ $+1$. Среди квадрик (12-16) имеется ровно одна пустая. Она задаётся уравнением $\sum x_i^2 = -1$ и называется *мнимым эллипсоидом*. Также имеется ровно одна непустая квадратика без точек на бесконечности. Она задаётся уравнением $\sum x_i^2 = 1$, имеет нулевую планарность $m = 0$ и называется *эллипсоидом*. Все остальные квадрики имеют непустую асимптотическую квадратичку $Q_\infty = Q \cap H_\infty \neq \emptyset$ и называются *гиперболоидами*. При $p > m$ и правой части $+1$ проективное замыкание Q квадрики (12-16) имеет сигнатуру $(p, m + 1)$ и планарность m . При $p > m$ и правой части -1 квадратика Q имеет сигнатуру (p, m) и $(m - 1)$ -планарна. При $p = m = n/2$ квадратика Q имеет планарность $n/2$. Таким образом 0-планарные квадрики (12-16) исчерпываются эллипсоидом и *двуполостным гиперболоидом* $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2 - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.11. Убедитесь, что двуполостный гиперболоид имеет две компоненты связности, тогда как все остальные квадрики (12-16) связны.

Асимптотическая квадратика $Q_\infty = Q \cap H_\infty$ аффинной квадрики (12-16) задаётся в том же базисе пространства $H_\infty = \mathbb{P}(V)$ уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = 0$$

и при любом выборе знака в правой части (12-16) является m -планарной. Таким образом, все аффинные квадрики (12-16) попарно аффинно не конгруэнтны.

12.5.2. Параболоиды. Аффинная квадратика $X = V(f)$ называется *параболоидом*, если она имеет гладкое проективное замыкание Q , касающееся бесконечно удалённой гиперплоскости H_∞ в некоторой точке $c \in Q_\infty = H_\infty \cap Q$. Последнее означает², что $H_\infty = T_cQ$, а асимптотическая квадратика Q_∞ имеет ровно одну особую точку — точку c . На языке уравнений, квадратика

¹При $p = m = n/2$ смена знака у обеих частей и перенумерация переменных превращает уравнение (12-16) с правой частью -1 в уравнение с правой частью $+1$.

²См. лем. 11.3 на стр. 207.

$X = V(f)$ является параболоидом, если и только если её расширенная квадратичная форма $q = f_0 x_0^2 + f_1 x_0 + f_2$ невырождена, а однородная квадратичная компонента f_2 вырождена.

Изотропный вектор c содержится в некой гиперболической плоскости $\Pi \subset W$ и включается в гиперболический базис b, c этой плоскости. Так как $b \notin c^\perp = V = \text{Ann } x_0$, значение $x_0(b) \neq 0$, и базис b, c можно перескалировать в гиперболический базис $p_0 = \lambda b, p_n = \lambda^{-1} c$ плоскости Π так, чтобы $x_0(p_0) = 1$. Дополняя векторы p_0, p_1 до базиса в W векторами p_1, p_2, \dots, p_{n-1} , составляющими ортогональный базис ортогонального дополнения Π^\perp к плоскости Π в W , мы преобразуем однородное уравнение квадрики Q к виду

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = x_0 x_n$$

Так как $\Pi^\perp \subset c^\perp = V$ имеет коразмерность 1 в V , векторы p_1, p_2, \dots, p_n составляют базис пространства V . В аффинной системе координат на U_0 с таким базисом и началом в точке $p_0 \in U_0$ аффинное уравнение квадрики X имеет вид

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 = x_n. \quad (12-17)$$

Над алгебраически замкнутым полем это упрощается до $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n$, и мы заключаем, что все параболоиды над алгебраически замкнут полем аффинно конгруэнтны. Над полем \mathbb{R} уравнение (12-17) преобразуется к виду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2 = x_n, \quad \text{где } p \geq m, p + m = n - 1. \quad (12-18)$$

Параболоид (12-18) имеет планарность m . Поэтому при разных параболоиды (12-18) аффинно не конгруэнтны. Нуль-планарный параболоид $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n$ называется *эллиптическим*, а все остальные — *гиперболическими*.

12.5.3. Простые конусы. Аффинная квадрика $X = V(f)$ называется *простым конусом*, если её проективное замыкание Q особа, а асимптотическая квадрика Q_∞ гладкая. На языке уравнений это означает что расширенная квадратичная форма имеет нулевой определитель Грама, а однородная компонента второй степени — ненулевой.

УПРАЖНЕНИЕ 12.12. Убедитесь, что когда проективное замыкание $Q \subset \mathbb{P}(W)$ особа, гладкость квадрики $Q_\infty = Q \cap H_\infty$ равносильна тому, что $\text{Sing } Q \cap H_\infty = \emptyset$.

Так как H_∞ имеет коразмерность 1 в $\mathbb{P}(W)$, из [упр. 12.12](#) вытекает, что $\dim \text{Sing } Q = 0$, т. е. квадрика Q имеет ровно одну особую точку c , и она лежит в аффинной карте U_0 . Помещая в неё начало аффинной координатной системы и беря в качестве базиса в V ортогональный базис (невырожденной) квадратичной формы f_2 , получаем для аффинной квадрики X уравнение

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = 0, \quad (12-19)$$

одновременно являющееся и однородным уравнением асимптотической квадрики $Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$. Над алгебраически замкнутым полем уравнение (12-19) приводится к виду

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0. \quad (12-20)$$

Тем самым, все простые конусы над алгебраически замкнутым полем аффинно конгруэнтны. Над полем \mathbb{R} уравнение (12-19) приводится к виду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+m}^2, \quad \text{где } p \geq m \text{ и } p + m = n. \quad (12-21)$$

Это однородное уравнение задаёт в $\mathbb{P}(V)$ проективную квадрику планарности $m - 1$. Поэтому аффинный конус (12-21) m -планарен. В частности, все конусы (12-21) попарно аффинно не конгруэнтны друг другу. Обратите внимание, что при $m = 0$ аффинный конус (12-21) состоит из единственной точки — начала координат.

12.5.4. Цилиндры. Аффинная квадрика $X = V(f)$ называется *цилиндром*, если и её проективное замыкание Q и асимптотическая квадрика Q_∞ обе особы. Согласно упр. 12.12, это автоматически означает, что $\text{Sing } Q \cap H_\infty \neq \emptyset$. В терминах уравнений, цилиндры характеризуются занулением определителей Грама расширенной квадратичной формы q и квадратичной составляющей f_2 многочлена f , задающего аффинную квадрику. Если выбрать в V базис e_1, e_2, \dots, e_n так, чтобы векторы e_i с $i > r$ составили базис в $\ker q \cap V$, то уравнение аффинной квадрики X не будет зависеть от последних $n - r$ координат. Поэтому любой цилиндр является прямым произведением аффинного пространства \mathbb{A}^{n-r} , параллельного последним $n - r$ базисным векторам, и не имеющей особенностей на бесконечности аффинной квадрики в пространстве \mathbb{A}^r , принадлежащей к одному из уже рассмотренных выше трёх типов.

Пример 12.4 (вещественные аффинные кривые второй степени)

Полный список непустых аффинных «кривых второй степени» в \mathbb{R}^2 с точностью до аффинной конгруэнтности таков:

- эллипс $x_1^2 + x_2^2 = 1$, гладкая центральная квадрика с пустой асимптотической квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- гипербола $x_1^2 - x_2^2 = 1$, гладкая с центральная квадрика, асимптотическая проективная квадрика которой состоит из двух точек $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- парабола $x_1^2 = x_2$, касающаяся бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$
- двойная точка $x_1^2 + x_2^2 = 0$, простой конус над гладкой пустой квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- пара пересекающихся прямых $x_1^2 - x_2^2 = 0$, простой конус над гладкой непустой квадрикой на бесконечно удалённой прямой $x_0 = 0$
- пара параллельных прямых $x_1^2 = 1$, цилиндр над гладкой непустой аффинной квадрикой в \mathbb{A}^1
- двойная прямая $x_1^2 = 0$, цилиндр над двойной точкой в \mathbb{A}^1 .

Все три непустые гладкие квадрики: эллипс, гипербола, и парабола, являются различными аффинными кусками одной и той же гладкой вещественной проективной коники Веронезе сигнатуры $(2, 1)$.

Пример 12.5 (вещественные аффинные квадратичные поверхности)

Полный список непустых аффинных «квадратичных поверхностей» в \mathbb{R}^3 вдвое длиннее предыдущего списка кривых. Он состоит из семи цилиндров над всеми предыдущими «кривыми второго порядка». Эти цилиндры задаются ровно теми же уравнениями, но только в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x_1, x_2, x_3) , и называются, соответственно, эллиптическим, гиперболическим и параболическим цилиндрами, двойной прямой, парой пересекающихся и парой параллельных плоскостей и двойной плоскостью.

Кроме семи цилиндров есть три гладких центральных поверхности:

- эллипсоид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, являющийся изображением 0-планарной проективной квадрики сигнатуры (3, 1) в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой не пересекается с квадратикой; эллипсоид компактен и 0-планарен (см. рис. 12◊4)
- двуполостный гиперboloид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$, изображение той же самой проективной квадрики сигнатуры (3, 1) в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой пересекает квадратик по конике Веронезе; двуполостный гиперboloид 0-планарен и имеет две компоненты связности (см. рис. 12◊5)
- однополостный гиперboloид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$, аффинное изображение проективной квадрики Сегре сигнатуры (2, 2) в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой пересекает квадратик Сегре по конике Веронезе; однополостный гиперboloид связан, 1-планарен и заматается двумя семействами прямых (см. рис. 12◊6)

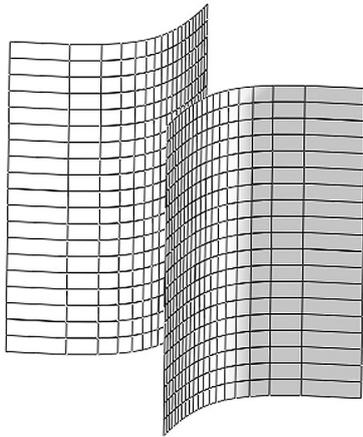


Рис. 12◊3. Гиперболический цилиндр
 $x_1^2 - x_2^2 = 1$.

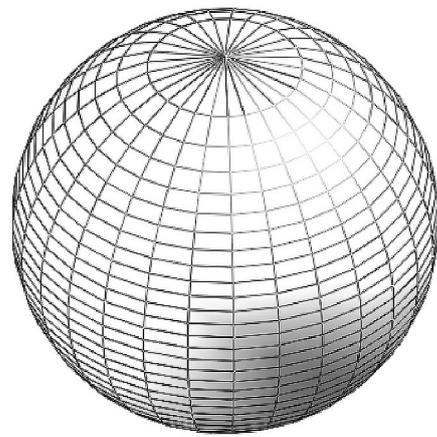


Рис. 12◊4. Эллипсоид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

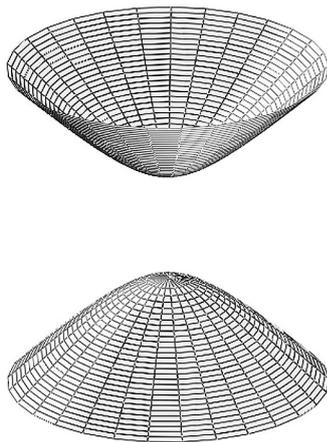


Рис. 12◊5. Гиперboloид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 - 1$.

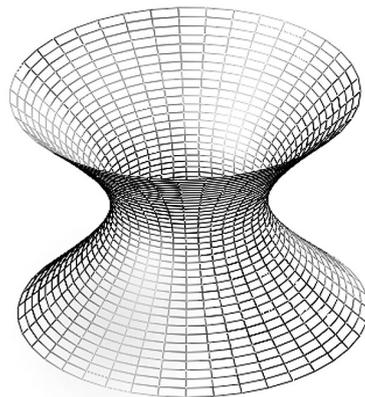
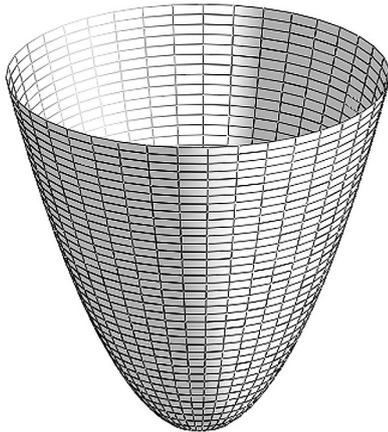
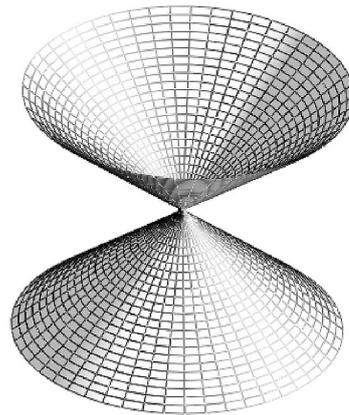


Рис. 12◊6. Гиперboloид $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1$.

два параболоида:

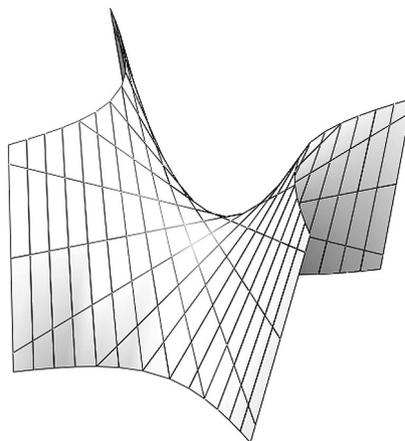
- *эллиптический параболоид* $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, изображение 0-планарной проективной квадрики сигнатуры (3, 1) в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой касается квадрики в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$ и больше нигде с ней не пересекается; эллиптический параболоид 0-планарен (см. рис. 12◊7)
- *гиперболический параболоид* $x_1^2 - x_2^2 = x_3$, изображение проективной квадрики Сегре сигнатуры (2, 2) в аффинной карте, бесконечно удалённая плоскость $x_0 = 0$ которой касается квадрики в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$, высекая из неё пару пересекающихся в точке касания прямых $x_1 = \pm x_2$; гиперболический параболоид 1-планарен и замечается двумя семействами прямых (см.рис. 12◊9)

Рис. 12◊7. Параболоид $x_1^2 + x_2^2 = x_3$.Рис. 12◊8. Конус $x_1^2 - x_2^2 = x_3$.

и два простых конуса над двумя различными гладкими вещественными проективными кониками:

- *двойная точка* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, конус над пустой коникой
- *эллиптический конус* $x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$, конус над кникой Веронезе (см. рис. 12◊8)

Итого, 14 различных непустых фигур.

Рис. 12◊9. Гиперболический параболоид $x_1^2 - x_2^2 = x_3$.

12.6. Линейные операторы на пространстве со скалярным произведением. Рассмотрим векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{k} , $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$, со скалярным произведением, которое обозначим через

$$(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u, w \mapsto (u, w), \quad (12-22)$$

и изоморфизмом корреляции $g : V \simeq V^*$, переводящим вектор $w \in V$ в ковектор

$$g(w) : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad v \mapsto (v, w).$$

Каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ сопоставим билинейную форму

$$\beta_f : V \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad \beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} (u, fw).$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.13. Проверьте, что матрица Грама B формы β_f выражается через матрицу F оператора f и матрицу Грама G скалярного произведения (12-22) по формуле $B = GF$, а оператор корреляции $\hat{\beta}_f : w \mapsto \beta_f(*, w)$ равен композиции $\hat{\beta}_f = gf$.

Поскольку корреляция g и матрица G обратимы, сопоставление $f \mapsto \beta_f$ устанавливает линейный изоморфизм между векторными пространствами линейных операторов $f : V \rightarrow V$ и билинейных форм $V \times V \rightarrow \mathbb{k}$: билинейная форма β с оператором корреляции $\hat{\beta} : V \simeq V^*$ и матрицей Грама B получается из единственного оператора $f = g^{-1}\hat{\beta} : V \rightarrow V$ с матрицей $F = G^{-1}B$. Если билинейная форма $\beta_f : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ симметрична, оператор $f : V \rightarrow V$ удовлетворяет при всех $u, w \in V$ равенствам $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$. Наоборот, если

$$\forall u, w \in V \quad (fu, w) = (u, fw), \quad (12-23)$$

то билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$ симметрична. Операторы $f : V \rightarrow V$, обладающие свойством (12-23), называются *автодуальными* или *самосопряжёнными* относительно скалярного произведения (12-22). Матрица F такого оператора и матрица Грама G скалярного произведения (12-22) связаны соотношением $F^t G = GF$.

ЛЕММА 12.4

Если автодуальный линейный оператор $f : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U (u, v) = 0\}$.

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, т. к. $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.14. Покажите, что собственные векторы с разными собственными значениями у автодуального оператора ортогональны друг другу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.3

Если характеристический многочлен автодуального линейного оператора $f : V \rightarrow V$ полностью раскладывается в поле \mathbb{k} на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f .

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что так при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V . Пусть $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в \mathbb{k} , у оператора F есть ненулевое собственное подпространство $V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V$. По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на V_λ^\perp тоже невырождено. По [лем. 12.4](#) оператор f переводит подпространство V_λ^\perp в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f раскладывается в произведение характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. По предположению леммы и в силу единственности разложения на множители в $\mathbb{k}[t]$, оба они полностью раскладываются на линейные множители в поле \mathbb{k} . По индуктивному предположению в подпространстве V_λ^\perp есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f . Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ , получаем нужный базис в V . \square

12.6.1. Автодуальные операторы на евклидовом пространстве. Если основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, а скалярное произведение на пространстве V евклидово, условия [предл. 12.3](#) выполняются для любого автодуального оператора.

ЛЕММА 12.5

Характеристический многочлен самосопряжённого оператора на евклидовом пространстве полностью раскладывается на линейные множители над полем \mathbb{R} .

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор f задаётся в ортонормальном базисе симметричной матрицей

$$F = F^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$ имеет неотрицательный дискриминант $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$ и вещественные корни. При $\dim V > 2$ по [лем. 7.1](#) на стр. 108 в V имеется одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится оператором f в себя. По [лем. 12.4](#) его ортогональное дополнение U^\perp также переходит в себя под действием f , а значит, $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_{U^\perp}}$. Первый характеристический многочлен полностью раскладывается на линейные множители над \mathbb{R} по уже доказанному, второй — по предположению индукции. \square

ТЕОРЕМА 12.5 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Любая квадратичная форма q на евклидовом пространстве V имеет в подходящем ортонормальном базисе пространства V диагональную матрицу Грама. Её диагональные элементы с точностью до перестановки не зависят от выбора базиса и равны собственным числам того единственного автодуального оператора $f : V \rightarrow V$, для которого $q(v) = (v, fv)$. Если все эти собственные числа различны, ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные.

Доказательство. По [предл. 12.3](#) в V есть ортонормальный базис из собственных векторов оператора f_q . Матрица Грама формы q в любом ортонормальном базисе совпадает с матрицей оператора f_q . В ортонормальном базисе из собственных векторов она диагональна, причём на её

диагонали стоят собственные числа оператора f_q , и каждое собственное число λ присутствует столько раз, какова кратность корня λ в характеристическом многочлене оператора f_q . Поэтому с точностью до перестановки диагональных элементов такая матрица не зависит от выбора нормального базиса. Если все диагональные элементы различны, каждое собственное подпространство оператора f_q одномерно, все они ортогональны друг другу по упр. 12.14, и нормальные базисные векторы с точностью до знака задаются как векторы единичной длины, порождающие эти подпространства. \square

12.6.2. Евклидовы квадрики. В евклидовом пространстве перечисленные в н° 12.5 классы аффинно конгруэнтных квадрик расщепляются дальше на классы евклидово конгруэнтных квадрик. Две квадрики называются *евклидово конгруэнтными*, если они переводятся одна в другую движением евклидова пространства. По теор. 12.5 любая квадратичная форма на евклидовом пространстве в подходящем ортонормальном базисе записывается в виде

$$q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_r x_r^2, \quad (12-24)$$

где $r = \text{rk } q$, а коэффициенты a_i не зависят от выбора ортонормального базиса, в котором форма q имеет вид (12-24), и являются таким образом инвариантами формы q относительно евклидовых изометрий. Они совпадают с собственными числами матрицы $G^{-1}Q$, где G и Q суть матрицы Грама евклидова скалярного произведения и квадратичной формы q в одном и том же произвольном базисе пространства V . Ортонормальный базис, в котором форма q приобретает вид (12-24), называется *нормальным базисом* формы q .

Если квадратика $X = V(f)$ гладкая центральная, то её уравнение в аффинной системе координат с началом в центре квадрики и таким базисом в V , который является нормальным для асимптотической квадратичной формы f_2 , имеет вид¹

$$a_1^2x_1^2 + \dots + a_p^2x_p^2 - b_1^2x_{p+1}^2 - \dots - b_m^2x_{p+m}^2 = \pm 1, \quad (12-25)$$

где $a_i, b_i > 0$, $p \geq m$, $p + m = n$, и при $p = m = n/2$ в правой части стоит +1. Такая квадратика получается из квадрики (12-16) растяжением вдоль её нормальных осей с коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_m$. Эти коэффициенты называются *вещественными* и *мнимыми полуосями* гладкой центральной квадрики. Две аффинно конгруэнтных гладких центральных квадрики евклидово конгруэнтны, если и только если они имеют одинаковые наборы вещественных и мнимых полуосей.

Если квадратика $X = Z(f)$ является параболоидом², и её проективное замыкание $Q = \bar{X}$ касается бесконечно удалённой гиперплоскости $H_\infty = \mathbb{P}(V)$ в точке c , обозначим через $L \subset \mathbb{P}(V)$ полярную точки c относительно *евклидова* поляритета на $\mathbb{P}(V)$, задаваемого евклидовой корреляцией $V \simeq V^*$. Подпространство L имеет коразмерность 2 в $\mathbb{P}(W)$. Полярная к нему относительно квадрики $Q = \bar{X} \subset \mathbb{P}(W)$ прямая ℓ называется *осью параболоида* X . Кроме бесконечно удалённой точки c , ось пересекает параболоид ещё одной точке $d = \ell \cap X$, которая лежит в аффинной части и называется *вершиной параболоида*. Поместим начало аффинной системы координат в вершину параболоида, направим n -тую координатную ось вдоль оси параболоида³, а в качестве первых $n-1$ координатных осей выберем нормальные оси ограничения $h = q|_{c^\perp}$ квадратичной формы q , задающей квадрнику Q , на евклидово ортогональное дополнение $c^\perp \subset V$ к вектору v

¹ См. н° 12.5.1 на стр. 220.

² См. н° 12.5.2 на стр. 221.

³ Т. е. вдоль вектора $c \in V$.

в пространстве V . В этой прямоугольной системе координат уравнение параболоида X принимает вид

$$a_1^2 x_1^2 + \dots + a_p^2 x_p^2 - b_1^2 x_{p+1}^2 - \dots - b_m^2 x_{p+m}^2 = x_n, \quad (12-26)$$

где слева стоит представление (12-24) для ограничения квадратичной формы h на пространство c^\perp , числа $a_i, b_i > 0$, $p \geq m$ и $p + m = n - 1$. Квадрика (12-26) получается растяжением квадрики (12-18) вдоль её нормальных осей с коэффициентами a_i, b_j . Как и в случае гладкой центральной квадрики, эти коэффициенты называются *полуосями* параболоида. Два аффинно конгруэнтных параболоида евклидово конгруэнтны тогда и только тогда, когда у них одинаковые наборы полуосей.

Полуосями конусов и цилиндров называют полуоси гладких квадрик, служащих их основаниями. Они также доставляют полную систему евклидовых инвариантов соответствующих аффинных квадрик.

§13. Дальнейшие вариации на темы квадратик

13.1. Квадрика Пюккера и прямые в \mathbb{P}^3 . Множество всех векторных подпространств размерности m в заданном векторном пространстве V называется *грассманианом* и обозначается $\text{Gr}(m, V)$. Для d -мерного координатного пространства $V = \mathbb{k}^d$ обозначение $\text{Gr}(m, \mathbb{k}^d)$ сокращается до $\text{Gr}(m, d)$. Например, двойственные друг другу проективные подпространства \mathbb{P}_n и \mathbb{P}_n^\times суть грассманианы $\text{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$ и $\text{Gr}(n, n+1) = \mathbb{P}_n^\times$. Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан $\text{Gr}(2, V) = \text{Gr}(2, 4)$ двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве $V \simeq \mathbb{k}^4$ или, что то же самое, множество всех прямых в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$.

13.1.1. Пюккеро вложение. Грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство¹ $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи *отображения Пюккера*

$$\mathbb{p} : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U, \quad (13-1)$$

переводящего m -мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами u_1, u_2, \dots, u_m , то с точностью до пропорциональности

$$\mathbb{p}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Переход к другому базису подпространства U , состоящему из векторов $w_i = \sum a_{ij} u_j$, заменяет грассманов моном $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ на пропорциональный моном²

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Образ пюккерова вложения состоит из всех однородных грассмановых многочленов m -той степени $\omega \in \Lambda^m V$, которые раскладываются в произведение m линейных множителей. Такие многочлены называются *разложимыми*. Множество всех разложимых грассмановых многочленов в $\Lambda^m V$ описывается системой однородных квадратичных *соотношений Пюккера*³. При $m = 2$ они выглядят особенно просто благодаря следующей кососимметричной версии теоремы о диагонализации квадратичной формы.

УПРАЖНЕНИЕ 13.1 (ТЕОРЕМА ДАРБУ). Убедитесь, что любой однородный грассманов многочлен второй степени над произвольным полем \mathbb{k} в подходящем базисе $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ пространства V принимает вид $\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 + \dots + \xi_{2r-1} \wedge \xi_{2r}$.

ЛЕММА 13.1

Грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ разложима в произведение двух линейных форм, если и только если $\omega \wedge \omega = 0$ в $\Lambda^4 V$.

Доказательство. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Пользуясь [упр. 13.1](#), запишем произвольную квадратичную форму $\omega \in \Lambda^2 V$ в надлежащем базисе e_1, e_2, \dots, e_d в виде $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если слагаемых больше одного, $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \dots \neq 0$. Поэтому такая форма ω не разложима. \square

¹Здесь и далее $\Lambda V = \bigoplus_{m=0}^d \Lambda^m V$ обозначает пространство *грассмановых многочленов* от векторов e_1, e_2, \dots, e_d какого-либо базиса в V , см. н° 5.6 на стр. 84.

²См. н° 5.6.1 на стр. 86.

³См., например, Предложение 2.4 на стр. 29 лекции

<http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-02.pdf>.

13.1.2. Плюккерова квадрика. Если $\dim V = 4$, то $\dim \Lambda^4 V = 1$ и условие разложимости из лем. 13.1 превращается в одно квадратное уравнение на форму $\omega \in \Lambda^2 V$. А именно, зададим билинейную форму \tilde{q} на $\Lambda^2 V$ так, чтобы для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ выполнялось равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (13-2)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V . Разложимые грассмановы многочлены $\omega \in \Lambda^2$ суть изотропные векторы этой формы. Они образуют в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ квадрику *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{ \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}. \quad (13-3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.2. Убедитесь, что форма \tilde{q} , задаваемая равенством (13-2), билинейна, симметрична и невырождена, а при выборе другого базиса в V она умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в базисе из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

Из упражнения вытекает, что в координатах x_{ij} относительно базиса из бивекторов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ условие разложимости бивектора $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0. \quad (13-4)$$

При этом плюккерovo вложение (13-1) переводит прямую (ω) , порождённую векторами u, w , строки координат которых в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 составляют 2×4 матрицу

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix},$$

в бивектор с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$, равными 2×2 минорам этой матрицы.

УПРАЖНЕНИЕ 13.3. Убедитесь в этом и выясните, существует ли комплексная 2×4 -матрица, шесть 2×2 -миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

ЛЕММА 13.2

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются, если и только если их плюккерovy образы ортогональны относительно квадратичной формы (13-2).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $\mathbb{p}(\ell_1) \wedge \mathbb{p}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. \square

СЛЕДСТВИЕ 13.1

Для любой точки $p = \mathbb{p}(\ell) \in P$ пересечение плюккеровой квадрики (13-3) с касательной плоскостью в точке p состоит из плюккерovy образов всех прямых, пересекающих ℓ :

$$P \cap T_p P = \{ \mathbb{p}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset \}.$$

13.1.3. Связки и пучки прямых в \mathbb{P}_3 . Множество прямых в \mathbb{P}_3 называется *связкой*, если его п्लюккеров образ является двумерной плоскостью, лежащей на квадратике Пюккера. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = \mathbb{P}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = P \cap T_{p_1}P \cap T_{p_2}P \cap T_{p_3}P$. По лем. 13.2 и сл. 13.1 соответствующая связка прямых состоит из всех таких прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в \mathbb{P}_3 . Три прямых в \mathbb{P}_3 попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на \mathbb{P}_3 :

α -плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

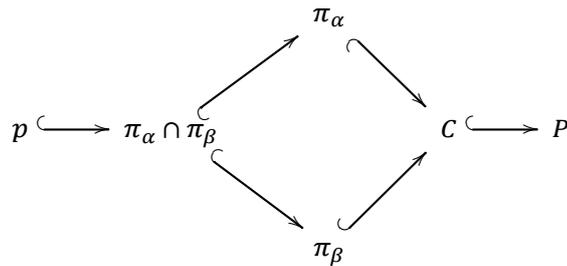
При этом любые две плоскости одного и того же типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\begin{aligned} \pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) &= \mathbb{P}(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ \pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) &= \mathbb{P}((O_1 O_2)), \end{aligned}$$

а две плоскости различных типов $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ не пересекаются при $O \notin \Pi$ и пересекаются по прямой при $O \in \Pi$. Последняя прямая является пюккеревым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$.

Упражнение 13.4. Покажите, что всякая прямая, лежащая на квадратике Пюккера, является пересечением α -плоскости с β -плоскостью, и тем самым, представляет собою пучок прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку.

13.1.4. Клеточное разбиение пюккеровой квадратки. Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_p P$ в четырёхмерном касательном пространстве $T_p P$ к квадратике Пюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадратка $C = P \cap T_p P$ представляет собою простой конус с вершиной p над неособой квадратикой $G = H \cap P$, изоморфной квадратике Сегре в \mathbb{P}_3 . Это приводит к следующей стратификации пюккеровой квадратки замкнутыми подмножествами:



Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, могут быть бирационально отождествлены с аффинными пространствами, в результате чего возникает разбиение пюккеровой квадратки P дизъюнктное объединение

$$\mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4,$$

где $A^0 = p$, $A^1 = (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p$, аффинные плоскости A^2 суть дополнения $\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta)$ и $\pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta)$. Пространство $A^3 = A^1 \times A^2$ это конус с выколотой вершиной p над дополнением $G \setminus (G \cap T_p G)$ до пары пересекающихся образующих на квадрике Сегре. Это дополнение отождествляется с A^2 проекцией из точки пересечения прямых на плоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 13.5. Покажите, что проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \setminus T_p Q$ и аффинным пространством $\Gamma \setminus T_p \Gamma \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

По этой же причине $P \setminus T_p P \simeq \mathbb{A}^4$.

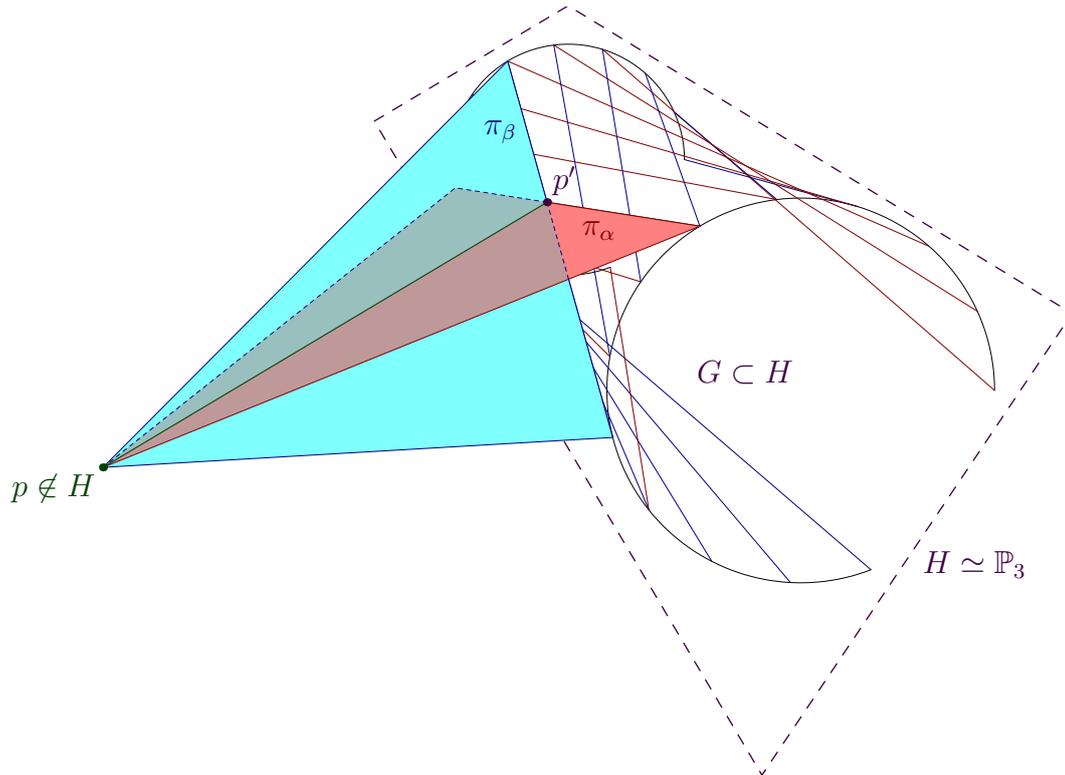


Рис. 13.1. Конус $C = P \cap T_p P$.

ПРИМЕР 13.1

Прикинем, сколько прямых пересекает четыре заданные попарно не пересекающиеся прямые $\ell_i \subset \mathbb{P}^3$, $1 \leq i \leq 4$. Искомое множество представляет собою пересечение квадрики Плюккера P и четырёх её касательных гиперплоскостей T_{p_i} в точках $p_i = \mathbb{P}(\ell_i) \in P$. При достаточно общем выборе точек $p_1, p_2 \in P$ пересечение $S(p_1, p_2) = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P$ является гладкой квадрикой Сегре в трёхмерном проективном пространстве $T_{p_1} P \cap T_{p_2} P$. Если передвинуть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в \mathbb{P}^3 так, чтобы они стали пересекаться, квадрика $S(p_1, p_2)$ вырождается в объединение α -плоскости $\pi_\alpha(p_{12})$ и β -плоскости $\pi_\beta(P_{12})$, где $p_{12} = \ell_1 \cap \ell_2 \in \mathbb{P}^3$, а $P_{12} \subset \mathbb{P}^3$ обозначает плоскость, порождённую пересекающимися прямыми ℓ_1, ℓ_2 . Две такие вырожденные квадрики, отвечающие двум парам пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, ℓ_4 , в общем случае трансверсально пересекаются по двум точкам: прямой $(p_{12} p_{34})$ и прямой $P_{12} \cap P_{34}$, причём эти точки лежат вне множеств особых точек обеих распавшихся квадрик. Поэтому можно ожидать, что при достаточно общем выборе прямых ℓ_i гладкие квадрики $S(p_1, p_2)$ и $S(p_2, p_3)$ тоже трансверсально

пересекаются по двум точкам, т. е. что при достаточно общем выборе четырёх заданных попарно скрещивающихся прямых имеется ровно две прямые, пересекающие все четыре заданных.

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. При помощи [предл. 11.9](#) на стр. 207 точно опишите множество прямых, пересекающих 4 данные попарно не пересекающиеся прямые в а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ в зависимости от расположения этих четырёх прямых. Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

13.1.5. Прямые в пространстве со скалярным произведением. Допустим, что на четырёхмерном пространстве V задана невырожденная квадратичная форма g . Тогда она индуцирует билинейную форму \tilde{g}_2 на пространстве $\Lambda^2 V$, значение которой на парах разложимых бивекторов равно взаимному определителю Грама соответствующих пар векторов:

$$\tilde{g}_2(u_1 \wedge w_1, u_2 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(u_1, w_1) & \tilde{g}(u_1, w_2) \\ \tilde{g}(u_2, w_1) & \tilde{g}(u_2, w_2) \end{pmatrix}. \quad (13-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.7. Убедитесь, что билинейная форма (13-5) симметрична и невырождена, и напишите её матрицу Грама в базисе $e_i \wedge e_j$, построенном по а) ортогональному б) гиперболическому базису e_1, e_2, e_3, e_4 формы g .

Из [лем. 11.1](#) на стр. 192 вытекает, что пересечение квадратки $G_2 = V(g_2) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ с квадратикой Плюккера P состоит из плюккеревых образов всех прямых $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, касающихся квадратки $G = V(g) \subset \mathbb{P}(V)$. Полярное преобразование $\bar{g} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3^\times$ относительно квадратки G задаёт на множестве прямых в \mathbb{P}_3 инволюцию Ходжа, которая переводит прямую $\ell = (uw)$ в полярную относительно квадратки G прямую $\ell^* = \bar{g}(u) \cap \bar{g}(w)$, где $\bar{g}(u), \bar{g}(w) \subset \mathbb{P}_3$ — плоскости, полярные точкам u, w . Инволюция Ходжа продолжается по линейности до инволютивного проективного автоморфизма $*$: $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, задаваемого таким линейным оператором

$$* : \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^2 V, \omega \mapsto \omega^*, \text{ что} \quad (13-6) \\ \forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V \quad \omega_1 \wedge \omega_2^* = \tilde{g}_2(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Этот оператор называется *звёздочкой Ходжа*. Согласно [п° 12.6](#) на стр. 226, плюккерово скалярное произведение (13-2) задаёт биекцию между квадратичными формами и самосопряжёнными операторами на $\Lambda^2 V$. Звёздочка Ходжа в этой биекции соответствует квадратичной форме g_2 из (13-5). Действительно, соотношение (13-6) как раз и утверждает, что

$$\tilde{g}_2(\omega_1, \omega_2) = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2^*) \quad (13-7)$$

Обратите внимание, что и плюккерово скалярное произведение на $\Lambda^2 V$, и оператор Ходжа зависят от выбора базиса $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в одномерном пространстве $\Lambda^4 V$, но при выборе другого базиса умножаются на одну и ту же константу, так что соотношение (13-7) имеет место при любом выборе базиса.

УПРАЖНЕНИЕ 13.8. Убедитесь, что звёздочка Ходжа задаёт на проективном пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2)$ нетождественную инволюцию, действующую на прямые $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_3$, порождённые векторами произвольного ортогонального базиса формы g в V , по правилу $(e_i e_j)^* = (e_k e_\ell)$, где $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

ПРИМЕР 13.2 (СЕГРЕ – ПЛЮККЕР – ВЕРОНЕЗЕ)

Рассмотрим четырёхмерное пространство $V = \text{End}(U)$ эндоморфизмов двумерного векторного пространства $U = \mathbb{k}^2$ и квадратичную форму $g = \det$ на нём. Изотропные векторы этой квадратичной формы образуют в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(U))$ квадрику Сегре $G = \{f : U \rightarrow U \mid \det f = 0\}$, которая замечается двумя семействами прямолинейных образующих¹ и бирационально изоморфна произведению $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*)$. Поляризация квадратичной формы \det задаёт на пространстве 2×2 матриц гиперболическое скалярное произведение

$$\widetilde{\det}(F_1, F_2) = \frac{1}{2} \text{tr } F_1 F_2^\vee, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (13-8)$$

это присоединённая матрица² Пусть операторы $f_1, f_2, f_1^*, f_2^* : U \rightarrow U$ образуют гиперболический базис формы \det в $V = \text{End } U$. Согласно [упр. 13.7](#) звёздочка Ходжа действует на составленные из них бивекторы по правилу:

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_1^* &\leftrightarrow f_2 \wedge f_2^*, \\ f_1 \wedge f_2 &\mapsto f_1 \wedge f_2 \quad f_1 \wedge f_2^* \mapsto -f_1 \wedge f_2^*, \\ f_1^* \wedge f_2^* &\mapsto f_1^* \wedge f_2^* \quad f_2 \wedge f_1^* \mapsto -f_2 \wedge f_1^*. \end{aligned}$$

Таким образом, звёздочка Ходжа является линейной инволюцией векторного пространства $\Lambda^2 V$, которое распадается в прямую сумму $\Lambda^2 V = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$ двух её трёхмерных собственных подпространств $\Lambda_\pm = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega^* = \pm \omega\}$, отвечающих собственным числам ± 1 и ортогональных друг другу относительно формы Плюккера. Проективизации этих собственных подпространств $\mathbb{P}(\Lambda_\pm)$ образуют в \mathbb{P}_5 пару дополнительных двумерных плоскостей, поточечно неподвижных относительно инволюции Ходжа и трансверсально пересекающих квадрику Плюккера P по двум гладким коникам, которые являются плюккеровыми образами двух семейств прямолинейных образующих квадрики Сегре $G \subset \mathbb{P}(V)$, ибо каждая лежащая на G прямая автополярна относительно G , и наоборот, любая G -автополярная прямая в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ с необходимостью лежит на квадрике Сегре. Состоящее из всех касательных к G прямых пересечение $P \cap \mathbb{P}(\Lambda^2 \det)$ является линейным соединением коник $P \cap \mathbb{P}(\Lambda_\pm)$. Отождествляя каждую из этих коник с коникой Веронезе, мы можем интерпретировать точки, лежащие в плоскостях $\mathbb{P}(\Lambda_+)$ и $\mathbb{P}(\Lambda_-)$, как неупорядоченные пары точек на двойственных прямых $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ так, что возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & & \mathbb{P}(S^2 U^*) = \mathbb{P}(\Lambda_+) & \\ \uparrow \pi_+ & & & \downarrow & \\ \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^\times & \xrightarrow[\sim]{\text{Сегре}} & G \subset \mathbb{P} \text{End}(U) & \xrightarrow{\text{Плюккер}} & \mathbb{P}(\Lambda^2 \text{End}(U)) = \mathbb{P}(\Lambda_+ \oplus \Lambda_-) \\ \downarrow \pi_- & & & \uparrow & \\ \mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & & \mathbb{P}(S^2 U) = \mathbb{P}(\Lambda_-), & \end{array}$$

нижняя и верхняя горизонтальные стрелки которой переводят пересекающиеся в точке $u \otimes \xi$ прямолинейные образующие $u \otimes \mathbb{P}_1^\times$ и $\mathbb{P}_1 \times \xi$ квадрики G , соответственно, в одномерные

¹См. н° 11.5.1 на стр. 206.

²Ср. с форм. (5-15) на стр. 80 из н° 5.4.2.

подпространства в $L^2 \text{End}(U)$, натянутые на грассмановы бивекторы

$$(u \otimes \xi_1) \wedge (u \otimes \xi_2) \quad \text{и} \quad (u_1 \otimes \xi) \wedge (u_2 \otimes \xi),$$

где u_1, u_2 и ξ_1, ξ_2 произвольные базисы в U и U^* .

УПРАЖНЕНИЕ 13.9. Убедитесь, что эти одномерные подпространства не зависят от выбора базисов в U и U^* и переводятся в себя звёздочкой Ходжа.

13.2. Пучки квадратик. Прямые в пространстве $\mathbb{P}(S^2V^*)$ квадратик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *пучками квадратик*. Такой пучок $(Q_0Q_1) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ однозначно задаётся любой парой различных лежащих в нём квадратик $Q_0 = V(q_0)$, $Q_1 = V(q_1)$ и состоит из всех квадратик вида

$$Q_\lambda = V(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda_0 q_0(v) + \lambda_1 q_1(v) = 0\}, \quad (13-9)$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$.

Пересечение базисных квадратик $B = Q_0 \cap Q_1$ называется *базисным множеством* пучка. Поскольку каждая квадратика из пучка (13-9) проходит через B , базисное множество не зависит от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 на прямой (Q_0Q_1) . Многочлен

$$\chi_{(q_0q_1)}(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_0 q_0 + t_1 q_1) \in \mathbb{k}[t_0, t_1] \quad (13-10)$$

называется *характеристическим многочленом* пучка (13-9). Это однородный многочлен степени $(n+1)$ от $t = (t_0 : t_1)$. В отличие от базисного множества, он *зависит* от выбора базисных квадратик Q_0, Q_1 , и при переходе к другим двум базисным квадратикам в том же самом пучке переменные $(t_0 : t_1)$ подвергаются обратимому линейному преобразованию. Поэтому алгебраическим инвариантом пучка является не сам многочлен (13-10), а только его класс по модулю обратимой линейной замены переменных. Пучок квадратик называется *невыврожденным*, если в нём есть хоть одна гладкая квадратика. Это означает, что характеристический многочлен (13-10) отличен от нуля хотя бы в одной точке на \mathbb{P}_1 , и в частности, является ненулевым многочленом. Поэтому в невырожденном пучке квадратик на \mathbb{P}_n содержится не более $(n+1)$ особых квадратик, причём вершинные подпространства никаких двух из них не пересекаются, поскольку вектор, лежащий в ядре сразу двух корреляций \hat{q}_0, \hat{q}_1 , лежал бы и в ядре любой их линейной комбинации $\lambda_0 \hat{q}_0 + \lambda_1 \hat{q}_1$, так что все квадратика пучка оказались бы вырождены.

13.2.1. Спектр невырожденного пучка. Множество вырожденных квадратик в невырожденном пучке (13-9) называется *спектром* этого пучка. Квадратичные формы $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$, задающие квадратика из спектра, биективно соответствуют корням $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ характеристического многочлена (13-10). Под *кратностью* вырожденной квадратика, отвечающей корню λ многочлена (13-10), мы всегда понимаем кратность $\text{mult}(\lambda)$ этого корня, т. е. максимальное $n \in \mathbb{N}$, такое что многочлен (13-10) делится на $\det^n(\lambda, t) = (t_1 \lambda_0 - t_0 \lambda_1)^n$ в кольце многочленов $\mathbb{k}[t_0, t_1]$. Удобно также считать, что все гладкие квадратика пучка имеют в нём кратность нуль. Над алгебраически замкнутым полем спектр любого невырожденного пучка квадратик на \mathbb{P}_n состоит ровно из $(n+1)$ квадратик с учётом их кратностей. Рассматриваемый как набор из $n+1$ неупорядоченных точек на \mathbb{P}_1 с точностью до дробно линейного автоморфизма \mathbb{P}_1 , он не зависит от выбора базиса в пучке.

ЛЕММА 13.3

В невырожденном пучке квадратик кратность $\text{mult} S$ каждой особой квадратика S строго больше размерности $\dim \text{Sing } S$ пространства её особых точек.

Доказательство. Пусть квадрика $G \subset \mathbb{P}_n$ неособа, а пространство особых точек $\text{Sing } S$ квадрики $S \subset \mathbb{P}_n$ имеет размерность $\dim \text{Sing } S = k$. Это означает, что задающая квадрику S квадратичная форма $s \in S^2 V^*$ имеет $(k + 1)$ -мерное ядро и $\text{rk } s = n - k$, т. е. все миноры порядка $> (n - k)$ в её матрице Грама нулевые. По формуле для определителя пучка матриц из прим. 5.5 на стр. 88 характеристический многочлен пучка (SG)

$$\det(t_0 s + t_1 g) = \sum_{m=0}^{n+1} t_0^m t_1^{n+1-m} \cdot \sum_{\#I=\#J=m} g_{IJ} s_{ij} \tag{13-11}$$

делится на t_0^{k+1} . Поэтому кратность задающей S точки $t = (0 : 1) \in \mathbb{P}_1$ не менее $k + 1$. \square

13.2.2. Пример: невырожденные пучки коник. Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} невырожденный пучок коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ может содержать 1, 2 или 3 различных особых коники, а его базисное множество конечно и может состоять из 1, 2, 3 или 4 различных точек. Если в пучке есть двойная прямая, то все его базисные точки лежат на этой прямой. Если в пучке есть распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, то все базисные точки такого пучка лежат на $\ell_1 \cup \ell_2$, причём на каждой из прямых ℓ_1, ℓ_2 имеется хотя бы одна базисная точка.

Если базисное множество пучка состоит из единственной точки p , особой коникой в нём может быть лишь двойная прямая, касающаяся любой гладкой коники пучка в точке p . Наоборот, любая гладкая коника C и касающаяся её в произвольной точке $p \in C$ двойная прямая ℓ задают регулярный пучок коник с единственной базисной точкой p , и единственной особой коникой — двойной прямой ℓ . Все гладкие коники этого пучка пересекаются друг с другом по единственной точке p и имеют в ней общую касательную см. рис. 13◊2.

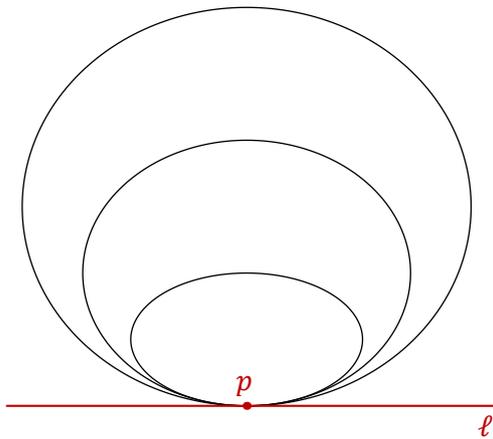


Рис. 13◊2. Пучок с одной базисной точкой ($a = b = c = d = p$).

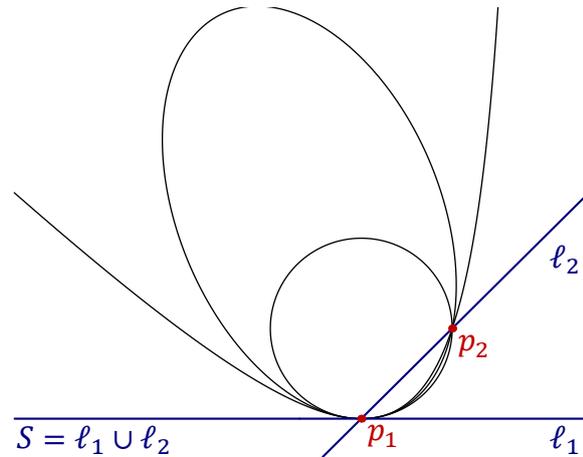


Рис. 13◊3. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b = c, p_2 = d$ и одной вырожденной коникой S .

Если базисное множество пучка состоит из двух точек p_1, p_2 , вырожденными кониками в нём могут быть двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ или такая распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$, что $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$ и либо обе точки p_1, p_2 отличны от особой точки $\ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 13◊4, либо $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2$, а $p_2 \neq \ell_1 \cap \ell_2$, как на рис. 13◊3. В последнем случае распавшаяся коника $\ell_1 \cap \ell_2$ является единственной особой коникой в пучке, а каждая гладкая коника пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 и проходит через точку p_2 , см. рис. 13◊3. В частности, любые две гладкие коники в таком пучке пересекаются ровно по двум точкам p_1, p_2 и имеют в точке p_1 общую касательную.

Двойная прямая $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ с $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$, $p_2 \in \ell_2 \setminus \ell_1$ могут появиться в пучке с двумя базисными точками p_1, p_2 только одновременно, ибо множество всех коник на \mathbb{P}^2 , которые касаются двух заданных прямых ℓ_1, ℓ_2 в двух заданных точках $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2$, отличных от $\ell_1 \cap \ell_2$, автоматически является пучком.

УПРАЖНЕНИЕ 13.10. Докажите это и убедитесь, что такой пучок содержит ровно две вырожденные коники: двойную прямую $\ell = (p_1 p_2)$ и распавшуюся конику $\ell_1 \cup \ell_2$.

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливаются по двойной прямой ℓ и любой гладкой конике C из пучка как касательные к C в двух точках пересечения $C \cap \ell$.

Если базисное множество пучка коник состоит из трёх точек p_1, p_2, p_3 , то они не коллинеарны¹. В частности, такой пучок не содержит двойных прямых. Кроме того, ни одна из точек p_i не может быть особой одновременно для двух распавшихся коник из пучка: иначе все коники пучка были бы особыми в этой точке. Распавшаяся коника $\ell_1 \cup \ell_2$ в таком пучке проходит через базисные точки либо так, что $p_1 = \ell_1 \cap \ell_2, p_2 \in \ell_1 \setminus \ell_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$, либо так, что $p_1 \in \ell_1 \setminus \ell_2$, а $p_2, p_3 \in \ell_2 \setminus \ell_1$. На рис. 13◊5 первое отвечает прямым ℓ'_1, ℓ'_2 , второе — прямым ℓ''_1, ℓ''_2 .

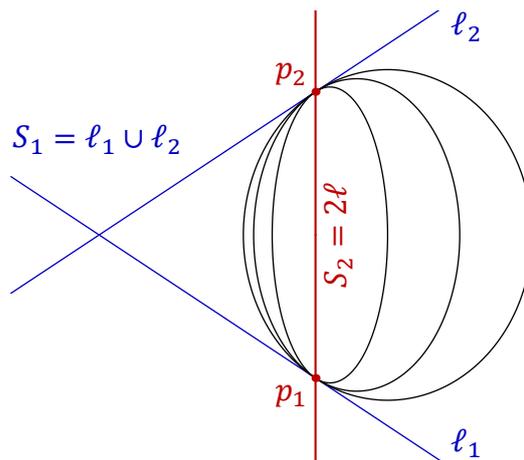


Рис. 13◊4. Пучок с двумя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

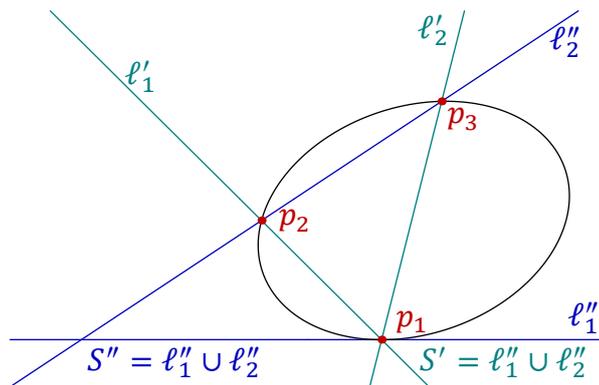


Рис. 13◊5. Пучок с тремя базисными точками $p_1 = a = b, p_2 = c, p_3 = d$ и двумя вырожденными кониками S_1, S_2 .

Во втором случае любая гладкая коника C из пучка касается прямой ℓ_1 в точке p_1 . В первом случае все гладкие коники пучка имеют в точке p_1 общую касательную, поскольку проходящая через p_1 прямая ℓ , касающаяся фиксированной гладкой коники C из пучка в точке $p_1 \in C$, соприкасается в точке p_1 с каждой коникой пучка, порождённого коникой C и распавшейся коникой $\ell''_1 \cup \ell''_2$, которая тоже касается прямой ℓ в точке $p_1 = \ell''_1 \cap \ell''_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.11. Убедитесь в этом и покажите, что множество всех коник $C \subset \mathbb{P}^2$, касающихся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$ и проходящих через две другие различные

¹Иначе содержащая базисные точки прямая пересекала бы любую гладкую конику пучка по трём точкам.

заданные точки $a, b \notin \ell$, составляют пучок, содержащий ровно две вырожденные коники: $(ab) \cup \ell$ и $(pa) \cup (pb)$.

Пучок коник, спектр которого состоит из трёх разных точек, называется *простым*. По лем. 13.3 все точки спектра простого пучка имеют кратность 1, и по предыдущему базисное множество такого пучка состоит из четырёх различных точек a, b, c, d , никакие 3 из которых не коллинеарны.

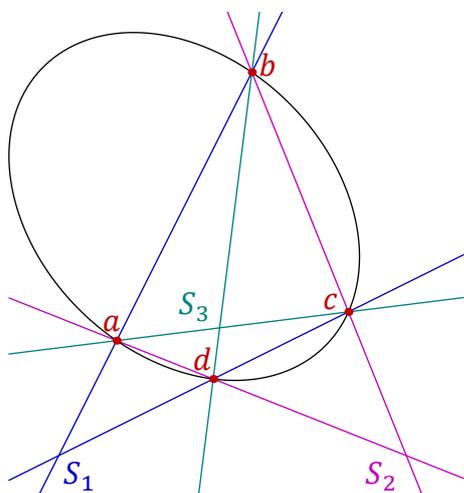


Рис. 13◊6. Три особые коники простого пучка с базисными точками a, b, c, d .

Упражнение 13.12. Покажите, что множество всех коник, проходящих через 4 различные точки a, b, c, d , никакие 3 из которых не коллинеарны, представляет собою простой пучок, три особые коники которого суть пары противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$, как на рис. 13◊6.

Таким образом, простой пучок коник однозначно определяется четырьмя своими базисными точками a, b, c, d , и в однородных координатах $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ на \mathbb{P}_2 уравнения его коник имеют вид

$$\frac{\det(x, a, b) \cdot \det(x, c, d)}{\det(x, a, d) \cdot \det(x, b, c)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

где $\lambda = (\lambda_0 : \lambda_1)$ пробегает \mathbb{P}_1 . Все предыдущие примеры являются вырождениями простого пучка и получаются из него, когда некоторые из базисных точек слипаются друг с другом. А именно, пучок на рис. 13◊5 воз-

никает при $a, b \rightarrow p_1, c = p_2, d = p_3$, пучок на рис. 13◊4 — когда $a, b \rightarrow p_1, c, d \rightarrow p_2$, пучок на рис. 13◊3 — если $a, b, c \rightarrow p_1, d = p_2$, а на рис. 13◊2 все четыре базисные точки схлопываются в одну. К какому из перечисленных типов принадлежит заданный пучок коник (CD) , геометрически определяется взаимным расположением в пространстве коник $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ прямой $L = (CD)$ и кубической гиперповерхности особых коник $\Sigma = \{q \in \mathbb{P}_5 \mid \det q = 0\}$. В случае простого пучка прямая L трансверсально пересекает эту гиперповерхность в трёх её гладких точках. Прямая L , касающаяся Σ в гладкой точке и трансверсально пересекающая в другой гладкой точке, задаёт такой пучок, как на рис. 13◊5, причём точке касания L с Σ отвечает распавшаяся коника с особенностью в базисной точке пучка. Прямая L , проходящая через особую точку гиперповерхности Σ и трансверсально пересекающая с Σ в ещё одной гладкой точке, задаёт пучок, показанный на рис. 13◊4, и в нём особой точке пересечения отвечает двойная прямая. Прямая L которая пересекает гиперповерхность Σ с кратностью 3 в единственной гладкой точке, задаёт пучок с рис. 13◊3. А максимально вырожденный из невырожденных пучков, представленный на рис. 13◊2, отвечает прямой L , которая пересекает гиперповерхность Σ с кратностью 3 в единственной точке, которая к тому же ещё и особа.

Что такое простые и особые точки проективной гиперповерхности, и что такое кратность пересечения, объясняется ниже.

13.2.3. Касательное пространство к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{P}_n$, заданную однородным многочленом f степени d , и не лежащую на ней прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_n$, проходящую через точку $a \in V(f)$. Ограничение многочлена f на прямую (ab) является ненулевым однородным многочленом степени d

$$f_{ab}(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda a + \mu b)$$

от однородной координаты $(\lambda : \mu)$ на прямой (ab) . Точка $a = (1 : 0)$ является его корнем. Кратность этого корня называется *кратностью пересечения* прямой (ab) с гиперповерхностью $V(f)$ в точке a . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любая прямая либо лежит на гиперповерхности $V(f)$, либо пересекает её ровно по d точкам, учитываемым с кратностями, равными кратностям пересечения прямой и гиперповерхности в этих точках.

Прямая (ab) называется *касательной* к гиперповерхности $V(f)$ в точке a , если она лежит на этой гиперповерхности или пересекает её в точке a с кратностью ≥ 2 . Объединение всех прямых, касающихся гиперповерхности $V(f)$ в точке $a \in V(f)$, называется *касательным пространством* к гиперповерхности f в точке a и обозначается $T_a V(f)$.

Минимальная из кратностей пересечений гиперповерхности $V(f)$ со всевозможными проходящими через точку $a \in V(f)$ прямыми называется *кратностью точки a* на гиперповерхности $V(f)$. Если она равна единице, точка a называется *гладкой*, если больше единицы — *особой*. Таким образом, точка $a \in V(f)$ особа, если и только если $T_a V(f) = \mathbb{P}_n$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.13. Покажите, что точка $a \in V(f)$ особа тогда и только тогда, когда все частные производные от многочлена f зануляются в точке a , и что касательное пространство $T_a V(f)$ в гладкой точке a является проективным подпространством коразмерности 1 и задаётся однородным линейным уравнением $\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot x_i = 0$.

13.2.4. Гиперповерхность особых квадратик. Множество всех особых квадратик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образует в пространстве квадратик $\mathbb{P}(S^2 V^*)$ алгебраическую гиперповерхности степени $(n + 1)$

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2 V^* \mid \det(q) = 0\}. \quad (13-12)$$

ЛЕММА 13.4

Особая квадратика $S \in \Sigma$ является гладкой точкой гиперповерхности особых квадратик Σ тогда и только тогда, когда сама квадратика $S \subset \mathbb{P}(V)$ имеет единственную особую точку, и в этом случае касательное пространство $T_S \Sigma \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$ состоит из всех квадратик $Q \subset \mathbb{P}(V)$, проходящих через особую точку квадратика S .

Доказательство. Ограничение многочлена \det на прямую $(SQ) \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$, где точка $S \in \Sigma$ отвечает особой квадратике $S = V(s) \subset \mathbb{P}(V)$, а точка $Q \in \mathbb{P}(S^2 V^*)$ отвечает произвольной квадратике $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, задаётся в аффинной окрестности точки S на прямой (SQ) уравнением¹

$$0 = \det(s + tq) = \det(s) + t \cdot \sum_{ij} q_{ij} s_{ij}^\vee + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

где s_{ij}^\vee означает алгебраическое дополнение к (ij) -тому элементу матрицы s . Квадратика S отвечает корню $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда , когда

$$\sum_{ij} q_{ij} s_{ij}^\vee = 0. \quad (13-13)$$

Это линейное уравнение на q нетривиально, если и только если в матрице s имеется хоть один ненулевой минор порядка $\dim V - 1$, т. е. когда $\dim \ker s = 1$. Поскольку² $s \cdot s^\vee = s^\vee \cdot s = \det(s) \cdot E = 0$, каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы $s^\vee = (s_{ij}^\vee)$ лежит в

¹См. формулу (13-11) на стр. 237.

²Ср. с правилом Крамера для отыскания ненулевого решения системы однородных линейных уравнений из предл. 5.5.

ядре матрицы s . Поэтому $\text{rk } s^\vee = 1$, и все строки и столбцы симметричной матрицы s^\vee пропорциональны координатам особой точки

$$p = (p_0 : p_1 : \dots : p_n) = (s_{i0}^\vee : s_{i1}^\vee : \dots : s_{in}^\vee) = (s_{0j}^\vee : s_{1j}^\vee : \dots : s_{nj}^\vee)$$

квадрики S . Условие касания (13-13) превращается в равенство $\sum_{ij} q_{ij} p_i p_j = q(p) = 0$, как раз и означающее, что квадратика Q проходит через особую точку p квадратика S . \square

Следствие 13.2

Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ касается гиперповерхности особых квадратик Σ в точке $Q \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$, и лежит на Σ , если и только если $\text{Sing } P \cap \text{Sing } Q \neq \emptyset$. \square

Пример 13.3

При $n = 2$ особыми точками гиперповерхности особых коник $\Sigma \subset \mathbb{P}_5$ являются двойные прямые, а распавшиеся коники суть гладкие точки гиперповерхности Σ . Если пучок коник (QS) касается Σ в гладкой точке $S = \ell_1 \cup \ell_2$, то он либо больше нигде не пересекает Σ , и в этом случае кратность пересечения Σ с L в S равна 3, либо пересекает Σ с кратностью 1 ещё ровно в одной, автоматически гладкой точке. Эти случаи реализуются пучками, представленными на рис. 13◊3 и рис. 13◊5. Для пучка (QS) , проходящего через особую точку $S = 2\ell$ гиперповерхности Σ , имеется ровно та же альтернатива: если кратность пересечения Σ с L в S равна 3, то он больше нигде не пересекает Σ и выгладит как на рис. 13◊2, или же он имеет с Σ ещё ровно одну гладкую точку кратности 1, как на рис. 13◊4. Все остальные пучки просты, т. е. пересекаются с Σ ровно по трём точкам с кратностью 1 и выгладят как на рис. 13◊6.

13.2.5. Регулярные пучки. Невырожденный пучок квадратик (Q_0Q_1) на \mathbb{P}_n называется *регулярным*, если кратность каждой точки его спектра ровно на единицу больше размерности пространства особых точек отвечающей этой точке особой квадратика, т. е. когда

$$\dim \text{Sing}(Q_\lambda) = \text{mult}(\lambda) - 1 \quad \text{для всех } \lambda = (\lambda_0 : \lambda_1) \in \mathbb{P}_1.$$

Это означает, что ранг матрицы Грама $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1$ в каждой точке $\lambda \in \mathbb{P}_1$ падает в точности на кратность корня $t = \lambda$ характеристического многочлена $\chi_{q_0, q_1}(t_0, t_1) = \det(t_0 q_0 + t_1 q_1)$. Из всех рассмотренных в н° 13.2.2 невырожденных пучков коник регулярными являются только пучки, представленные на рис. 13◊6 и рис. 13◊4.

Теорема 13.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} для любого регулярного пучка квадратик в $\mathbb{P}(V)$ найдётся такой базис пространства V , в котором матрицы Грама всех квадратик из пучка одновременно диагональны.

Доказательство. Пусть пучок порождается квадратиками $V(g)$ и $V(q)$, где форма g неособа. Сопоставим форме q автодуальный относительно скалярного произведения \tilde{g} на V линейный оператор¹ $f = -\hat{g}^{-1}\hat{q} : V \rightarrow V$, однозначно задающийся тем, что $\tilde{g}(u, fw) = -\tilde{q}(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Поскольку матрица F оператора f выражается через матрицы Грама G, Q квадратичных форм g, q по формуле $F = -G^{-1}Q$, характеристический многочлен оператора f

$$\chi_f(t) = \det(tE - F) = \det(tE + G^{-1}Q) = \det G^{-1} \det(tG + Q) = \chi_{(gq)}(t, 1) \cdot \det G^{-1} \quad (13-14)$$

¹Это сопоставление отличается знаком от использовавшегося в н° 12.6 на стр. 226.

с точностью до ненулевого постоянного множителя совпадает с ограничением характеристического многочлена пучка квадратик¹ на аффинную окрестность квадратичной формы q , для которой квадратичная форма g является бесконечностью. Таким образом, собственные числа оператора f совпадают с теми значениями $t = \lambda$, для которых квадратичная форма $g + \lambda q$ вырождена. А так как ранг матрицы Грама $\lambda G + Q$ равен рангу матрицы $\lambda E - F = G^{-1}(\lambda G + Q)$, размерность собственного подпространства $V_\lambda = \ker(\lambda E - F)$ совпадает с размерностью ядра квадратичной формы $\lambda G + Q$, которая по условию теоремы в точности равна кратности корня $t = \lambda$. Поэтому сумма размерностей всех собственных подпространств оператора f равна $\dim V$. Так как по упр. 12.14 на стр. 226 все собственные подпространства самосопряжённого оператора ортогональны друг другу относительно формы g , пространство V является g -ортогональной прямой суммой собственных подпространств V_λ оператора F . Выбирая в каждом подпространстве V_λ ортогональный базис квадратичной формы G , мы получаем в V базис, где обе формы g и q имеют диагональные матрицы Грама. Но тогда и все формы $\lambda g + \mu q$ будут диагональны в этом базисе. \square

ТЕОРЕМА 13.2

Два регулярных пучка квадратик в \mathbb{P}_n над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} переводятся один в другой линейным проективным автоморфизмом² \mathbb{P}_n , если и только если их спектры, понимаемые как неупорядоченные множества из n не обязательно различных точек на \mathbb{P}_1 , переводятся друг в друга дробно линейным автоморфизмом \mathbb{P}_1 .

Доказательство. Выберем в первом пучке гладкую квадратичку $V(g')$ и рассмотрим в V базис e' , в котором все квадратички первого пучка имеют диагональные матрицы Грама, причём нормируем его так, чтобы матрица Грама формы g' стала единичной E . Рассмотрим любую отличную от g' форму q' из первого пучка и обозначим через Q' её матрицу Грама в базисе e' . В доказательстве предыдущей теор. 13.1 мы видели, что диагональные элементы матрицы Q' являются корнями многочлена $\det(tE - Q')$, т. е. составляют в точности спектр первого пучка. Поскольку он совпадает со спектром второго пучка, во втором пучке квадратичных форм имеется базис из таких форм g'' , q'' , что корни многочлена $\chi_{g''q''}(t, 1)$ совпадают с корнями многочлена $\det(tE - Q')$. Из этого вытекает, что форма g'' невырождена, и в пространстве V существует базис e'' , в котором матрица Грама формы g'' единичная, а форма q'' имеет диагональную матрицу Q'' с диагональными элементами, равными корням многочлена $\det(tE - Q')$. Таким образом, матрица Q'' в базисе e'' совпадает с матрицей Q' в базисе e' . Проективный изоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, переводящий базис e' в базис e'' , преобразует базисные квадратичные формы g' , q' первого пучка в базисные квадратичные формы g'' , q'' второго. Следовательно, он преобразует каждую форму $\lambda g' + \mu q'$ первого пучка в форму $\lambda g'' + \mu q''$ второго. \square

ПРИМЕР 13.4 (ПРОСТЫЕ ПУЧКИ)

Пучок квадратик на \mathbb{P}_n называется *простым*, если его спектр состоит из $(n + 1)$ различных точек на \mathbb{P}_1 . Таким образом, каждая особая квадратичка простого пучка имеет ровно одну особую точку и единичную кратность в спектре. В частности, каждый простой пучок регулярен, и все квадратички в нём одновременно диагонализуются в некотором базисе. Два простых пучка переводятся

¹См. формулу (13-10) на стр. 236.

²Т. е. существует такой линейный проективный автоморфизм \mathbb{P}_n , который биективно отображает квадратички одного пучка на квадратички второго.

один в другой проективным преобразованием тогда и только тогда, когда $n + 1$ точек на \mathbb{P}_1 , отвечающих особым квадрикам первого пучка, переводятся дробно линейным автоморфизмом \mathbb{P}_1 в $n + 1$ точек, отвечающих особым квадрикам второго.

ТЕОРЕМА 13.3

Пучок квадрик (PQ) над алгебраически замкнутым полем прост, если и только если квадрики P, Q пересекаются трансверсально, т. е. $\text{codim } T_a P \cap T_a Q = 2$ в каждой точке $a \in P \cap Q$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве квадрик $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ гиперповерхность особых квадрик¹ $\Sigma = V(\det) \subset \mathbb{P}_N$. Прямая $(PQ) \subset \mathbb{P}_N$ пересекает гиперповерхность Σ меньше, чем по $n + 1$ точкам, если и только если она касается Σ в одной из точек $S \in (PQ) \cap \Sigma$. С другой стороны, нетрансверсальность пересечения каких-либо квадрик P, Q в некоторой точке $a \in P \cap Q$ означает, что любые две квадрики пучка (PQ) пересекаются в точке a не трансверсально. В самом деле, если $P = V(p), Q = V(q)$, то $T_a P \cap T_a Q = \mathbb{P}(\ker \hat{p}(a) \cap \ker \hat{q}(a))$, и условие $\text{codim}(\ker \hat{p}(a) \cap \ker \hat{q}(a)) \geq 1$ равносильно пропорциональности ковекторов $\hat{p}(a)$ и $\hat{q}(a)$, и тогда все ковекторы $\hat{h}(a)$ с $\hat{h} = \lambda \hat{p} + \mu \hat{q}$ пропорциональны друг другу. В частности, в этом случае пучок содержит квадрику $S = V(s)$ с $\hat{s}(a) = \lambda \hat{p}(a) + \mu \hat{q}(a) = 0$, т. е. $s \in \text{Sing } S$. Тогда $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$ и прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S по сл. 13.2, а значит, пучок не прост. Наоборот, если прямая (PQ) касается гиперповерхности Σ в точке S , то $P \cap \text{Sing } S \neq \emptyset$ и пересечение $P \cap S$ не трансверсально во всех точках из $P \cap \text{Sing } S$. Но тогда и пересечение $P \cap Q$ тоже не трансверсально в этих же точках. \square

13.3. Евклидовы коники. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек двумерного комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, вложенного в качестве стандартной аффинной карты $U_0 = e_0 + V_{\mathbb{C}}$ в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Бесконечно удалённую прямую $x_0 = 0$ этой карты обозначим через ℓ_{∞} и будем называть *бесконечностью*. Она естественно отождествляется с проективной прямой $\mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$, и её точки являются *направлениями аффинных прямых*, лежащих в карте U_0 , в том смысле, что проходящая через точку $p \in U_0$ вдоль вектора $v \in V_{\mathbb{C}}$ аффинная прямая $\{p + tv \mid t \in \mathbb{C}\}$ является видимой в карте U_0 аффинной частью проективной прямой $(pv) \subset \mathbb{P}_2$, где $v \in V$ рассматривается как точка бесконечно удалённой прямой $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$.

Евклидово скалярное произведение на V , продолженное по \mathbb{C} -линейности до комплексной билинейной формы $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, задаёт на $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$ гладкую квадрику $x_1^2 + x_2^2 = 0$, которая называется *изотропной квадрикой* или *абсолютом* и состоит из двух различных комплексно сопряжённых невещественных точек

$$\iota_+ = (1 : -i) \quad \text{и} \quad \iota_- = (1 : i), \quad (13-15)$$

называемых *изотропными направлениями*². Сопоставление направлению v перпендикулярного направления v^{\perp} , и сопоставление точке $v \in \ell_{\infty}$ точки $w \in \ell_{\infty}$ с $[u, w, \iota_+, \iota_-] = -1$ задают на прямой ℓ_{∞} одну и ту же инволюцию с неподвижными точками ι_{\pm} . Эта инволюция называется

¹См. формулу (13-12) на стр. 240.

²Здесь и далее слово *направление* используется как синоним словосочетания «ненулевой вектор из пространства $V_{\mathbb{C}}$, рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые комплексные константы» и означает точку на прямой $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$.

перпендикулярностью или евклидовым сопряжением. Таким образом, равенство $(u, w) = 0$ в V_C равносильно гармоничности направлений $u, w \in \ell_\infty$ изотропным направлениям (13-15).

Упражнение 13.14. Покажите, что «евклидов угол¹» между двумя различными неизотропными направлениями $u, w \in \ell_\infty$ выражается через их двойное отношение с изотропными направлениями ι_\pm по формуле $\angle(u, w) = \pm \frac{1}{2i} \ln[u, w, \iota_+, \iota_-]$.

На комплексной проективной плоскости \mathbb{P}_2 действует \mathbb{C} -антилинейная инволюция комплексного сопряжения $(x_0 : x_1 : x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2)$. Она переводит прямые в прямые, а коники — в коники, и сохраняет аффинную карту $U_0 \subset \mathbb{P}_2$, действуя на ней комплексно полуаффинными² вещественно аффинными преобразованиями. Точки, прямые и коники, которые переводятся комплексным сопряжением в себя, называются *вещественными*. Например, бесконечно удалённая прямая и изотропная коника на ней вещественны. Обратите внимание, что вещественная фигура запросто может не иметь ни одной вещественной точки.

Упражнение 13.15. Покажите, что вещественность прямой или коники на \mathbb{P}_2 означает, что их можно задать уравнением с вещественными коэффициентами.

По классификации из прим. 12.4 на стр. 223, гладкая вещественная коника называется *параболой*, *гиперболой* или *эллипсом*, когда она, соответственно, касается прямой ℓ_∞ или пересекает её по двум вещественным или двум не вещественным комплексно сопряжённым точкам. Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если обе прямые $(\iota_\pm f)$ касаются коники C . Поляры фокусов относительно коники C называются *директрисами* этой коники.

Упражнение 13.16. Покажите, что две прямые на \mathbb{P}_2 сопряжены³ относительно гладкой коникой тогда и только тогда, когда они гармоничны в порождённом ими пучке прямых⁴ двум прямым, касающимся этой коники.

13.3.1. Эллипсы и гиперболы называются *центральной кониками*. Полюс z_* прямой ℓ_∞ относительно такой коники C лежит в \mathbb{R}^2 и является центром симметрии аффинной части коники, т. к. для любой проходящей через z_* прямой (ab) , пересекающей конику C в точках a, b , а прямую ℓ_∞ в точке d , двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$ по предл. 11.2 на стр. 194, откуда z_* является серединой отрезка $[a, b]$. Полярная бесконечности точка z_* называется *центром*, а проходящие через неё прямые — *диаметрами* коники C .

Упражнение 13.17. Покажите, что любой диаметр гладкой центральной коники делит пополам все хорды, параллельные⁵ сопряжённому диаметру.

Центральная коника имеет 4 фокуса, которые принято нумеровать так, чтобы комплексное сопряжение переставляло прямые $(\iota_+ f_1) \leftrightarrow (\iota_- f_1)$ и прямые $(\iota_+ f_2) \leftrightarrow (\iota_- f_2)$. Таким образом, фокусы f_1, f_2 оказываются вещественными, а фокусы f_3, f_4 не вещественными и комплексно сопряжёнными друг другу, см. рис. 13♦7.

¹Понимаемый как такое комплексное число $\angle(u, w) \in \mathbb{C}$, что $\cos^2 \angle(u, w) = (u, w)^2 (u, u)^{-1} (w, w)^{-1}$, ср. с форм. (3-8) на стр. 38.

²См. п° 2.5 на стр. 29.

³Две прямые на плоскости называются *сопряжёнными* относительно гладкой коники, если одна из них проходит через полюс другой.

⁴Т. е. в пучке прямых с центром в точке пересечения этих двух прямых.

⁵По определению, прямые *параллельные* данной $\ell \subset \mathbb{P}_2$ суть все прямые из пучка с центром в точке $\ell \cap \ell_\infty$, за исключением самих прямых ℓ и ℓ_∞ .

Предложение 13.1

Для любой центральной гладкой коники C прямые (f_1f_2) и (f_3f_4) , проходящие через два вещественных и два мнимых фокуса коники C , пересекаются в центре коники и пересекают бесконечность по точкам $x_* = \ell_\infty \cap (f_1f_2)$ и $y_* = \ell_\infty \cap (f_2f_3)$, которые одновременно перпендикулярны и сопряжены относительно коники C . Кроме того, точка y_* является пересечением поляр фокусов f_1 и f_2 , а точка x_* — пересечением поляр фокусов f_3 и f_4 , см. рис. 13◊7.

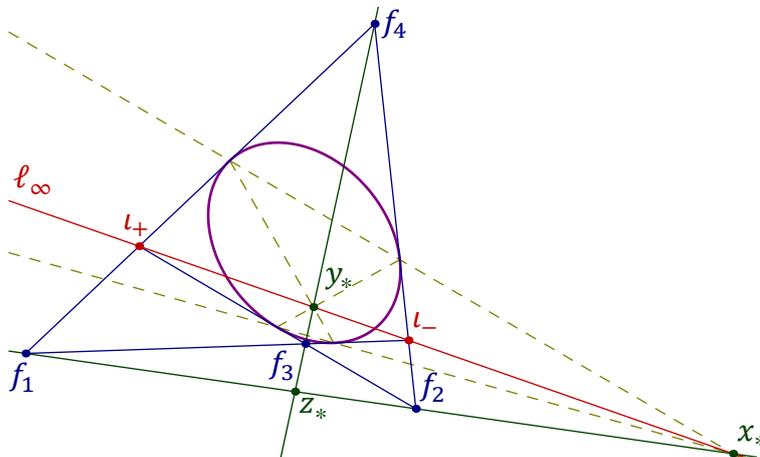


Рис. 13◊7. Гладкая центральная коника, т. е. эллипс или гипербола.

Доказательство **Предл. 13.1**. В **Прим. 10.11** мы видели, что стороны четырёхвершинника $l_+f_3l_-f_4$ гармоничны сторонам ассоциированного с ним треугольника $f_1y_*f_2$ в каждой из вершин этого треугольника. Поэтому, согласно **упр. 13.16**, прямая (f_1f_2) сопряжена как прямой (f_1y_*) , так и прямой (f_2y_*) . Следовательно, точка y_* лежит как на поляре точки f_1 , так и на поляре точки f_2 . Точно такое же рассуждение, применённое к четырёхвершиннику $l_+f_1l_-f_2$ и ассоциированному с ним треугольнику $f_3x_*f_4$, показывает, что y_* лежит на полярах фокусов f_3 и f_4 . Из сказанного вытекает, что точка y_* является полюсом прямой (f_1f_2) , а точка x_* — полюсом прямой (f_3f_4) . Поэтому пересечение $(f_1f_2) \cap (f_3f_4)$ является полюсом прямой $(x_*y_*) = \ell_\infty$, т. е. совпадает с точкой z_* . С другой стороны, гармоничность прямых (f_1y_*) и $(f_1f_2) = (f_1x_*)$ в пучке прямых с центром f_1 означает сопряжённость направлений x_* , y_* относительно коники C , а также равенство $[x_*, y_*, l_+, l_-] = -1$, т. е. перпендикулярность направлений x_* и y_* . \square

13.3.2. Главные оси центральных коник. Направления $x_*, y_* \in \ell_\infty$, одновременно перпендикулярные и сопряжённые относительно коники, называются *главными осями* центральной коники. Из **предл. 13.1** вытекает, что главные оси существуют. Поскольку центр z_* является полюсом прямой (x_*y_*) , точка x_* сопряжена не только точке y_* , но и точке z_* , а значит, является полюсом прямой z_*y_* . По той же причине точка y_* является полюсом прямой z_*x_* . Таким образом, треугольник $x_*y_*z_*$ автополярен относительно коники C . На языке уравнений это означает, что матрица Грама квадратичной формы, задающей конику C , в базисе $x_*y_*z_*$ диагональна. Таким образом в аффинной системе координат с центром z_* и вещественным ортонормальным базисом x_*, y_* в V аффинное уравнение коники принимает вид $ax^2 + by^2 = 1$, где $a > 0$. Такая коника является эллипсом при $b > 0$ и гиперболой при $b < 0$.

Упражнение 13.18. Покажите, что для любой пары различных инволюций на проективной прямой над алгебраически замкнутым полем существует ровно одна пара точек, переводимых друг в друга обеими инволюциями.

Поскольку сопряжение диаметров относительно коники C и евклидово сопряжение представляют собой пару инволюций на пучке прямых с центром в Z_* , из упр. 13.18 вытекает, что каждая коника, для которой эти инволюции различны, обладает единственной парой главных осей. В доказательстве теор. 12.5 на стр. 227 мы видели, что направления главных осей являются собственными векторами матрицы Грама квадратичной части f_2 аффинного уравнения коники в произвольном ортонормальном базисе евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Поэтому практическое отыскание главных осей для заданной явным уравнением коники большого труда не составляет.

13.3.3. Окружности. Неподвижными точками сопряжения относительно коники C являются точки пересечения $C \cap \ell_\infty$. Они называются *асимптотическими направлениями* коники C . У каждой центральной коники имеется ровно два асимптотических направления, причём у гипербол они вещественны, а у эллипсов не вещественны и комплексно сопряжены. Коника называется (*комплексной*) *окружностью*, если асимптотические направления изотропны. Это, с одной стороны, равносильно прохождению коники через изотропные точки l_\pm , а с другой стороны, означает, что сопряжение относительно коники C совпадает с евклидовым сопряжением. В частности, любые два сопряжённых или перпендикулярных диаметра окружности являются её главными осями. Покажем, что это определение окружности согласуется со школьным¹. Евклидова окружность с центром $a = (a_1, a_2)$ и радиусом r задаётся уравнением $(x_1 - a_1 x_0)^2 + (x_2 - a_2 x_0)^2 = r^2 x_0^2$ и пересекает бесконечность в точности по изотропной квадрике $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Наоборот, если вещественная непустая² гладкая коника C проходит через точки l_\pm , то проводя окружность через любые три её вещественные неколлинеарные точки³, мы получим ещё одну гладкую конику, проходящую через l_\pm . Поэтому коника C совпадает с этой окружностью. Итак, евклидовы окружности это гладкие вещественные коники с непустым множеством вещественных точек, лежащие в трёхмерном комплексном проективном пространстве всех коник на \mathbb{P}_2 , проходящих через изотропные точки⁴ l_\pm .

Пример 13.5 (директор центральной коники)

Сопряжение относительно коники C задаёт гомографию $\delta_C : l_+^\times \simeq l_-^\times$ между пучками прямых с центрами в изотропных точках. Она переводит прямую $\ell \ni l_+$ в сопряжённую ей относительно C прямую $\delta_C(\ell) \ni l_-$, см. рис. 13◊8. В пучке прямых с центром в точке⁵ $p = \ell \cap \delta_C(\ell)$ пара сопряжённых прямых ℓ и $\delta_C(\ell)$ гармонична паре касательных, опущенных из точки p на конику C . Следовательно, эти касательные перпендикулярны. Таким образом, ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \delta_C(\ell)$ это в точности ГМТ $p \in \mathbb{P}_2$, из которых коника C видна под прямым углом. В прим. 11.4 на стр. 197 мы видели, что ГМТ пересечения соответственных прямых гомографии между двумя пучками представляет собою конику, проходящую через центры пучков, как на рис. 13◊8. Поскольку в нашем случае эти центры суть изотропные точки l_\pm , рассматриваемое нами ГМТ — окружность. Она называется *директором* коники C и обозначается D_C . Согласно тому же прим. 11.4, $\delta_C(\ell_\infty) = T_{l_-} D_C$ и $\delta_C(T_{l_+} D_C) = \ell_\infty$. Поэтому обе пары прямых $\ell_\infty, T_{l_+} D_C$ и $\ell_\infty, T_{l_-} D_C$ гармоничны касательным, опущенным на конику C из изотропных точек. Тем самым, прямая ℓ_∞ сопряжена относительно коники C с обеими касательными к

¹Ср. с прим. 3.4 на стр. 39.

²Т.е. имеющая непустое пересечение с $\mathbb{R}^2 \subset U_0 \subset \mathbb{P}_2$ или, что то же самое, непустое множество вещественных точек в карте U_0 .

³А такие существуют в силу предл. 11.1 на стр. 192.

⁴Не имеющие вещественных точек гладкие вещественные коники из этого пространства, такие как коника $x_1^2 + y_1^2 = -1$, иногда называют *мнимыми окружностями*.

⁵На рис. 13◊8 показаны три такие точки: p_1, p_2 и p_3 .

окружности D_C в изотропных точках. Следовательно эти касательные пересекаются в полюсе z_* прямой ℓ_∞ относительно коники C , т. е. директор имеет тот же центр, что и коника.

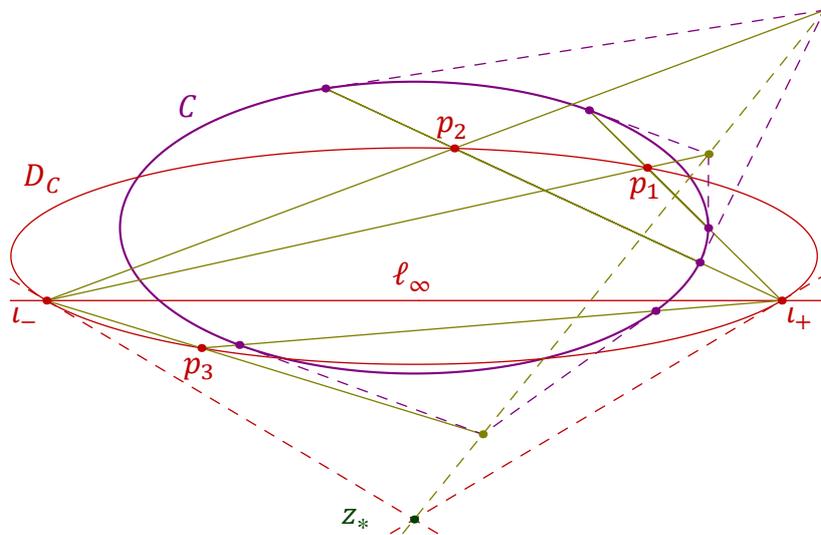


Рис. 13◊8. Директор гладкой центральной коники.

УПРАЖНЕНИЕ 13.19. Напишите явное уравнение директора D_C в главных осях коники C .

ПРИМЕР 13.6 (конфокальные коники)

Множество всех коник на \mathbb{P}^2 , имеющих те же фокусы¹, что и данная гладкая центральная коника C , это в точности множество всех коник, касающихся четырёх касательных к конике C , опущенных из изотропных точек, см. рис. 13◊7 на стр. 245. Все эти коники имеют общие центр и главные оси, а двойственные им коники в \mathbb{P}_2^\times образуют простой пучок коник, проходящих через четыре директрисы коники C . Он порождается гладкой коникой C^\times , двойственной к C , и распавшейся коникой $l_+^\times \cup l_-^\times$, объединением двух пучков прямых с центрами в изотропных точках. Если уравнение коники C в главных осях имеет вид $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$, то по сл. 11.6 на стр. 194 коника C^\times в двойственных координатах задаётся уравнением $a^{-1}x_*^2 + b^{-1}y_*^2 - z_*^2 = 0$. Так как базис x_*, y_* пространства V ортонормален относительно евклидова скалярного произведения, распавшаяся коника на \mathbb{P}_2^\times , образованная всеми прямыми, проходящими через точки l_\pm , имеет уравнение $x_*^2 + y_*^2 = 0$. Все остальные коники пучка задаются уравнениями

$$(a^{-1} + \lambda) \cdot x_*^2 + (b^{-1} + \lambda) \cdot y_*^2 - z_*^2 = 0,$$

где параметр λ пробегает \mathbb{C} . Двойственные им конфокальные с C коники имеют аффинные уравнения

$$\frac{x^2}{a^{-1} + \lambda} + \frac{y^2}{b^{-1} + \lambda} = 1, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{C}.$$

На пучке прямых с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{P}_2$ имеется инволюция $\sigma_C : p^\times \rightleftharpoons p^\times$, переставляющая между прямыми, касающимися какой-либо конфокальной с C коники.

УПРАЖНЕНИЕ 13.20. Убедитесь, что это и впрямь линейная инволюция, причём $\sigma_C(pf_1) = (pf_2)$.

¹Обратите внимание, что для этого достаточно, чтобы два вещественных фокуса были общими.

Две неподвижные точки инволюции σ_C должны касаться в точке p двух разных конфокальных с C коник, проходящих через p . Поскольку неподвижные точки гармоничны любой паре переставляемых точек, а $\sigma_C(l_{\pm}) = l_{\mp}$, эти касательные перпендикулярны. Таким образом, через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две коники C'_p и C''_p конфокальной системы, причём они пересекаются в точке p под прямым углом, см. рис. 13◊9. Так как неподвижные относительно σ_C прямые $l'_p = T_p C'_p$ и $l''_p = T_p C''_p$ гармоничны паре касательных, опущенных из p на любую конику G конфокальной системы, перпендикулярные прямые l'_p, l''_p делят пополам углы между этими касательными. По упр. 13.20 проходящие через фокусы прямые $(pf_1), (pf_2)$ также переставляются друг с другом инволюцией σ_C . Поэтому перпендикулярные касательные l'_p и l''_p также служат биссектрисами и углов прямые $(pf_1), (pf_2)$, см. рис. 13◊9.

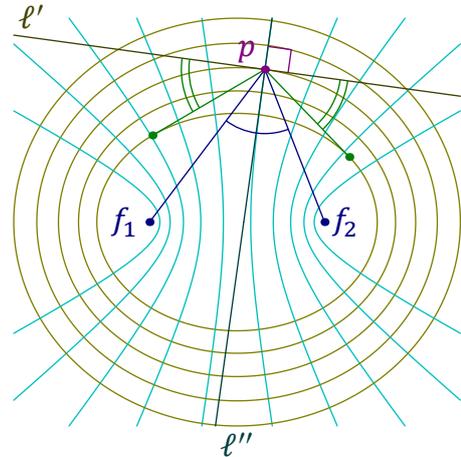


Рис. 13◊9. Конфокальные центральные коники.

Следствие 13.3

Для любых точки p и гладкой центральной коники C с вещественными фокусами f_1, f_2 угол между прямой (pf_1) и опущенной из p на C касательной равен углу между второй касательной и прямой (pf_2) . □

Следствие 13.4 (фокальное свойство центральной коники)

Все отражённые гладкой центральной коникой лучи света от точечного источника в её вещественном фокусе проходят через другой вещественный фокус. □

Упражнение 13.21. Покажите, что из двух пересекающихся в заданной точке коник конфокальной системы одна является эллипсом, а другая гиперболой.

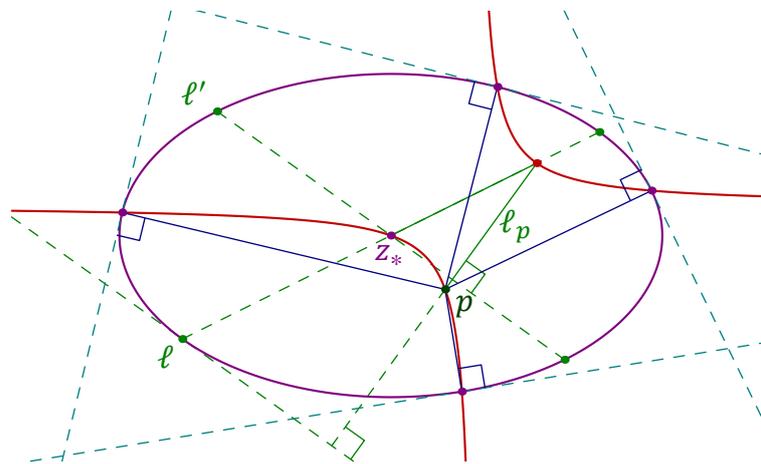


Рис. 13◊10. Гипербола Аполлония точки p относительно эллипса.

Пример 13.7 (гипербола Аполлония)

Для произвольных точки p и гладкой центральной коники C с центром в точке z_* обозначим через $\varphi : z_*^{\times} \rightarrow p^{\times}$ гомографию пучка диаметров коники C в пучок прямых с центром в p ,

переводящую диаметр $\ell \ni z_*$ в опущенный из точки p перпендикуляр ℓ_p на сопряжённый к ℓ относительно коники C диаметр $\ell' \ni z_*$, см. рис. 13◊10.

Упражнение 13.22. Убедитесь, что это и впрямь гомография.

Согласно прим. 11.4 на стр. 197, ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell \cap \ell_p$ является коникой H , проходящей через центр коники C и точку p . Поскольку гомография φ переводит главные направления (z_*x_*) и (z_*y_*) в прямые (px_*) и (py_*) соответственно, коника H является гиперболой, с асимптотическими направлениями, параллельными главным осям коники C . Она называется *гиперболой Аполлония* точки p относительно коники C и замечательна тем, что пересекает конику C ровно по таким точкам $a \in C$, для которых прямая (pa) перпендикулярна касательной T_aC к конике C в точке a , поскольку сопряжённый к ℓ диаметр ℓ' параллелен касательным, восстановленным в концах диаметра ℓ , см. рис. 13◊10. В качестве следствия мы заключаем, что из произвольной точки p на гладкую центральную конику C можно опустить не более четырёх перпендикуляров.

13.3.4. Параболы. Гладкая вещественная коника P , касающаяся бесконечно удалённой прямой в точке $x_* = \ell_\infty \cap P$, может рассматриваться как вырождение гладкой центральной коники, при котором её центр¹ сливается с тремя фокусами f_2, f_3, f_4 в одну точку, которую обозначают $x_* \in \ell_\infty$ и называют *направлением оси*² параболы. Директрисы этих фокусов совпадают с бесконечной прямой ℓ_∞ , см. рис. 13◊11. Оставшийся конечный фокус f_1 тоже веществен, и под *фокусом* и *директрисой* параболы всегда понимаются именно фокус f_1 и его поляра. Конечная точка пересечения параболы с прямой (f_1f_2) обозначается через z_* и называется *вершиной* параболы.

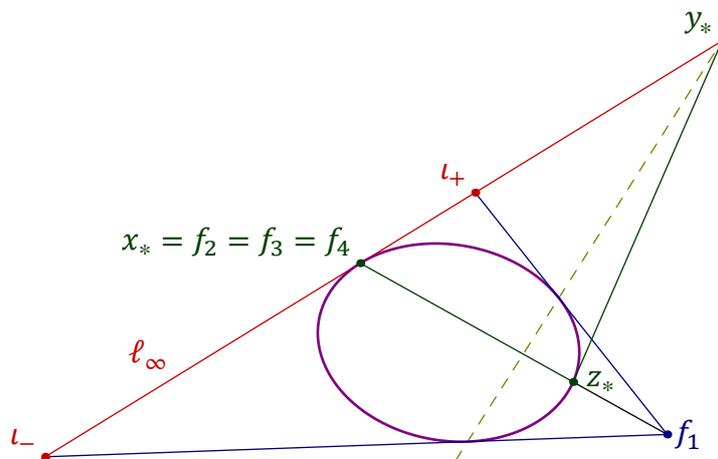


Рис. 13◊11. Парабола.

Точки x_* и $y_* = T_C P \cap \ell_\infty$ называются *главными осями* параболы P . Они сопряжены относительно параболы и перпендикулярны. Первое очевидно из рис. 13◊11, второе выражает тот факт, что в пучке прямых с центром в f_1 сопряжённые относительно коники C направления x_*, y_* гармоничны касательным изотропным направлениям. Поскольку анизотропный вектор y_* сопряжён относительно P обеим точкам x_*, z_* , и обе они изотропны, выбирая на главных осях

¹Т. е. полюс бесконечно удалённой прямой ℓ_∞ , который для вещественной коники автоматически является вещественным.

²А также бесконечно удалённым фокусом и/или асимптотическим направлением.

x_* , y_* евклидово ортонормальные векторы получим для параболы P однородное уравнение $y^2 = 2axz$, где $a > 0$. В аффинном репере карты U_0 с началом в z_* это уравнение превращается в неоднородное уравнение $y^2 = 2ax$.

Упражнение 13.23. Покажите, что середины хорд, отсекаемых из параболы любым пучком параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

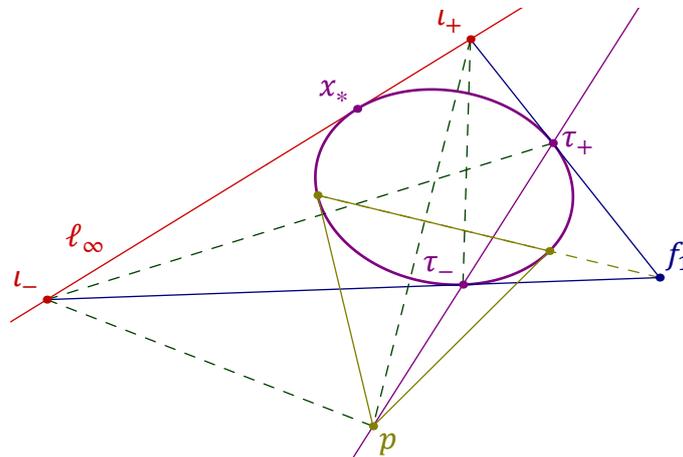


Рис. 13◊12. Директор параболы это директриса.

Предложение 13.2 (ДИРЕКТОР ЭТО ДИРЕКТРИСА)

ГМТ p , из которых параболу P видно под прямым углом, это её директриса. В частности, касательные к параболе, проведённые через концы любой фокальной хорды, пересекаются на директрисе под прямым углом.

Доказательство. Поскольку полюс p любой фокальной хорды сопряжён фокусу, он лежит на его поляре, т. е. на директрисе (см. рис. 13◊12). Задаваемая сопряжением прямых относительно коники гомография $\delta_p : l_+^x \simeq l_-^x$ из прим. 13.5 для параболы превращается в перспективу, поскольку прямая l_∞ , соединяющая центры пучков, самосопряжена. В прим. 11.4 на стр. 197 мы видели, что коника, задающая перспективную гомографию пучков, распадается в прямую, соединяющую центры пучков, и прямую, проходящую через точки пересечений как-нибудь двух пар соответственных прямых из пучков. Таковыми являются точки τ_+ и τ_- пересечения параболы с фокальными касательными, см. рис. 13◊12. \square

Пример 13.8 (КОНФОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛЫ)

Параболы называются *конфокальными*, если у них один и тот же фокус и параллельные оси¹ Семейство парабол, конфокальных заданной параболе P , состоит из всех коник, вписанных в треугольник $f_1 l_- l_+$ и касающихся его стороны $l_\infty = (l_- l_+)$ в фиксированной точке y_* . Двойственные им коники образуют в \mathbb{P}_2^x пучок с тремя базисными точками — сторонами треугольника $f_1 l_- l_+$ и двумя вырожденными распавшимися кониками², одна из которых имеет особенность в точке, изображающей прямую l_∞ , состоит из двух пучков прямых l_\pm^* и задаётся в евклидово ортонормальном базисе, направленном вдоль главных осей, уравнением $x_*^2 + y_*^2 = 0$. Уравнение

¹Т. е. один и тот же бесконечно удалённый фокус.

²См. рис. 13◊5 на стр. 238.

гладкой коники P^\times имеет вид $y_*^2 + 2a^{-1}y_*z_* = 0$. Поэтому общая коника пучка имеет уравнение $(1 + \lambda)y_*^2 + 2a^{-1}x_*z_* + \lambda x^2 = 0$. Обращая его матрицу Грама, получаем для конфокальных P парабол однородные уравнения $(1 + \lambda)^{-1}y^2 - 2axz + \lambda z^2 = 0$ и аффинные уравнения

$$y^2 = (1 + \lambda)(2ax - \lambda).$$

Всё сказанное в [прим. 13.6](#) остаётся в силе и для конфокальных парабол: через любую точку $p \in \mathbb{P}_2$ проходят ровно две конфокальные параболы, а касательные к ним в точке p прямые перпендикулярны и являются биссектрисами углов между двумя касательными, опущенными из точки p на любую параболу конфокальной системы, а также угла между направлением на фокус и направлением, параллельным оси параболы.

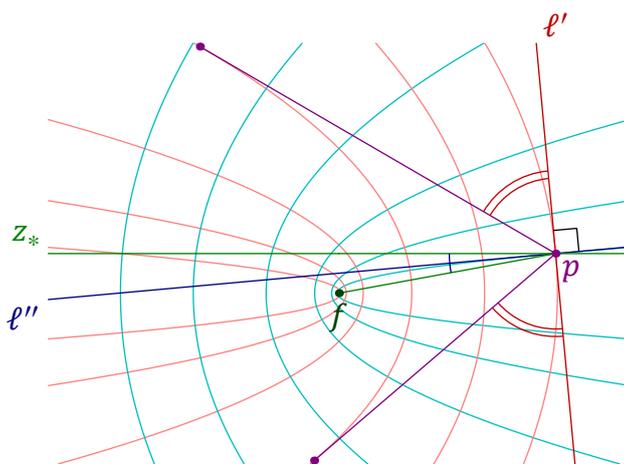


Рис. 13♦13. Конфокальные параболы.

Следствие 13.5

Для любых точки p и параболы угол между касательной, опущенной из p на параболу, и прямой (pf) , ведущей из p в фокус, равен углу между второй касательной и осью параболы. \square

Следствие 13.6 (фокальное свойство параболы)

Все отражённые параболой лучи от точечного источника в её фокусе идут параллельно оси параболы. \square

Пример 13.9 (перпендикуляры к параболе)

Гипербола Аполлония из [прим. 13.7](#) существует и для параболы (убедитесь в этом!). Отличие от центральных коник заключается в том, что направление оси параболы $x_* = \ell_\infty \cap P$ является одной из точек пересечения гиперболы Аполлония с параболой. Поэтому в аффинной карте U_0 находится не более трёх точек пересечения параболы с гиперболой Аполлония, т. е. из произвольной точки плоскости на параболу можно опустить не более трёх перпендикуляров.

§14. Вещественные неевклидовы геометрии

14.1. Проективизация пространства со скалярным произведением. Рассмотрим вещественное векторное пространство $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ с невырожденной симметричной билинейной формой произвольной сигнатуры. Мы будем называть эту форму *скалярным произведением* и обозначать скалярное произведение векторов $u, w \in V$ через $(u, w) \in \mathbb{R}$. Наряду с вещественным векторным пространством V мы иногда будем рассматривать его *комплексификацию* — комплексное векторное пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, состоящее из векторов $u + iw, u, w \in V$. Вещественное подпространство $V \subset V_{\mathbb{C}}$ характеризуется как множество всех векторов, инвариантных относительно *комплексного сопряжения* $v = u + iw \mapsto \bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} u - iw$. Скалярное произведение на V естественным образом продолжается до комплекснозначной симметричной комплексно билинейной формы $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ по правилу

$$(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) = (u_1, u_2) - (w_1, w_2) + i((u_1, w_2) + (u_2, w_1)),$$

и это комплексное скалярное произведение мы по прежнему обозначаем чрез (v_1, v_2) .

Главным объектом нашего внимания в этом параграфе будет вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Для изучения его геометрии мы будем время от времени обращаться и к комплексному проективному пространству $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$, в которое \mathbb{P}_n вложено как множество *вещественных*¹ точек. Изотропные векторы скалярного произведения образуют в \mathbb{P}_n квадрику

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) = 0\},$$

которая называется *абсолютом*. То же квадратное уравнение $(p, p) = 0$ задаёт гладкую комплексную квадрику и в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$. Мы обозначим её через

$$G_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} \mid (p, p) = 0\}.$$

Абсолют $G = \mathbb{P}_n \cap G_{\mathbb{C}}$ представляет собою множество вещественных точек квадрики $G_{\mathbb{C}}$. Анизотропные точки пространства \mathbb{P}_n разбиваются на два непересекающихся подмножества

$$P_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) > 0\} \quad \text{и} \quad P_- \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) < 0\},$$

которые мы будем называть *неевклидовыми пространствами*.

14.1.1. Касательные векторы. Условимся обозначать одной и той же буквой p как точку $p \in \mathbb{P}(V)$, так и отвечающее этой точке одномерное векторное подпространство $p \subset V$. Рассмотрим точку $p \notin G$ и произвольный ненулевой вектор $w \in p$. Обозначим через

$$w^* : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto (v, w)/(w, w),$$

ковектор, сопоставляющий вектору $v \in V$ координату его ортогональной проекции на подпространство $p \subset V$ в базисе w этого подпространства.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Убедитесь, что $v - w \cdot (v, w)/(w, w) \in w^{\perp}$.

Соответствующая ковектору w^* аффинная карта² $U_{w^*} = \{v \in V \mid (v, w) = (w, w)\} = w + p^{\perp}$ проходит через конец вектора w , а её направляющим векторным пространством является

$$\text{Ann } w^* = p^{\perp} = \{v \in V \mid (v, p) = 0\} \subset V.$$

¹Т. е. инвариантных относительно комплексного сопряжения $p \mapsto \bar{p}$.

²См. п° 10.1 на стр. 171.

Все аффинные карты U_w с $w \in p$ состоят из одних и тех же точек $p' \in \mathbb{P}_n$, т.е. совпадают как подмножества в \mathbb{P}_n . Не зависящее от выбора вектора $w \in p$ описание этого подмножества таково. При параллельном переносе точки $p \in \mathbb{P}_n$ в пределах аффинной карты U_w , каждый вектор $w \in p$ параллельно сдвигается на вектор $\tau(w) \in p^\perp$, линейно зависящий от $w \in p$ в том смысле, что $\tau(\lambda w) = \lambda \tau(w)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, см. рис. 14◊1.

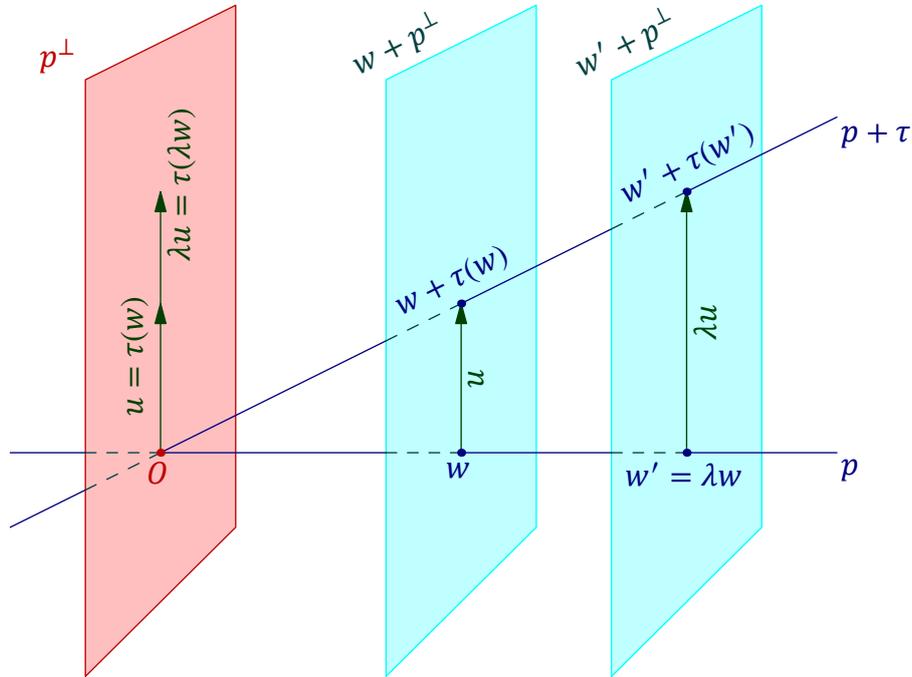


Рис. 14◊1. Сдвиг точки $p \in \mathbb{P}(V)$ на касательный вектор $\tau : p \rightarrow p^\perp$.

Таким образом, лежащие в аффинной карте U_w одномерные подпространства $p' \subset V$ являются графиками линейных отображений

$$\tau : p \rightarrow p^\perp \tag{14-1}$$

и образуют аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством $\text{Hom}(p, p^\perp)$ всех линейных отображений (14-1). Это векторное пространство обозначается $T_p P_\pm$ и называется касательным пространством к неевклидову пространству P_\pm в точке $p \in P_\pm$. Сами линейные отображения (14-1) называются касательными векторами к P_\pm в точке p .

Скалярное произведение на V позволяет ввести скалярное произведение на каждом касательном пространстве $T_p P_\pm$. По определению, касательные векторы $\tau_1, \tau_2 : p \mapsto p^\perp$ в точке $p \in P_\pm$ скалярно перемножаются по одной из формул

$$\begin{aligned} (\tau_1, \tau_2)_p &\stackrel{\text{def}}{=} +(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w) & (14-2^+) \\ \text{или} & & \\ (\tau_1, \tau_2)_p &\stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w) & (14-2^-) \end{aligned}$$

где $w \in p$ — произвольный ненулевой вектор, а знак «+» или «-» в павой части выбирается исходя из того, какую сигнатуру у этого скалярного произведения хочется получить.

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что правые части формул (14-2) зависят только от точки $p \in \mathbb{P}_n$ и касательных векторов $\tau_1, \tau_2 \in T_p P_\pm$, но не от выбора вектора $w \in p$.

Если исходное скалярное произведение на пространстве V позволяет при помощи подходящего выбора знака в (14-2) сделать все касательные пространства $T_p P_{\pm}$ евклидовыми, то получающееся в результате неевклидово пространство P_{\pm} называется *классическим*. Есть два типа таких пространств: эллиптический и гиперболический. Мы подробно обсудим их в разделах н° 14.2 и н° 14.4 ниже.

14.1.2. Геодезические (= прямые). Не лежащие на абсолюте прямые в \mathbb{P}_n называются *геодезическими*. Они разбиваются на три непересекающихся класса:

- *эллиптическая геодезическая* не имеет вещественных пересечений с абсолютом, а её комплексификация пересекает квадрику $G_{\mathbb{C}}$ в двух невещественных комплексно сопряжённых точках; такая геодезическая является проективизацией двумерного анизотропного подпространства в V , на котором скалярное произведение положительно или отрицательно определено, что равносильно положительности его определителя Грама
- *гиперболическая геодезическая* пересекает абсолют по двум различным вещественным точкам и является проективизацией двумерного гиперболического подпространства в V с отрицательным определителем Грама
- *параболическая геодезическая* касается абсолюта, пересекая его ровно в одной вещественной точке с кратностью два; она является проективизацией двумерного подпространства в V , на которое скалярное произведение ограничивается в вырожденную билинейную форму с одномерным ядром и нулевым определителем Грама.

Пусть (комплексная) прямая $(p_1 p_2)$ проходит через две различные вещественные точки p_1, p_2 , лежащие в одном и том же неевклидовом пространстве P_{\pm} , и пересекает абсолют по (возможно, комплексным или совпадающим) точкам a_1, a_2 . Ограничение скалярного произведения на прямую $(p_1 p_2)$ имеет в координатах относительно любого базиса на этой прямой вид¹

$$(x, y) = \frac{c}{2} (\det(x, a_1) \det(y, a_2) + \det(y, a_1) \det(x, a_2))$$

где $x, y \in \mathbb{C}^2$ столбцы координат относительно выбранного базиса, а $c \in \mathbb{C}$ некоторая константа. Величина

$$\begin{aligned} \frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} &= \frac{1}{4} \frac{(\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2) + \det(p_2, a_1) \det(p_1, a_2))^2}{\det(p_1, a_1) \det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1) \det(p_2, a_2)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)}{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)} + 2 + \frac{\det(p_1, a_2) \det(p_2, a_1)}{\det(p_1, a_1) \det(p_2, a_2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ([p_1, p_2, a_1, a_2] + 2 + [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}) = \\ &= \left(\frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2} \right)^2, \quad \text{где } \vartheta = \frac{1}{2} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2], \end{aligned} \quad (14-3)$$

вещественна, положительна и не меняется при умножении скалярного произведения на любую ненулевую константу.

Параболичность геодезической, т. е. совпадение точек $a_1 = a_2$, равносильна любому из равенств: $[p_1, p_2, a_1, a_2] = 1, \vartheta = 0, (p_1, p_2)^2 = (p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)$.

¹Ср. с н° 11.4 на стр. 200 и указаниями к упр. 11.10 на стр. 194.

На эллиптической геодезической, т. е. при $a_1 \neq a_2$ и $a_1 = \bar{a}_2$, выполняются равенства

$$\overline{[p_1, p_2, a_1, a_2]} = [p_1, p_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2] = [p_1, p_2, a_2, a_1] = [p_1, p_2, a_1, a_2]^{-1}.$$

Поэтому двойное отношение $[p_1, p_2, a_1, a_2] \in \mathbb{C}$ лежит на единичной окружности, и величина ϑ чисто мнима. Это согласуется с *эллиптическим неравенством Коши – Буняковского – Шварца*

$$\frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} < 1 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2), \quad (14-4)$$

которое выражает собой положительность определителя Грама анизотропной плоскости:

$$\det \begin{pmatrix} (p_1, p_1) & (p_1, p_2) \\ (p_2, p_1) & (p_2, p_2) \end{pmatrix} = (p_1, p_1)(p_2, p_2) - (p_1, p_2)^2 > 0 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2).$$

Из неравенства (14-4) вытекает, что на эллиптической геодезической отношение (14-3) является квадратом косинуса положительного вещественного числа.

На гиперболической геодезической, т. е. при вещественных $a_1 \neq a_2$, двойное отношение $[p_1, p_2, a_1, a_2]$ вещественно и отлично от нуля. Отрицательность определителя Грама гиперболической плоскости: $(p_1, p_1)(p_2, p_2) - (p_1, p_2)^2 < 0$ (при $p_1 \neq p_2$) переписывается в виде *гиперболического неравенства Коши – Буняковского – Шварца*

$$\frac{(p_1, p_2)^2}{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)} > 1 \quad (\text{при } p_1 \neq p_2), \quad (14-5)$$

из которого вытекает, что на гиперболической геодезической отношение (14-3) является квадратом гиперболического косинуса положительного вещественного числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1 (расстояние вдоль геодезической)

Неотрицательное вещественное число $|\vartheta| = \frac{1}{2} |\ln[p_1, p_2, a_1, a_2]|$ называется *геодезическим расстоянием* между вещественными точками p_1, p_2 из одного неевклидова пространства P_{\pm} и обозначается $|p_1, p_2|$. Таким образом, расстояние между точками параболической геодезической *нулевое*. Расстояние между точками эллиптической геодезической задаётся равенствами¹

$$\cos |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2i} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2]. \quad (14-6)$$

Оно принимает значения на $[0, \pi/2]$. В **прим. 14.1** ниже мы увидим, что эллиптическое расстояние равно евклидову углу между прямыми с направляющими векторами p_1, p_2 в двумерном евклидовом векторном подпространстве, порождённом этими векторами в V , см. **рис. 14♦2**. Расстояние между точками гиперболической геодезической задаётся равенствами²

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2] \quad (14-7)$$

Оно принимает значения на $[0, +\infty)$. В **прим. 14.2** ниже мы увидим, что гиперболическое расстояние равно длине дуги, высекаемой прямыми с направляющими векторами p_1, p_2 из единичной гиперболы $(v, v) = 1$, лежащей в порождённой этими векторами гиперболической плоскости, см. **рис. 14♦3**.

¹Как мы видели, в правой части второго равенства стоит ненулевое вещественное число, и знак следует выбрать так, чтобы оно было положительно. Если убрать в левой части модуль, то правая часть будет задавать *ориентированное расстояние*, меняющее знак при перестановке точек p_1 и p_2 .

²Где второе равенство обладает всеми описанными в предыдущей сноске свойствами.

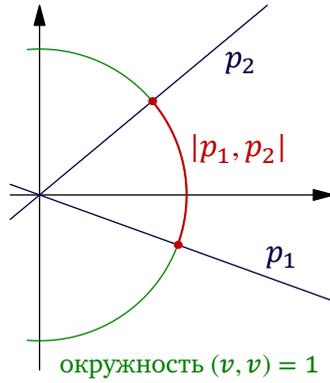


Рис. 14◊2. Эллиптическое расстояние.

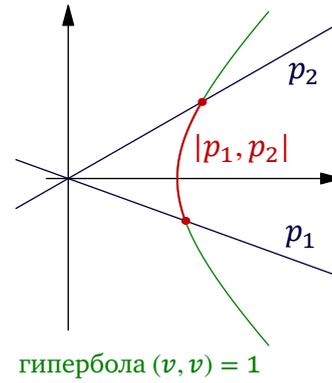


Рис. 14◊3. Гиперболическое расстояние.

ПРИМЕР 14.1 (НАТУРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ)

Пусть геодезическая (ab) эллиптическая, т. е. скалярное произведение ограничивается с пространства V на линейную оболочку одномерных подпространств $a, b \subset V$ в положительно или отрицательно определённую форму. Выберем в этой линейной оболочке базис e_1, e_2 с матрицей Грама $\pm E$ так, чтобы $e_1 \in a$ и обе координаты вектора b были положительны, как на рис. 14◊4. Рассмотрим зависящий от времени $t \in \mathbb{R}$ вектор

$$w(t) = e_1 \cdot \cos t + e_2 \cdot \sin t$$

с постоянным скалярным квадратом $(w(t), w(t)) = 1$. При $t = 0$ он находится в точке a , а при $t = |a, b|$ из формулы (14-6) он попадает в точку b . Производная

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \frac{d}{dt} w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \\ &= -e_1 \cdot \sin t + e_2 \cdot \cos t \end{aligned}$$

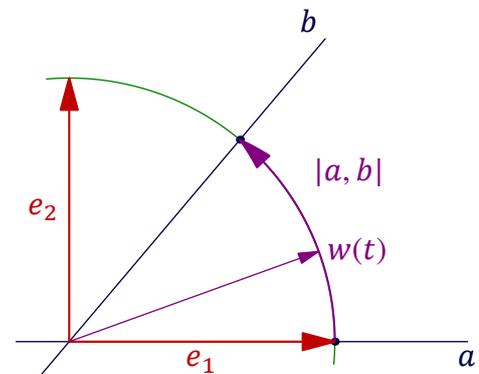


Рис. 14◊4. $w(t) = e_1 \cdot \cos t + e_2 \cdot \sin t$.

лежит в ортогонале $w^\perp(t)$ и задаёт касательный вектор $\tau(t)$ к проективному пространству $\mathbb{P}(V)$ в точке $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t)$ по правилу $\tau(t): \mathbb{R} \cdot w(t) \rightarrow w^\perp(t), w \mapsto \dot{w}(t)$. Этот касательный вектор лежит в одномерном касательном пространстве к геодезической (ab) и вне зависимости от выбора знака в форм. (14-2) на стр. 253 имеет $(\tau(t), \tau(t))_{p(t)} = 1$ при всех t .

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Убедитесь в этом.

Таким образом, точка $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$ движется по геодезической (ab) с *единичной скоростью*, и в промежуток времени $[0, |a, b|]$ проходит в точности расстояние $|a, b|$, задаваемое формулой (14-2). Иными словами, эллиптическое расстояние между одномерными подпространствами a, b равно евклидовой длине кратчайшей из заключённых между a и b дуг единичной окружности в порождённой этими векторами плоскости с евклидовой структурой, индуцированной скалярным произведением¹ из V .

¹Т. е. со скалярным произведением $(u_1, u_2) = \pm(u_1, u_2)$, где плюс ставится когда ограничение скалярного произведения с V на линейную оболочку векторов a, b положительно определено, и минус — когда отрицательно.

Пример 14.2 (натуральная параметризация гиперболической геодезической)

Пусть точки $a, b \in P_+$ и скалярное произведение ограничивается с V на линейную оболочку одномерных подпространств $a, b \subset V$ в гиперболическую форму. Выберем в этой линейной оболочке базис e_1, e_2 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

так, чтобы $e_1 \in a$ и обе координаты вектора b были положительны, как на рис. 14◊5. Зависящий от времени $t \in \mathbb{R}$ вектор $w(t) = e_1 \cdot \operatorname{ch} t + e_2 \cdot \operatorname{sh} t$ имеет постоянный скалярный квадрат $(w(t), w(t)) = 1$ и при $t = 0$ находится в точке a , а при $t = |a, b|$ из форм. (14-7) на стр. 255 попадает в точку b . Как и в предыдущем примере, производная $\dot{w}(t) = e_1 \cdot \operatorname{sh} t + e_2 \cdot \operatorname{ch} t \in w(t)^\perp$ задаёт касательный вектор $\tau(t) \in T_{p(t)}\mathbb{P}(U)$ в точке $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$ по правилу

$$\tau(t): \mathbb{R} \cdot w(t) \rightarrow w^\perp(t), \quad w \mapsto \dot{w}(t).$$

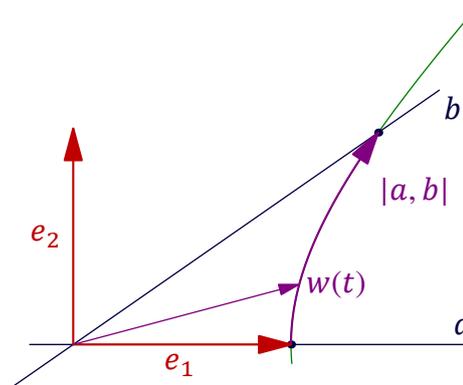


Рис. 14◊5. $w(t) = e_1 \cdot \operatorname{ch} t + e_2 \cdot \operatorname{sh} t$.

Определим скалярные произведения касательных векторов в точке $p(t)$ формулой (14-2⁻). Тогда при всех t скалярный квадрат $(\tau(t), \tau(t))_{p(t)} = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Убедитесь в этом.

Таким образом, точка $p(t) = \mathbb{R} \cdot w(t) \in \mathbb{P}(V)$ движется по геодезической (ab) с единичной скоростью, и в промежуток времени $[0, |a, b|]$ проходит расстояние $|a, b|$ из формулы (14-7). Иными словами, гиперболическое расстояние между точками a, b гиперболической геодезической равно евклидовой длине заключённой между одномерными подпространствами a и b дуги гиперболы с уравнением $x_1^2 - x_2^2 = 1$ в базисе e_1, e_2 относительно такой евклидовой структуры на линейной оболочке подпространств a, b , в которой базис e_1, e_2 ортонормален.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Для произвольного гладкого отображения $w: \mathbb{R} \rightarrow V$ вещественной прямой в пространство V с симметричной билинейной формой $(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ вычислите производную функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = (w(t), w(t))$, и выведите из этого, что скалярный квадрат вектора $w(t)$ не зависит от t , если и только если векторы $w(t)$ и $\dot{w}(t)$ ортогональны при всех t .

14.2. Эллиптическая геометрия. Рассмотрим пространство $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ с положительно определённым скалярным произведением. Проективное пространство $P_+ = \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называется эллиптическим пространством. Абсолют евклидова скалярного произведения не имеет вещественных точек и все геодезические в эллиптическом пространстве эллиптические. Эллиптическое расстояние $|p_1, p_2|$ между точками $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ задаётся формулами (14-6)

$$\cos |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{или} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2i} \ln[p_1, p_2, a_1, a_2], \quad (14-8)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ суть точки пересечения (комплексной проективной) прямой $(p_1 p_2)$ с (комплексифицированным) абсолютном $G_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$. Скалярное произведение касательных векторов $\tau_1, \tau_2: p \rightarrow p^\perp$ в точке $p = \mathbb{R} \cdot w$ задаётся формулой (14-2⁺):

$$(\tau_1, \tau_2)_p = (\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w). \quad (14-9)$$

При $(w, w) = 1$, т. е. для векторов $w \in p$ с концами на единичной сфере $S^n \subset V$, это скалярное произведение совпадает со скалярным произведением векторов $u = \tau(w)$ в пространстве V . В частности для таких w и $u = \tau(w)$

$$|\tau| = \sqrt{(u, u)} \quad \text{и} \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = |(u_1, u_2)| / \sqrt{(u_1, u_1)(u_2, u_2)} \quad (14-10)$$

Предложение 14.1

Геодезическое расстояние (14-8) задаёт на эллиптическом пространстве метрику. Каждая геодезическая (ab) находится в изометрической биекции с окружностью длины π . ГМТ p , для которых выполняется равенство $|a, p| + |p, b| = |a, b|$, переходит при этой биекции в кратчайшую из двух заключённых между точками a и b дуг этой окружности.

Доказательство. Положительность и симметричность расстояния (14-8) очевидны. Неравенство треугольника вытекает из того, что определитель Грама евклидовой формы на линейной оболочке ненулевых векторов p_1, p_2, p_3 неотрицателен и обращается в нуль, если и только если эти векторы линейно зависимы, т. е. лежат на одной геодезической. В самом деле, если нормировать векторы так, чтобы $(p_i, p_i) = 1$, и положить $g_{ij} = (p_i, p_j)$, мы получим

$$\det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0. \quad (14-11)$$

В силу монотонного убывания функции $\cos \vartheta$ на $[0, \pi]$, неравенство треугольника

$$|p_1, p_2| + |p_2, p_3| \geq |p_1, p_3| \quad (14-12)$$

равносильно неравенству $\cos(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \leq \cos |p_1, p_3|$, которое переписывается как

$$\cos |p_1, p_2| \cdot \cos |p_2, p_3| - \cos |p_1, p_3| \leq \sin |p_1, p_2| \cdot \sin |p_2, p_3|.$$

Поскольку правая часть неотрицательна, при отрицательной левой части неравенство треугольника выполняется строго. Если левая часть неотрицательна, обе части неравенства можно возвести в квадрат. Вспоминая, что $\cos^2 |p_i, p_j| = (p_i, p_j)^2 = g_{ij}^2$, получаем

$$g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13} \leq (1 - g_{12}^2)(1 - g_{13}^2),$$

что превращается в (14-11) после раскрытия скобок и переноса левой части направо. Равенство в (14-12) влечёт равенство в (14-11), а значит, линейную зависимость точек p_i . Это доказывает неравенство треугольника, а также то, что равенство в нём возможно только при $p_2 \in (p_1 p_3)$.

Если точки p_1, p_2, p_3 не коллинеарны, то порождённая ими эллиптическая плоскость \mathbb{P}_2 является фактором двумерной единичной сферы $S^2 = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid (e, e) = 1\}$ в натянутом на векторы p_i евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 \subset V$ по отношению эквивалентности, отождествляющему диаметрально противоположные точки сферы. отображение факторизации

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad \pm e \mapsto \mathbb{R} \cdot e, \quad (14-13)$$

непрерывно и локально изометрично в том смысле, что если надеть сферу S^2 сферической метрикой, в которой расстоянием между точками $p, q \in S^2$ считается длина кратчайшей из двух дуг окружности, высекаемой из S^2 плоскостью, проходящей через p, q и центр сферы, то

сферический шар $B_{\pi/4}(p) = \{q \in S^2 \mid |p, q| \leq \pi/4\}$ радиуса $\pi/4$ с центром в произвольной точке $p \in S^2$ изометрически отобразится проекцией (14-13) на эллиптический шар того же радиуса $B_{\pi/4}(f(p)) = \{q \in \mathbb{P}_2 \mid |\pi(p), q| \leq \pi/4\}$ с центром в точке $f(p)$ эллиптической плоскости \mathbb{P}_2 , см. рис. 14◊6. Геодезическая $(p_1 p_3) \subset \mathbb{P}_2$ является фактором единичной окружности S^1 , высекаемой из сферы S^2 двумерной плоскостью, натянутой на векторы p_1, p_3 . Как топологическое пространство, такой фактор гомеоморфен окружности¹, и отображение факторизации $S^1 \rightarrow (p_1 p_3)$ биективно отображает любой полукруг в S^1 на эту окружность, причём любая дуга полукруга, длина которой не превышает $\pi/2$, отображается на свой образ изометрически.

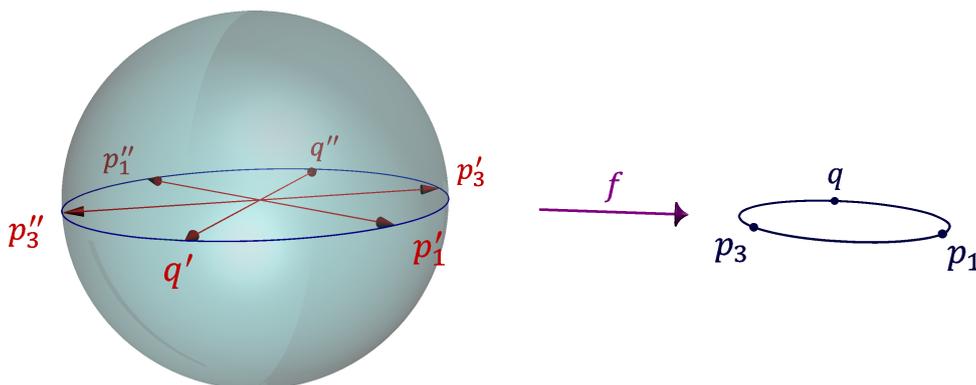


Рис. 14◊6. Факторизация единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ до геодезической $(p_1 p_3) \subset \mathbb{P}_2$ изометрически отображает лежащие на S^1 дуги длины $\leq \pi/2$ на их образы.

Разбивая полуокружность на S^1 в объединение двух таких дуг с общим концом, мы заключаем, что окружность $(p_1 p_3)$ имеет длину π , и расстояние между точками p_1 и p_3 равно длине кратчайшей из двух дуг, на которые эта окружность разбивается точками p_1, p_3 . Если точка $p_2 \in (p_1 p_3)$, то равенство в (14-12) возможно, если и только если точка p_2 лежит именно на этой кратчайшей дуге, см. рис. 14◊7. □

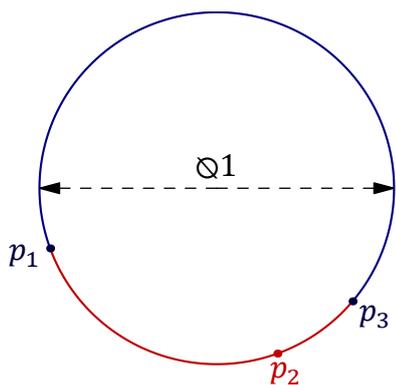


Рис. 14◊7. ГМТ p_2 :
 $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$.

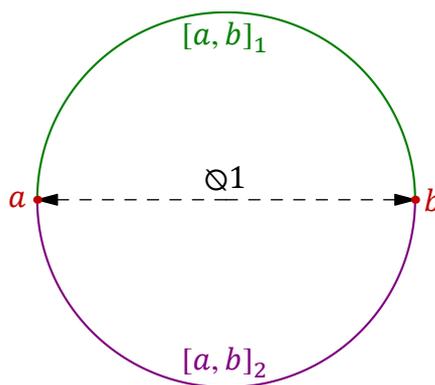


Рис. 14◊8. Два разных геодезических отрезка между точками a и b с
 $|a, b| = \pi/2$.

¹См. прим. 3.9 на стр. 48.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2 (ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ОТРЕЗОК $[a, b]$)

Кратчайшая из двух дуг, на которые геодезическая окружность (ab) в эллиптическом пространстве P разбивается точками a, b , называется *геодезическим отрезком* $[a, b]$. Согласно предыдущей предл. 14.1, геодезический отрезок $[a, b]$ представляет собою ГМТ таких точек $p \in P$, что $|a, p| + |p, b| = |a, b|$. Если $|a, b| < \pi/2$, то геодезический отрезок $[a, b]$ единствен, как на рис. 14◊7. Если же $|a, b| = \pi/2$, то точки a и b разбивают геодезическую (ab) на два различных геодезических отрезка $[a, b]_1$ и $[a, b]_2$ одинаковой длины, как на рис. 14◊8.

14.2.1. Неевклидовы явления в эллиптической геометрии. Как и на евклидовой плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$, через любые две различные точки эллиптической плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ проходит единственная прямая, и кратчайший путь из одной точки в другую идёт по геодезическому отрезку этой прямой. Однако в отличие от евклидовой плоскости эллиптическая плоскость *компактна*, и геометрия взаимного расположения прямых на ней отличается от евклидовой. На эллиптической плоскости нет параллельных прямых: любые две прямые пересекаются. Прямая не разбивает плоскость на две компоненты: любые две точки не лежащие на прямой ℓ можно соединить не пересекающим прямой ℓ отрезком геодезической. На эллиптической плоскости бывают правильные треугольники с прямыми углами¹, как на рис. 14◊9, и т. д., и т. п.

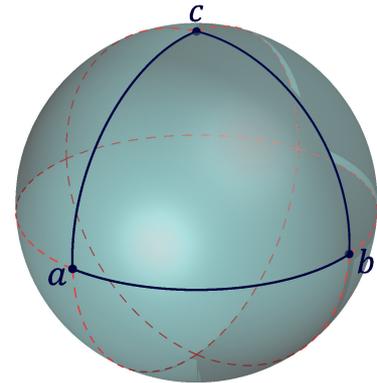


Рис. 14◊9. Правильный прямоугольный треугольник.

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Убедитесь, что прямые, соединяющие противоположные вершины икосаэдра с центром в нуле евклидова пространства \mathbb{R}^3 , образуют на эллиптической плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ конфигурацию из шести попарно равноудалённых друг от друга точек.

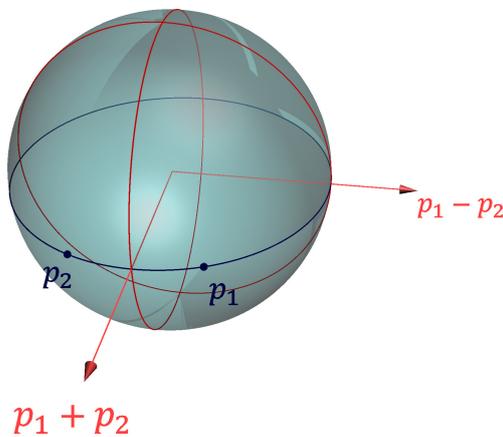


Рис. 14◊10. Медиаторы точек p_1 и p_2 .

вектором $p_1 - p_2$ — на другом, и эти две точки различны.

ПРИМЕР 14.3 (МЕДИАТОРЫ)

Равноудалённость точки q от двух заданных различных точек p_1, p_2 , где все три точки представлены векторами единичной длины, выражается равенством $|(p_1, q_1)| = |(p_2, q_2)|$, которое выполняется в двух случаях: когда $(p_1 - p_2, q) = 0$ или когда $(p_1 + p_2, q) = 0$. Таким образом, ГМТ $q \in \mathbb{P}_n$, равноудалённых от двух заданных точек $p_1 \neq p_2$, является объединением двух гиперплоскостей, которые называются *медиаторами* точек p_1, p_2 и ортогональны векторам $p_1 - p_2$ и $p_1 + p_2$ соответственно, см. рис. 14◊10. Обратите внимание, что если точки p_1, p_2 представлены векторами одинаковой длины, то точка, представленная вектором $p_1 + p_2$, лежит на одном медиаторе, а

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Покажите, что медиаторные гиперплоскости ортогональны друг другу и пересекаются по ГМТ $q \in \mathbb{P}_n$ с $|p_1, q| = |p_2, q| = \pi/2$.

¹Вершины которых суть векторы ортогональных базисов в \mathbb{R}^3 .

14.2.2. Изометрии. Для любого вектора $e \in V$ с $(e, e) = 1$ отражение в гиперплоскости¹ e^\perp

$$\sigma_e : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v - 2(v, e) \cdot e$$

задаёт инволютивный линейный проективный автоморфизм, который мы по-прежнему будем называть *отражением в гиперплоскости* $\mathbb{P}(e^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$ и обозначать $\sigma_e : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Он оставляет на месте каждую точку гиперплоскости $\mathbb{P}(e^\perp)$ и её полюс e относительно абсолюта. Поскольку отражение сохраняет скалярное произведение на V , оно является изометрическим преобразованием эллиптического пространства. Для любых двух различных точек $p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$ существуют ровно два отражения, переставляющие эти точки друг с другом, и эти отражения происходят в медиаторах точек p_1, p_2 . В самом деле, если точка q принадлежит зеркалу такого отражения, то $|p_1, q| = |p_2, q|$, и значит, точка q принадлежит медиатору. С другой стороны, отражения $\sigma_{(p_1-p_2)^\perp} : V \rightarrow V$ и $\sigma_{(p_1+p_2)^\perp} : V \rightarrow V$ переводят вектор $p_1 \in V$ в векторы p_2 и $-p_2$ соответственно.

ТЕОРЕМА 14.1

Всякое изометрическое преобразование $g : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$ эллиптического пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ является линейным проективным автоморфизмом, индуцированным некоторым ортогональным линейным преобразованием $G : V \xrightarrow{\simeq} V$, которое определяется по g однозначно с точностью до знака². Иначе говоря, группа изометрических преобразований n -мерного эллиптического пространства изоморфна *проективной ортогональной группе*

$$\mathbb{P}O_{n+1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}O(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) / \{\pm \text{Id}_V\}.$$

Доказательство. Очевидно, что все преобразования из группы $\mathbb{P}O(V)$ являются изометрическими, и что группа $\mathbb{P}O(V)$ транзитивно действует на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Зафиксируем какой-либо вектор $e \in V$ с $(e, e) = 1$. Беря композицию g с ортогональным преобразованием, переводящим $g(e)$ в e , мы без ограничения общности можем и будем считать, что $g(e) = e$. Рассмотрим на \mathbb{P}_n аффинную карту $U_e = \{v \in V \mid (v, e) = 1\}$. Как аффинная гиперплоскость в $\mathbb{A}(V)$ она параллельна векторной гиперплоскости $e^\perp \subset V$ и проходит через конец вектора e . Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_e = \mathbb{P}(e^\perp)$ представляет собою ГМТ $p \in \mathbb{P}_n$, находящихся на расстоянии $\pi/2$ от точки p . Поэтому преобразование g переводит и карту U и её бесконечно удалённую гиперплоскость e^\perp в себя. Поскольку преобразование g сохраняет расстояние между точками, оно, в силу [предл. 14.1](#), переводит отрезки геодезических в отрезки геодезических, а значит, проективные прямые — в проективные прямые. По [сл. 2.2](#) на стр. 32 ограничение $g|_{U_e} : U_e \rightarrow U_e$ является аффинным преобразованием. В доказательстве [предл. 12.2](#) на стр. 219 мы видели, что такое аффинное преобразование является ограничением на карту U_e единственного линейного проективного автоморфизма $\bar{h} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}_n$, причём задающий его линейный оператор $h : V \rightarrow V$ однозначно с точностью до пропорциональности определяется преобразованием g . Поскольку оба преобразования $g, \bar{h} : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ непрерывны и совпадают на открытом всюду плотном подмножестве U_e компактного метрического пространства \mathbb{P}_n , они совпадают вообще всюду на \mathbb{P}_n , т. е. $g = \bar{h}$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Докажите это.

Умножим оператор h на такую ненулевую константу, чтобы $h(e) = e$, и дополним вектор e до ортонормального базиса e, e_1, e_2, \dots, e_n пространства V . Поскольку оператор h сохраняет

¹См. н° 7.1.1 на стр. 107.

²Т. е. с точностью до композиции с центральной симметрией $-\text{Id}_V : v \mapsto -v$.

углы между одномерными подпространствами, векторы $h(e_i)$ составляют вместе с вектором e ортогональный базис пространства V .

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Убедитесь, что этот ортогональный базис на самом деле ортонормален, т. е. для каждого i выполняется равенство $(h(e_i), h(e_i)) = 1$.

Таким образом, преобразование h ортогонально. Остаётся заметить, что два ортогональных линейных преобразования евклидова векторного пространства пропорциональны тогда и только тогда, когда коэффициент пропорциональности между ними равен ± 1 . \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.10. Убедитесь в справедливости последнего утверждения.

Следствие 14.1

Всякое изометрическое преобразование эллиптического пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ является композицией не более, чем $(n + 1)$ отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Это вытекает из теор. 7.1 на стр. 107. \square

Предостережение 14.1. В отличие от евклидовой геометрии, изометрия эллиптического пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ не определяется однозначно своим действием на произвольные $(n + 1)$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости. Например, если эти точки отвечают ортонормальному базису e_0, e_1, \dots, e_n пространства V , то имеется ровно 2^n различных преобразований из группы $\mathbb{P}O_{n+1}(\mathbb{R})$, оставляющих каждую из точек на месте. Все они действуют на базис по правилу $e_i \mapsto \pm e_i$ с точностью до общего для всех i знака. При $n = 2$ эти четыре преобразования суть Id и три отражения $\sigma_i = \sigma_{e_i}$ в сторонах правильного прямоугольного $\Delta e_0 e_1 e_2$, см. рис. 14◊11. Они транзитивно действуют на четырёх связных компонентах дополнения $\mathbb{P}_2 \setminus \bigcup_{i \neq j} (e_i e_j)$ к трём координатным прямым $(e_i e_j) \subset \mathbb{P}_2$ и оставляют на месте каждую из точек¹ $e_i \in \mathbb{P}_2$.

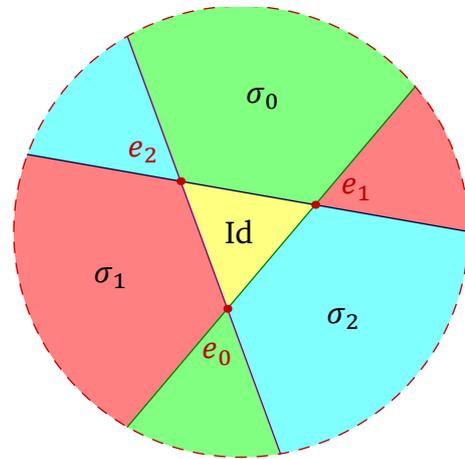


Рис. 14◊11. Образы правильного прямоугольного $\Delta e_0 e_1 e_2$ при отражениях в его сторонах.

Определение 14.3 (дифференциал эллиптической изометрии)

Ортогональный линейный оператор $g : V \simeq V$ задаёт в каждой точке $p \in \mathbb{P}(V)$ ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{P}(V) \simeq T_{g(p)} \mathbb{P}(V), \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-14}$$

переводящее касательный вектор $\tau : p \mapsto p^\perp$ в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-14) называется дифференциалом изометрического преобразования $\bar{g} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$ в точке $p \in \mathbb{P}(V)$.

¹ Отражение $\sigma_i : \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ меняет знак у вектора $e_i \in \mathbb{R}^3$ и тождественно действует на остальные два базисных вектора.

14.2.3. Треугольники. Фигура, образованная тремя геодезическими отрезками¹

$$\Delta abc \stackrel{\text{def}}{=} [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$$

пересекающихся в неколлинеарных точках a, b, c геодезических $(ab), (bc), (ca)$ эллиптического пространства, называется *эллиптическим треугольником*. Всякий эллиптический треугольник лежит в эллиптической плоскости, порождённой его вершинами. Имеется два геометрически разных типа треугольников, представленные на рис. 14◊12 и рис. 14◊13 ниже.

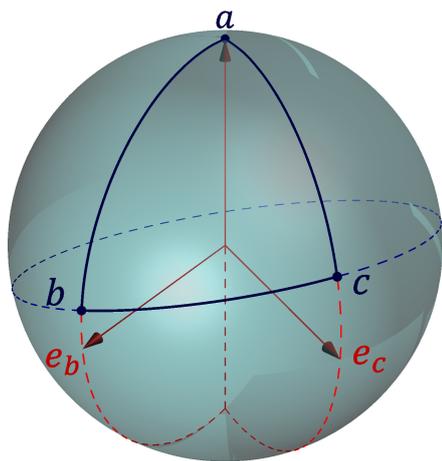


Рис. 14◊12. Треугольник первого рода.

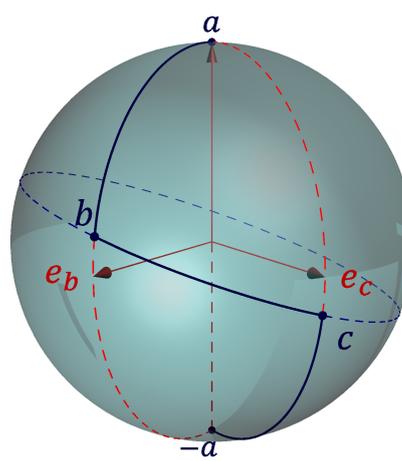


Рис. 14◊13. Треугольник второго рода.

Образы лежащих на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ сферических треугольников с длинами сторон $\leq \pi/2$ при отображении факторизации f из форм. (14-13) на стр. 258 называются эллиптическими треугольниками *первого рода*. Граница такого треугольника разбивает эллиптическую плоскость \mathbb{P}_2 на две связные компоненты, и её можно обойти по кругу так, что треугольник всё время находится по левую руку. Кроме того её можно непрерывно стянуть внутри \mathbb{P}_2 в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.11. Постройте такое непрерывное отображение единичного квадрата в $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad (x, t) \mapsto h(x, t) \in \mathbb{P}_2,$$

что кривая $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 0)$, является параметризацией границы треугольника abc первого рода, а кривая $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_2, x \mapsto h(x, 1)$, отображает весь отрезок $[0, 1]$ в точку $(a + b + c)/3 \in \mathbb{P}_2$.

Вершины треугольника первого рода представляются такими векторами a, b, c единичной длины, что $b = \cos |a, b| \cdot a + \sin |a, b| \cdot e_b$ и $c = \cos |a, c| \cdot a + \sin |a, c| \cdot e_c$, где векторы e_b и e_c дополняют вектор a до ортонормальных базисов в плоскостях ab и ac соответственно, см. рис. 14◊12. Угол $\sphericalangle(bac)$ при вершине a в сферическом Δabc равен евклидову углу между плоскостями ab и ac в \mathbb{R}^3 . Он имеет $\cos \sphericalangle(bac) = (e_b, e_c)$. Вычисляя скалярное произведение $(b, c) = \cos |b, c|$, получаем для эллиптического Δabc первого рода *сферическую теорему косинусов*²

$$\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac). \quad (14-15)$$

¹См. *опр. 14.2* на стр. 260.

²Также известную как *основная формула сферической тригонометрии*.

Эллиптические треугольники, не являющиеся треугольниками первого рода, называются *треугольниками второго рода*. Граница треугольника второго рода поднимается на единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ в *незамкнутую* ломаную, соединяющую диаметрально противоположные точки сферы. Дополнение до границы треугольника второго рода связно: любые две не лежащие на границе точки можно соединить нигде не пересекающим границу треугольника отрезком геодезической. Поскольку на \mathbb{P}_2 имеются геодезические, трансверсально пересекающие границу треугольника второго рода ровно по одной точке, и такой характер пересечения устойчив к малым шевелениям как геодезической, так и треугольника, границу треугольника второго рода¹ нельзя непрерывно продеформировать внутри \mathbb{P}_2 в точку.

УПРАЖНЕНИЕ 14.12. Докажите для треугольников второго рода формулу

$$-\cos |b, c| = \cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac), \quad (14-16)$$

левая часть которой отличается от левой части (14-15) знаком.

Таким образом, величина $\cos |a, b| \cdot \cos |a, c| + \sin |a, b| \cdot \sin |a, c| \cdot \cos \sphericalangle(bac)$ положительна для треугольников первого рода и отрицательна для треугольников второго рода.

14.3. Сферическая форма объёма. Если зафиксировать в пространстве V ортонормальный базис $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$, то с каждым ненулевым вектором $w \in V$ можно связать кососимметричную полилинейную форму $\omega_w : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ от $n = \dim V - 1$ аргументов, значение которой на векторах $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (14-17)$$

и равно определителю $\det C$ матрицы координат² векторов w, v_1, v_2, \dots, v_n в базисе e .

УПРАЖНЕНИЕ 14.13. Покажите, что для любого векторного пространства³ V над произвольным полем \mathbb{k} и любого целого неотрицательного m пространство полилинейных кососимметричных форм от m аргументов $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ канонически изоморфно пространству линейных форм $L^m V \rightarrow \mathbb{k}$ на m -той внешней степени пространства V . Выведите из этого, что сопоставление $w \mapsto \omega_w$ устанавливает линейный изоморфизм векторного пространства V с векторным пространством полилинейных кососимметричных форм от $n = \dim V - 1$ аргументов на пространстве V .

При выборе другого ортонормального базиса в V форма ω_w не изменится, если новый базис имеет ту же ориентацию, что и базис e , и умножится на -1 , если ориентация у нового базиса противоположна. Квадрат значения формы ω_w на векторах v_1, v_2, \dots, v_n

$$\omega^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det^2 C = \det(C^t E C) = \det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n}$$

равен определителю Грама векторов w, v_1, v_2, \dots, v_n . Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n \in w^\perp$, то

$$\det G_{w, v_1, v_2, \dots, v_n} = (w, w) \cdot \det G_{v_1, v_2, \dots, v_n}.$$

Таким образом, абсолютная величина значения формы ω_w на параллелепипеде из подпространства $w^\perp \subset V$ равна n -мерному *евклидову объёму*⁴ этого параллелепипеда, умноженному на $|w|$,

¹Также как и любую геодезическую.

²Т. е. такой матрицы C , что $(w, v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$.

³В том числе бесконечномерного.

⁴См. п° 6.2.1 на стр. 94.

и не зависит от выбора ортонормального базиса в V . Когда вектор w лежит на единичной сфере

$$S^n = \{v \in V \mid (v, v) = 1\} \subset \mathbb{A}(V),$$

векторное подпространство w^\perp является направляющим векторным пространством аффинной касательной гиперплоскости $T_w S^n = w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$ к сфере S^n в точке $w \in S^n$, и ограничение на него формы $|\omega_w|$ задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём.

В дифференциальном исчислении гладко зависящую от точки $x \in \mathbb{A}(V)$ линейную форму

$$\alpha(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}$$

принято называть *дифференциальной n -формой* и записывать в виде

$$\alpha(x) = \sum_{v=0}^n a_{0 \dots \widehat{v} \dots n}(x) \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-18)$$

где крышка означает пропуск того, что под ней стоит, а $a_{0 \dots \widehat{v} \dots n} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ это гладкая функция, значение которой в точке $x \in \mathbb{A}(V)$ по определению равно значению формы $\alpha(x)$ на базисном грасмановом мономе $e_0 \wedge \dots \wedge e_{v-1} \wedge e_{v+1} \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n V$. Форма (14-17)

$$\omega(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-19)$$

записывается в виде (14-18) следующим образом:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-20)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.14. Убедитесь в этом.

14.3.1. Объёмы фигур. Пусть некоторая область $\Phi \subset S^n$ единичной сферы $S^n \subset \mathbb{A}(V)$ является образом области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства \mathbb{R}^n при биективном гладком отображении $f : \Omega \rightarrow \Phi$. Тогда в каждой точке $z \in \Omega$ дифференциал df отображения f линейно отображает векторное пространство \mathbb{R}^n , воспринимаемое как касательное пространство к области Ω в точке z , в направляющее векторное пространство $f(z)^\perp \subset V$ аффинной касательной гиперплоскости к сфере S^n в точке $f(z)$. Дифференциал df переводит параллелепипеды $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ в параллелепипеды $df(\Pi) \subset f(z)^\perp$ так, что отношение евклидова объёма параллелепипеда $df(\Pi)$ в касательном пространстве к S^n в точке $f(z)$ к евклидову объёму параллелепипеда Π в \mathbb{R}^n одинаково для всех Π и равно $\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|$, где u_1, u_2, \dots, u_n — произвольный ортонормальный базис в \mathbb{R}^n . Таким образом, функция $\varrho(z)$ задаёт «коэффициент растяжения» евклидова объёма при линейном отображении касательных пространств $df : T_z \Omega \rightarrow T_{f(z)} \Phi$ в каждой точке $z \in \Omega$. Интеграл от неё по области Ω естественно называть *объёмом сферической области $\Phi = f(\Omega) \subset S^n$* :

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Возникающая при этом на области Ω дифференциальная форма

$$\omega(z) : \Lambda^n \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))$$

называется *подъёмом* имеющейся на сфере $S^n \subset \mathbb{A}(V)$ дифференциальной формы (14-19) относительно гладкого отображения $f : \Omega \rightarrow S^n$ и обычно обозначается $f^* \omega$.

ПРИМЕР 14.4 (ПЛОЩАДЬ ПОЛУСФЕРЫ)

Пересечение Π единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с полупространством $x_0 \geq 0$ является образом квадрата

$$\Omega = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leq \psi, \varphi \leq \pi/2\}$$

из евклидова пространства \mathbb{R}^2 с координатами (φ, ψ) при отображении Эйлера $f : \Omega \rightarrow \Pi, (\varphi, \psi) \mapsto (x_0, x_1, x_2)$, где

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \psi \cos \varphi \\ x_1 &= \cos \psi \sin \varphi \\ x_2 &= \sin \psi. \end{aligned} \tag{14-21}$$

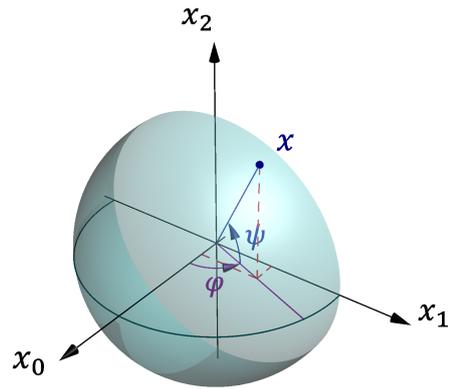


Рис. 14◊14. Эйлера углы.

Дифференцируя эти равенства по φ и ψ , получаем

$$\begin{aligned} dx_0 &= -\sin \psi \cos \varphi d\psi - \cos \psi \sin \varphi d\varphi & dx_1 \wedge dx_2 &= \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_1 &= -\sin \psi \sin \varphi d\psi + \cos \psi \cos \varphi d\varphi & dx_0 \wedge dx_2 &= -\cos^2 \psi \sin \varphi d\varphi \wedge d\psi \\ dx_2 &= \cos \psi d\psi, & dx_0 \wedge dx_1 &= \cos \psi \sin \psi d\varphi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальную форму (14-20)

$$\omega(x) = x_0 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_0 \wedge dx_2 + x_2 dx_0 \wedge dx_1,$$

после многочисленных сокращений заключаем, что её подъём со сферы S^2 на евклидову плоскость \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (φ, ψ) имеет вид $f^*\omega(\varphi, \psi) = \cos \psi d\varphi \wedge d\psi$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.15. Убедитесь в этом!

Стало быть, функция $\varrho(\varphi, \psi) = \cos \psi$, и площадь полусферы

$$S(\Pi) = \int_{\Omega} \varrho(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = 2\pi.$$

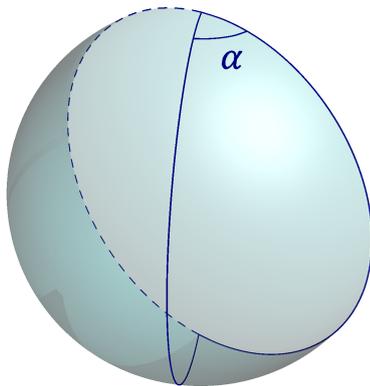


Рис. 14◊15. Площадь сферической лунки с углом α равна 2α .

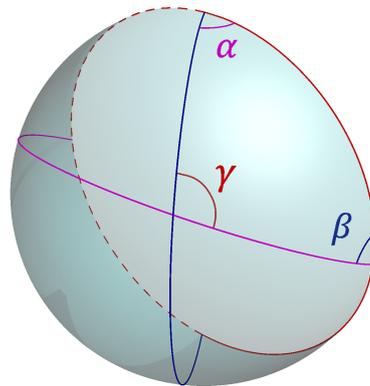


Рис. 14◊16. Лунки с углами α и β и две части от лунки с углом γ .

ТЕОРЕМА 14.2

Площадь сферического треугольника с углами α, β, γ равна $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. В частности, сумма углов сферического треугольника всегда строго больше π .

Доказательство. Площадь сферической луночки, заключённой между двумя проходящими через центр сферы плоскостями, пропорциональна углу α между этими плоскостями и относится к площади полусферы как $\alpha : \pi$, см. рис. 14◊15. Поэтому площадь такой лунки равна 2α . Сферический треугольник на рис. 14◊16 высекается из полусферы двумя луночками с углами α и β . Дополнение к этим луночкам и треугольник вместе составляют две части сферической луночки с раствором γ . Поэтому сумма площадей трёх сферических лунок с углами α, β, γ отличается от площади полусферы тем, что интересующий нас треугольник учтён в ней трижды, т. е. площадь S этого треугольника удовлетворяет равенству $2S + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$. \square

14.3.2. Инвариантная форма объёма на эллиптическом пространстве. Сферическая форма объёма на касательных пространствах к единичной сфере в \mathbb{R}^{n+1} индуцирует форму объёма Vol_p на касательных пространствах $T_p\mathbb{P}_n$ к эллиптическому пространству $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ во всех его точках $p \in \mathbb{P}_n$ по правилу

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}. \quad (14-22)$$

Правая часть этой формулы не зависит от выбора ненулевого представителя $w \in p$ и обладает тем свойством, что для любого ортогонального линейного оператора $g : V \simeq V$ выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где $dg : T_p\mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)}\mathbb{P}(V)$ это дифференциал¹ преобразования $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.16. Убедитесь в этом.

При $(w, w) = 1$ и $\tau_i(w) = u_i$ формула (14-22) упрощается до

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n)| \quad (14-23)$$

и равна абсолютной величине формы объёма (14-20) на единичной сфере.

14.4. Гиперболическая геометрия. Рассмотрим пространство $V = \mathbb{R}^{n+1}$ с лоренцевым скалярным произведением сигнатуры $(1, n)$

$$(x, y) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (14-24)$$

Условимся называть ортогональные базисы пространства V , в которых скалярное произведение задаётся формулой (14-24), *лоренцевыми*. Изотропная квадрика $G = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid (v, v) = 0\}$ непуста и разбивает $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ на два непересекающихся подмножества. В аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ множество $G_+ = \{v \in V \mid (v, v) > 0\}$ представляет собою внутренность конуса G , а множество $G_- = -\{v \in V \mid (v, v) < 0\}$ является его внешностью, см. рис. 14◊17 на стр. 268. Проективизация первого множества $P_+ = \{p \in \mathbb{P}_n \mid (p, p) > 0\}$ называется n -мерным пространством Лобачевского или гиперболическим пространством и обозначается \mathbb{L}_n .

¹См. опр. 14.3 на стр. 262.

Ограничение скалярного произведения (14-24) на ортогонал p_1^\perp к любому вектору p_1 с положительным квадратом $(p_1, p_1) > 0$ отрицательно определено. Поэтому все геодезические (ab) , где $a, b \in \mathbb{L}_n$, имеют гиперболический тип¹. Гиперболическое расстояние $|p_1, p_2|$ между точками $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$ задаётся формулами (14-7) :

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = \frac{|(p_1, p_2)|}{\sqrt{(p_1, p_1) \cdot (p_2, p_2)}} \quad \text{и} \quad |p_1, p_2| = \pm \frac{1}{2} \ln |(p_1, p_2, a_1, a_2)|, \quad (14-25)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbb{P}_n$ суть точки пересечения² проективной прямой $(p_1 p_2) \subset G$ с абсолютом $G \subset \mathbb{P}_n$.

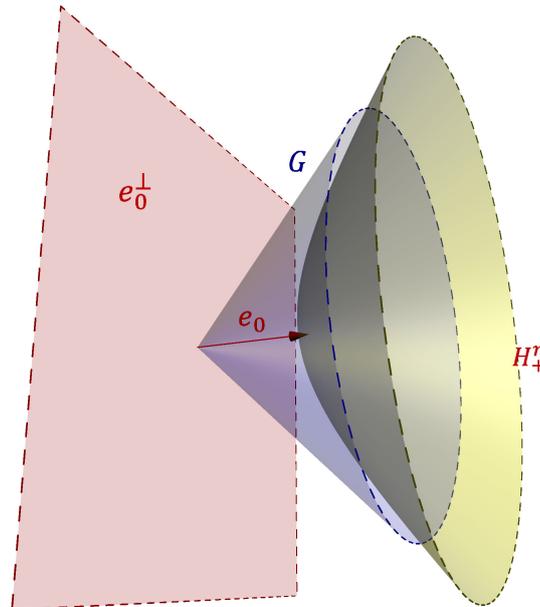


Рис. 14-17. Вектор e_0 с $(e_0, e_0) = 1$, абсолютный конус $G = \{v \in V \mid (v, v) = 0\}$ и положительная поля $H_+^n = H \cap x_0^+$ гиперboloида $H = \{v \in V \mid (v, v) = 1\}$.

Если выбрать векторы $p_1^+ \in p_1$ и $p_2^+ \in p_2$ лежащими на *положительной* поле

$$H_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (v, v) = 1 \ \& \ x_0 > 0\} \subset \mathbb{A}(V) \quad (14-26)$$

двуполостного гиперboloида векторов единичной длины, то угол между векторами p_1^+, p_2^+ будет острым³, что позволяет избавиться от модуля и знаменателя в первой из формул (14-25):

$$\operatorname{ch} |p_1, p_2| = (p_1^+, p_2^+). \quad (14-27)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.17. Покажите, что для любых двух ненулевых векторов $a^+, b^+ \in V$ с концами на H_+^n разность $a^+ - b^+ \notin \mathbb{L}_n$.

¹Любой ненулевой вектор $w_1 \in a$ имеет $(w_1, w_1) > 0$, а ортогонал к нему пересекает плоскость ab по одномерному пространству, на котором скалярное произведение отрицательно определено.

²Обратите внимание, что обе они вещественны.

³Поскольку лежит внутри евклидова прямого угла, высекаемого плоскостью $(p_1 p_2) \subset V$ из конуса $(v, v) > 0$.

Скалярное произведение касательных векторов $\tau_1, \tau_2 \in T_p \mathbb{L}_n$ в точке $p = \mathbb{R} \cdot w$ гиперболического пространства \mathbb{L}_n определяется по форм. (14-2⁻) на стр. 253 :

$$(\tau_1, \tau_2)_p \stackrel{\text{def}}{=} -(\tau_1(w), \tau_2(w)) / (w, w). \quad (14-28)$$

Оно *положительно определено*. Для вектора $w \in p$ с концом на H_+^n аффинная гиперплоскость $w + w^\perp \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собою аффинное касательное пространство к гиперboloиду H_+^n в точке w . Сопоставляя касательному вектору $\tau : p \rightarrow p^\perp$ из $T_p \mathbb{L}_n$ вектор $u = \tau(w) \in w^\perp$, мы можем отождествить касательное пространство $T_p \mathbb{L}_n$ с векторным подпространством $w^\perp \subset V$, состоящим из всех касательных векторов к H_+^n в точке w . При таком отождествлении длины касательных векторов и углы между ними вычисляются по формулам

$$|\tau| = \sqrt{-(u, u)} \quad \text{и} \quad \cos \angle(\tau_1, \tau_2) = |(u_1, u_2)| / \sqrt{(u_1, u_1)(u_2, u_2)}. \quad (14-29)$$

Предложение 14.2

Геодезическое расстояние (14-25) задаёт на гиперболическом пространстве \mathbb{L}_n метрику. Каждая геодезическая $(ab) \subset \mathbb{L}_n$ гомеоморфна вещественной прямой, и отрезок $[a, b]$ этой прямой представляет собою ГМТ $p \in \mathbb{L}_n$, для которых выполняется равенство $|a, p| + |p, b| = |a, b|$.

Доказательство. Любые три линейно независимых вектора p_1, p_2, p_3 с концами на H_+^n порождают в $\mathbb{P}(V)$ плоскость, которая не касается абсолютной квадрики G . Поэтому ограничение лоренцева скалярного произведения на линейную оболочку этих векторов не вырождено и имеет сигнатуру $(1, 2)$. Следовательно, их определитель Грама

$$G_{p_1 p_2 p_3} = \det \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2g_{12}g_{23}g_{13} - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 \geq 0, \quad (14-30)$$

где, как и в форм. (14-11) на стр. 258, мы полагаем $g_{ij} = (p_i, p_j)$. В силу монотонного возрастания функции $\text{ch } t$ на $[0, \infty)$, неравенство треугольника для точек p_1, p_2, p_3 равносильно неравенству $\text{ch}(|p_1, p_2| + |p_2, p_3|) \geq \text{ch} |p_1, p_3|$, которое можно переписать как

$$\text{sh} |p_1, p_2| \cdot \text{sh} |p_2, p_3| \geq \text{ch} |p_1, p_3| - \text{ch} |p_1, p_2| \cdot \text{ch} |p_2, p_3|. \quad (14-31)$$

Поскольку левая часть здесь неотрицательна, при отрицательной правой части неравенство треугольника выполняется строго. Если же правая часть неотрицательна, возводя обе части неравенства в квадрат и пользуясь тем, что $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$, получаем

$$(g_{12}^2 - 1)(g_{13}^2 - 1) \geq g_{12}^2 g_{23}^2 + g_{13}^2 - 2g_{12}g_{23}g_{13},$$

что превращается в (14-30) после раскрытия скобок и переноса правой части налево. Равенство в (14-31) влечёт равенство в (14-30) и, тем самым, линейную зависимость точек p_i . При $p_1 \neq p_3$ пересечение гиперboloида H_+^n с натянутым на p_1, p_3 двумерным векторным подпространством $U \subset V$ представляет собою гиперболу в аффинизации $\mathbb{A}(U)$ этого пространства. Если выбрать в U базис e_1, e_2 с $e_1 \in p_1$ и таким e_2 , что $(e_2, e_2) = -1$, $(e_2, e_1) = 0$, а вектор p_3 имеет неотрицательные координаты, гипербола $U \cap H_+^n$ запишется в нём уравнением $x_1^2 - x_2^2 = 1$ и будет выглядеть как на рис. 14-5 из прим. 14.2 на стр. 257, где мы видели, что гиперболическое расстояние между точками a и b этой гиперболы равно евклидовой длине заключённой между ними дуги в такой евклидовой структуре на пространстве U , для которой базис e_1, e_2 ортонормален. Таким образом, равенство $|p_1, p_2| + |p_2, p_3| = |p_1, p_3|$ выполняется в точности для точек p_2 , лежащих на заключённой между точками p_1 и p_3 дуге гиперболы. \square

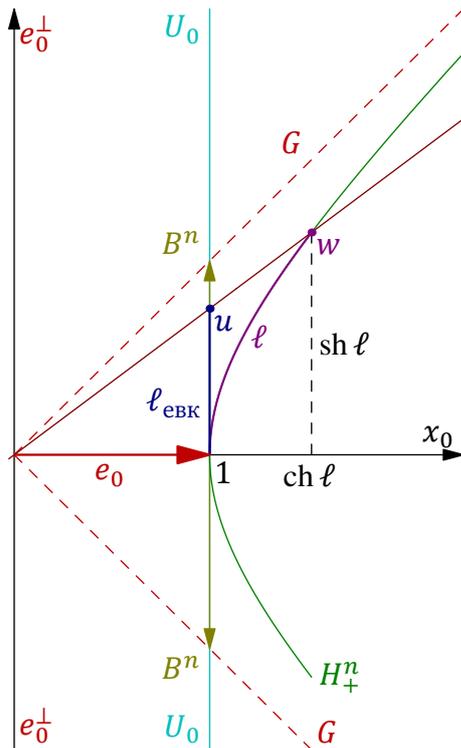
14.4.1. Неевклидовы эффекты в гиперболической геометрии. Всё гиперболическое пространство \mathbb{L}_n полностью наблюдаемо в стандартной аффинной карте

$$U_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ как внутренность единичного шара

$$B^n = \{(1, x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_0 \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} = G_+ \cap U_0.$$

При этом прямые из \mathbb{L}_n видны в B^n в виде прямых, и через любые две различные точки проходит единственная прямая, а кратчайший путь из одной точки в другую идёт по отрезку этой прямой. Та же картина имеет место в евклидовом пространстве U_0 с евклидовой структурой, задаваемой взятым с противоположным знаком ограничением лоренцева скалярного произведения с V на направляющее подпространство $\text{Ann } x_0$ карты U_0 . Однако и расстояния, и углы в \mathbb{L}_n отличаются от расстояний и углов в евклидовом пространстве U_0 . Так, точка $w = \text{ch } \ell \cdot e_0 + \text{sh } \ell \cdot e_1 \in \mathbb{L}_n$, находящаяся на гиперболическом расстоянии ℓ от точки e_0 , видна в аффинной карте $U_0 = e_0 + e_0^\perp$ как точка $u = e_0 + \text{th } \ell \cdot e_1$, см. рис. 14◊18, удалённая от e_0 на евклидово расстояние



$$\ell_{\text{евк}} = \text{th } \ell, \tag{14-32}$$

и когда точка u приближается к абсолюту, т.е. при $\ell_{\text{евк}} \rightarrow 1$, гиперболическое расстояние $\ell \rightarrow \infty$. Плоскость Лобачевского \mathbb{L}_2 , как и евклидова плоскость, разбивается каждой лежащей в ней прямой на две связные компоненты. Однако через любую точку a , не лежащую на произвольно заданной прямой ℓ , проходит континуальное семейство прямых, не пересекающих прямую ℓ , см. рис. 14◊19.

Рис. 14◊18. $\ell_{\text{евк}} : 1 = \text{sh } \ell : \text{ch } \ell$. см. рис. 14◊19.

Пример 14.5 (гиперболическая тригонометрия)

Рассмотрим три линейно независимых вектора $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{L}_2$ с концами на H_+^2 . Дополним вектор w_0 до лоренцева базиса в линейной оболочке векторов w_0, w_1 вектором u_1 так, чтобы вектор w_1 имел в этом базисе положительные координаты, и рассмотрим аналогичный лоренцев базис w_0, u_2 в линейной оболочке векторов w_0, w_2 . Тогда угол α_0 при вершине w_0 в $\Delta w_0 w_1 w_2$ имеет $\cos \alpha_0 = -(u_1, u_2)$, а векторы w_1, w_2 выражаются через базисные как¹

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{ch } |w_0, w_1| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_1| \cdot u_1 \\ w_2 &= \text{ch } |w_0, w_2| \cdot w_0 + \text{sh } |w_0, w_2| \cdot u_2. \end{aligned} \tag{14-33}$$

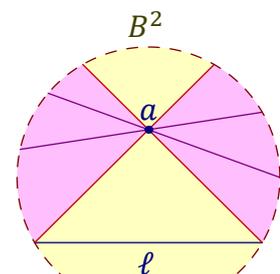


Рис. 14◊19.

¹Ср. с доказательством форм. (14-15) на стр. 263.

Вычисляя при помощи этих разложений лоренцево произведение $(w_1, w_2) = \text{ch } |w_1, w_2|$, получаем *гиперболическую теорему косинусов*

$$\text{ch } |w_1, w_2| = \text{ch } |w_0, w_1| \cdot \text{ch } |w_0, w_2| - \text{sh } |w_0, w_1| \cdot \text{sh } |w_0, w_2| \cdot \cos \alpha_0. \quad (14-34)$$

Из (14-33) вытекает также, что определитель матрицы координат векторов w_0, w_1, w_2 в произвольно зафиксированном лоренцевом базисе e пространства $V = \mathbb{R}^3$ равен

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \text{sh } |w_0, w_1| \text{sh } |w_0, w_2| \det(w_0, u_1, u_2).$$

Так как квадрат последнего определителя равен определителю Грама¹ векторов w_0, u_1, u_2 :

$$\det^2(w_0, u_1, u_2) = \Gamma_{w_0, u_1, u_2} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \alpha_0 \\ 0 & -\cos \alpha_0 & -1 \end{pmatrix} = \sin^2 \alpha_0,$$

в любом $\Delta w_0 w_1 w_2$ с гиперболическими углами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и длинами сторон $\ell_i = |w_j, w_k|$ для всех перестановок i, j, k номеров 0, 1, 2 выполнена *гиперболическая теорема синусов*

$$\det(w_0, w_1, w_2) = \text{sh } \ell_i \text{sh } \ell_j \sin \alpha_k, \quad (14-35)$$

где векторы w_i , представляющие вершины треугольника, предполагаются лежащими на единичном гиперboloиде H_+^2 . Из формулы (14-35) вытекает равенство

$$\frac{\text{sh } \ell_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\text{sh } \ell_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\text{sh } \ell_2}{\sin \alpha_2}, \quad (14-36)$$

также известное как *гиперболическая теорема синусов*.

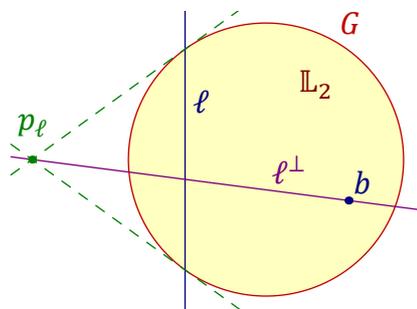


Рис. 14♦20. Перпендикуляр ℓ^\perp , опущенный из точки b на прямую ℓ .

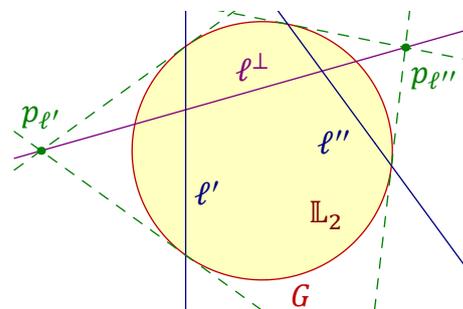


Рис. 14♦21. Общий перпендикуляр ℓ^\perp к двум не пересекающимся прямым ℓ', ℓ'' .

Пример 14.6 (перпендикуляры к прямым)

Прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ пересекает плоскость Лобачевского $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{P}_2$, если и только если её полюс p_ℓ относительно абсолютной коники $G \subset \mathbb{P}_2$ не лежит в \mathbb{L}_2 , см. рис. 14♦20. Две такие прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они сопряжены относительно G , т. е. одна (а значит, и каждая) из них проходит через полюс другой. В частности, через каждую точку

¹Определитель Грама любого набора векторов равен определителю Грама лоренцева базиса e в \mathbb{R}^3 , умноженному на квадрат определителя матрицы координат этих векторов в лоренцевом базисе, ср. с предл. 6.2 на стр. 94.

$b \in \mathbb{L}_2 \setminus \ell$ проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой ℓ , а именно — прямая (bp_ℓ) . В точке пересечения $a = (bp_\ell) \cap \ell$ достигается строгий абсолютный минимум гиперболического расстояния от точки b точек прямой ℓ , поскольку для любой отличной от b точки $c \in \ell$ в силу формулы (14-15) выполняется неравенство $\operatorname{ch} |b, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |a, c| > \operatorname{ch} |a, b|$, ибо $\operatorname{ch} |a, c| > 1$. В отличие от евклидовой плоскости, у любых двух пересекающихся \mathbb{L}_2 но не пересекающихся внутри \mathbb{L}_2 прямых $\ell', \ell'' \subset \mathbb{P}_2$ имеется единственный общий перпендикуляр, а именно — поляр $\ell^\perp = (p_{\ell'} p_{\ell''})$ точки $\ell' \cap \ell''$ относительно абсолютной коники G . При этом точки пересечения $a' = \ell' \cap \ell^\perp$ и $a'' = \ell'' \cap \ell^\perp$ образуют единственную пару точек, на которой достигается строгий абсолютный минимум расстояний между точками прямых ℓ' и ℓ'' в том смысле, что $|c', c''| > |a', a''|$ для всех $c' \in \ell' \setminus a', c'' \in \ell'' \setminus a''$.

ПРИМЕР 14.7 (МЕДИАТОР)

В гиперболическом пространстве \mathbb{L}_n равноудалённость точки q от двух заданных различных точек p_1, p_2 , где все три точки представлены векторами с концами на H_+^n , выражается равенством¹ $(p_1, q) = (p_2, q)$, означаящем, что $q \in (p_1 - p_2)^\perp$. Таким образом, ГМТ $q \in \mathbb{L}_n$, равноудалённых от двух заданных точек $p_1 \neq p_2$, высекается из \mathbb{L}_n проективной гиперплоскостью $(p_1 - p_2)^\perp$, полярной к точке $p_1 - p_2$, которая лежит вне \mathbb{L}_n по упр. 14.17 на стр. 268. Как и в евклидовой геометрии, эта гиперплоскость перпендикулярна прямой $(p_1 p_2)$ и проходит через точку $(p_1 + p_2)/2 \in \mathbb{L}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.3

Если $(n + 1)$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{L}_n$ не лежат в гиперплоскости, а точки $a, b \in \mathbb{L}_n$ таковы, что $|a, p_i| = |b, p_i|$ для всех $0 \leq i \leq n$, то $a = b$.

Доказательство. Если $a \neq b$, то согласно прим. 14.7 все точки $p_i \in (a - b)^\perp$. □

14.4.2. Группа изометрий. Гиперплоскость $u^\perp \subset \mathbb{P}(V)$, лоренцево ортогональная вектору $u \in V$, пересекает гиперболическое пространство \mathbb{L}_n , если и только если $(u, u) < 0$. Отражение в такой гиперплоскости $\sigma_u : V \rightarrow V, v \mapsto v - 2(u, e) \cdot u$ задаёт линейную проективную инволюцию $\sigma_u : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, оставляющую на месте точку u и все точки гиперплоскости u^\perp . Она переводит в себя абсолютную квадрику $G \subset \mathbb{P}(V)$ и пространство Лобачевского \mathbb{L}_n . Возникающее таким образом изометрическое преобразование $\sigma_u : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ отправляет точку $p \in \mathbb{L}_n$ в такую точку $\sigma_u(p) \in (pu)$, что точки p и $\sigma_u(p)$ гармоничны на прямой (pu) точкам u и $u^* = (pu) \cap u^\perp$, вторая из которых сопряжена точке u относительно абсолюты. Для любых двух различных точек $p_1, p_2 \in \mathbb{L}_n$ существует единственная гиперплоскость, отражение в которой переводит эти точки друг в друга. Это в точности медиаторная гиперплоскость $(p_1^+ - p_2^+)^\perp$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.18. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 14.3

Всякое изометрическое преобразование $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ задаётся лоренцево ортогональным линейным оператором $g : V \simeq V$, который определяется преобразованием g однозначно с точностью до умножения на ± 1 . Каждое изометрическое преобразование является композицией не более $n + 1$ отражений в гиперплоскостях. Для любых двух наборов из $n + 1$ не содержащихся в гиперплоскости точек $p_i, q_i, 0 \leq i \leq n$, таких что $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$ для всех i, j , существует

¹Обратите внимание, что в отличие от прим. 14.3 на стр. 260 в этом равенстве нет модулей, см. форм. (14-27) на стр. 268.

единственное изометрическое преобразование $g : \mathbb{L}_n \simeq \mathbb{L}_n$, переводящее точку p_i в точку q_i для каждого i .

Доказательство. Представим все точки векторами с концами на H_+^n . Тогда равенства $|p_i, p_j| = |q_i, q_j|$ для всех i, j означают равенство матриц Грама этих наборов векторов. Поэтому существует линейный лоренцево ортогональный оператор $g : V \rightarrow V$, переводящий векторы p_i в векторы q_i . Согласно предл. 14.3, каждая точка $z \in \mathbb{L}_n$ однозначно определяется своими расстояниями как до точек p_i , так и до точек q_i . Поэтому всякое изометрическое преобразование $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$, переводящее точки p_i в точки q_i , совпадает с задаваемым оператором g преобразованием $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$. Это доказывает первое и последнее утверждения теоремы. Единственность оператора g с точностью до знака проверяется той же выкладкой, что и в упр. 14.10 на стр. 262, а его разложение в композицию не более $n + 1$ отражений — теми же рассуждениями, что и в теор. 7.1 на стр. 107, но с использованием упр. 14.18. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.19. Аккуратно проделайте все эти рассуждения.

Следствие 14.2

Всякое изометрическое преобразование $g : \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$ однозначно продолжается на абсолют до непрерывного преобразования $g : \bar{\mathbb{L}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{L}}_n$, где $\bar{\mathbb{L}}_n$ означает замыкание \mathbb{L}_n в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, и однозначно восстанавливается по своему действию на абсолют. \square

Пример 14.8 (гиперболические сферы)

Гиперболическая сфера радиуса r с центром в точке $p \in \mathbb{L}_n$ определяется как ГМТ $x \in \mathbb{L}_n$ с $|p, x| = r$. Это гладкая вещественная проективная квадрика с уравнением¹

$$(p, x)^2 - (x, x) \cdot (p, p) \cdot \text{ch}^2 r = 0. \quad (14-37)$$

Все такие квадрики лежат в пучке $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$, натянутом на вырожденную квадрику Π_p ранга 1, которая задаётся квадратичной формой $q_0(x) = (p, x)^2$ из первого слагаемого в (14-37) и представляет собою двойную полярную гиперплоскость p^\perp точки p , а также абсолютную квадрику G , которая задаётся квадратичной формой $q_\infty(x) = (x, x)$ из второго слагаемого в (14-37). Симметричная билинейная форма квадрики $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$ имеет вид $\tilde{q}_\lambda(x, y) = (p, x)(p, y) - \lambda(x, y)$, и полярная линейная форма точки p относительно неё

$$\tilde{q}_\lambda(p, y) = (p, p)(p, y) - \lambda(p, y) = (p, y) \cdot ((p, p) - \lambda)$$

тождественно зануляется при $\lambda = (p, p)$. Поэтому сфера нулевого радиуса $S_{(p,p)} = \Pi_p - (p, p) \cdot G$ особа в точке p .

УПРАЖНЕНИЕ 14.20. Убедитесь, что в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ квадрика $S_{(p,p)}$ представляет собою простой конус с вершиной в p , образованный всеми (комплексными) касательными прямыми, опущенными из p на G .

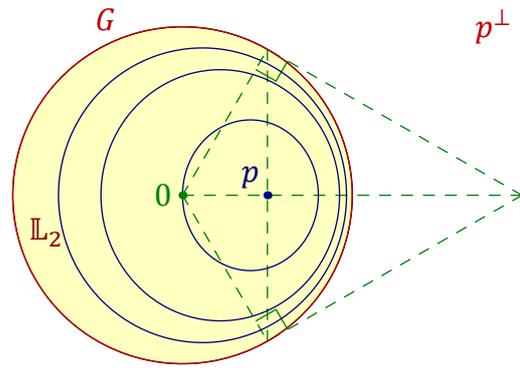


Рис. 14-22. Пучок окружностей с центром в p на плоскости Лобачевского.

¹См. первую из форм. (14-25) на стр. 268.

Группа Γ_p всех изометрических преобразований $\mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{L}_n$, оставляющих точку p на месте, переводит в себя каждую из трёх квадрик $S_{(p,p)}$, $S_0 = \Pi_p$, $S_\infty = G$, а значит, и каждую квадрику из натянутого на них пучка. Поскольку группа Γ_p транзитивно действует на проходящих через точку p прямых, каждая гиперболическая сфера $S_\lambda = \Pi_p - \lambda G$ представляет собою одну орбиту группы Γ_p . Гиперболический радиус r сферы S_λ связан с параметром пучка λ соотношением

$$\lambda = (p, p) \cdot \operatorname{ch}^2 r. \tag{14-38}$$

В частности, множество вещественных точек сферы S_λ непусто при $\lambda \geq (p, p)$, и при $\lambda = (p, p)$ гиперболическая сфера вырождается в одну двойную точку p .

Если отождествить плоскость Лобачевского \mathbb{L}_2 с единичным кругом в аффинной карте U_0 и ввести в нём декартовы координаты (x, y) так, чтобы $p = (c, 0)$, то лоренцев скалярный квадрат точки p будет равен $(p, p) = 1 - c^2$, а пучок гиперболических окружностей с центром в p будет выглядеть как пучок эллипсов¹ с уравнениями $(cx - 1)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$, см. рис. 14◊22.

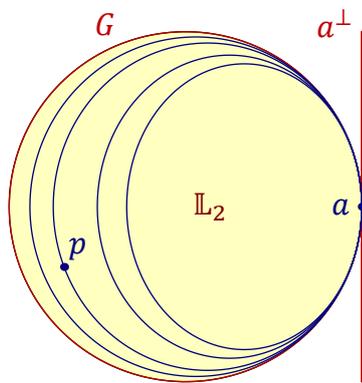


Рис. 14◊23. Пучок орициклов с полюсом в точке a на абсолюте.

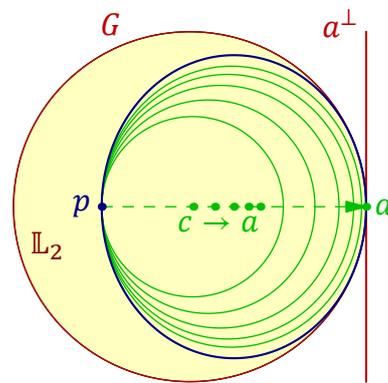


Рис. 14◊24. Орицикл как предел проходящих через p окружностей неограниченного радиуса.

ПРИМЕР 14.9 (Орициклы)

Квадрики из пучка, порождённого абсолютном G и двойной касательной плоскостью $T_a G$ в некоторой точке $a \in G$ на абсолюте, называются *орициклами* с полюсом a . Через любую точку $p \in \mathbb{L}_n$ и любую точку $a \in G$ проходит единственный орицикл с полюсом в a , см. рис. 14◊23. Его можно воспринимать как предел проходящих через точку p сфер, центры c которых удаляются от точки p в направлении a , а радиусы² неограниченно возрастают, см. рис. 14◊24. В отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского такие сферы не «уплощаются» в пределе до перпендикулярной к прямой (pa) гиперплоскости, проходящей через точку p , а стремятся к гладкой квадрике — орициклу с полюсом в a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.4 (Дифференциал гиперболической изометрии)

Как и в эллиптическом случае, ортогональный оператор $g : V \simeq V$ задаёт для каждой точки $p \in \mathbb{L}_n$ ортогональное линейное отображение касательных пространств

$$dg : T_p \mathbb{L}_n \simeq T_{g(p)} \mathbb{L}_n, \quad \tau \mapsto g\tau g^{-1}, \tag{14-39}$$

¹На комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$ это пучок коник с двумя базисными точками и двумя особыми кониками, как на рис. 13◊4 на стр. 238.

²Т. е. гиперболические расстояния $|p, c|$, где c это центр соответствующей сферы.

переводящее касательный вектор $\tau : p \mapsto p^\perp$ в касательный вектор

$$dg(\tau) : gp \mapsto gp^\perp, \quad gw \mapsto g\tau(w).$$

Ортогональный линейный оператор (14-14) называется *дифференциалом* изометрического преобразования $g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ в точке $p \in \mathbb{P}(V)$.

14.5. Гиперболическая форма объёма. Точно также, как и в н° 14.5 на стр. 275, с каждым ненулевым вектором w из пространства V с лоренцевым скалярным произведением связана кососимметричная n -линейная форма на V , значение которой на векторах $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ определяется равенством

$$w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n = \omega_w(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n, \quad (14-40)$$

где $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ это *лоренцев*¹ пространства. С точностью до знака, она не зависит от выбора лоренцева базиса в V , и абсолютная величина её значения на параллелепипеде из подпространства $w^\perp \subset V$ равна умноженному на $|w|$ евклидову n -мерному объёму² этого параллелепипеда вне зависимости от выбора лоренцева базиса в V . Если вектор w лежит на гиперболоиде³ H_+^n векторное подпространство w^\perp является направляющим векторным пространством касательной гиперплоскости $T_w H_+^n \subset \mathbb{A}(V)$, и ограничение на него формы $|\omega_w|$ задаёт в этой гиперплоскости евклидов объём. В координатах относительно лоренцева базиса e задаваемая равенством (14-40) дифференциальная форма

$$\omega(x) : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \omega_x(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (14-41)$$

записывается в точности также, как и на эллиптическом пространстве⁴:

$$\omega(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v x_v \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_v \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (14-42)$$

Если задана гладкая биекция $f : \Omega \rightarrow \Phi$ некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства \mathbb{R}^n на область $\Phi \subset H_+^n$, то подъём $f^* \omega$ формы ω с H_+^n на \mathbb{R}^n в каждой точке $z \in \Omega$ пропорционален форме евклидова объёма на \mathbb{R}^n . Абсолютная величина коэффициента пропорциональности является неотрицательной функцией на области Ω

$$\varrho(z) = |\omega_{f(z)}(df(u_1), df(u_2), \dots, df(u_n))|,$$

где u_1, u_2, \dots, u_n — произвольный ортонормальный базис в \mathbb{R}^n , и интеграл от этой функции называется *объёмом гиперболической области* $\Phi = f(\Omega) \subset H_+^n$:

$$\text{Vol}(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varrho(z) dz_1 \dots dz_n.$$

Как и в н° 14.3.2 на стр. 267, форму (14-42) можно по однородности распространить до *инвариантной формы объёма* на касательном пространстве $T_p \mathbb{L}_n$ в точке $p \in \mathbb{L}_n$ правилом

$$\text{Vol}_p : \Lambda^n T_p \mathbb{L}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mapsto \frac{|\omega_w(\tau_1(w), \tau_2(w), \dots, \tau_n(w))|}{|w|^{n+1}}, \quad (14-43)$$

¹См. н° 14.4 на стр. 267.

²См. н° 6.2.1 на стр. 94.

³См. формулу (14-27) на стр. 268.

⁴См. формулу (14-20) на стр. 265.

которое не зависит от выбора ненулевого представителя $w \in p$ и при $w \in H_+^n$ и $u_i = \tau_i(w)$ превращается в форму (14-41)

$$\text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \omega_w(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Как и в эллиптическом случае, форма (14-43) обладает тем свойством, что для любого лоренцево ортогонального линейного оператора $g : V \simeq V$ выполняется равенство

$$\text{Vol}_{g(p)}(dg(\tau_1), dg(\tau_2), \dots, dg(\tau_n)) = \text{Vol}_p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

где $dg : T_p\mathbb{P}(V) \rightarrow T_{g(p)}\mathbb{P}(V)$ это дифференциал¹ преобразования $g : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V)$.

ПРИМЕР 14.10 (ПОДЪЁМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОБЪЁМА НА ЕВКЛИДОВ ШАР $B^n \subset U_0$)

Обозначим через $t_i = x_i/x_0$ стандартные координаты в аффинной карте $U_0 \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, которую мы будем рассматривать как евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, w)_0 \stackrel{\text{def}}{=} -(u, w) = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n,$$

противоположным по знаку к ограничению лоренцева скалярного произведения с \mathbb{R}^{n+1} на e_0^\perp . Лежащий на единичном гиперboloиде вектор $x(t) \in H_+^n$, который представляет ту же самую точку пространства \mathbb{L}_n , что и вектор $t \in B^n \subset U_0$, имеет вид $x(t) = x_0 \cdot (e_0 + t)$ и лоренцев скалярный квадрат $1 = (x(t), x(t)) = x_0^2 \cdot (1 + (t, t))$, откуда $x_0 = (1 + (t, t))^{-\frac{1}{2}}$. Так как $x_i = t_i x_0$, дифференциал $dx_i = x_0 dt_i + t_i dx_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n &= x_0^n dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n, \end{aligned}$$

$$dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = x_0^{n-1} dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n.$$

Подставляя это в форму объёма (14-42), заключаем, что её подъём с гиперboloида H_+^n на евклидов шар $B^n \subset U_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t) &= x_0 dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= x_0^{n+1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n + \\ &+ x_0^n \sum_{i=1}^n (-1)^i t_i dx_0 \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt}_i \wedge \dots \wedge dt_n = \\ &= \frac{dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n}{(1 - (t, t)_0)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент растяжения гиперболического объёма по отношению к евклидову в точке $t \in B^n$ зависит только от евклидовой нормы $|t|^2 = (t, t)_0$ вектора t и равен

$$\varrho(t) = (1 - |t|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (14-44)$$

¹См. опр. 14.4 на стр. 274.

Пример 14.11 (площадь гиперболического треугольника)

Рассмотрим на плоскости Лобачевского \mathbb{L}_2 прямоугольный Δabc с прямым углом в вершине c и гиперболическими углами α и β в вершинах a и b . Поместим в вершину a начальный вектор лоренцева базиса в \mathbb{R}^3 и обозначим через u и w изображения вершин b и c в проходящей через конец вектора $a \in \mathbb{R}^3$ стандартной аффинной карте $U_0 = a + a^\perp$ на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, см. рис. 14◊25. Поскольку прямые (bc) и (ac) сопряжены в \mathbb{P}_2 относительно абсолютной коники G , их изображения (aw) и (uw) в карте U_0 перпендикулярны друг другу в евклидовой структуре на a^\perp , а так как гиперболические углы между касательными векторами к \mathbb{P}_2 в точке a совпадают с евклидовыми углами в пространстве a^\perp , евклидов угол между прямыми (au) и (aw) равен гиперболическому углу α в Δabc . Обозначим через ℓ евклидову длину катета $[a, w]$ евклидова Δauw . По форм. (14-32) на стр. 270 она выражается через гиперболическую длину $|a, c|$ соответствующего катета в Δabc как $\ell = \text{th } |a, c|$. Гиперболическая площадь Δabc равна интегралу от функции (14-44) по Δauw :

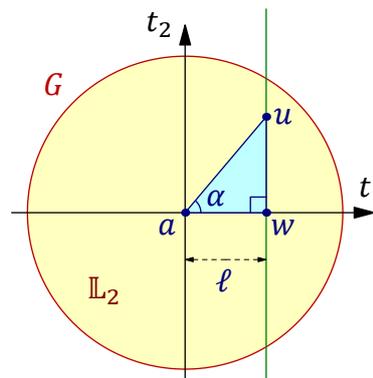


Рис. 14◊25. Изображение гиперболического Δabc в карте $U_0 = a + a^\perp$, где $\ell = \text{th } |a, c|$.

$$S(\Delta abc) = \int_{\Delta auw} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} dt_1 dt_2,$$

где (t_1, t_2) — декартовы координаты в карте U_0 , а $r^2 = t_1^2 + t_2^2$ — квадрат евклидова расстояния до нуля. Переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} t_1 &= r \cos \varphi & dt_1 &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ t_2 &= r \sin \varphi & dt_2 &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ dt_1 \wedge dt_2 &= r dr \wedge d\varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} S(\Delta acb) &= \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{\frac{\ell}{\cos \varphi}} (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr = \int_0^\alpha \left((1 - \ell^2 / \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\alpha \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \ell^2 - \sin^2 \varphi}} - \alpha = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} \right) - \alpha. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.21. Убедитесь, что $\sin \alpha / \sqrt{1 - \ell^2} = \cos \beta$.

Итак, гиперболическая площадь прямоугольного треугольника с углами α, β равна

$$S(\Delta acb) = \arcsin(\cos \beta) - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha.$$

Разрезая произвольный треугольник на два прямоугольных треугольника высотой, заключаем, что гиперболическая площадь треугольника с углами α, β, γ равна $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. В частности, сумма углов треугольника в гиперболической геометрии всегда строго меньше π . Из соображений непрерывности, формула для площади остаётся справедливой и для треугольников с вершинами на абсолютe, не имеющих никаких других точек на абсолютe, кроме вершин.

14.6. Конформные модели гиперболического пространства. Так называют изображения пространства Лобачевского точками евклидова пространства, в которых евклидовы углы между геодезическими равны гиперболическим углам, однако сами геодезические изображаются не в виде евклидовых прямых, как это было в рассмотренной выше *линейной* модели $B^n \subset U_0$, а в виде некоторых коник и прямых специального вида. Одна из таких моделей получается из изображения пространства Лобачевского $\mathbb{L}_n \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ внутренностью единичного шара $B^n \subset U_0$ представленным на рис. 14◊26 биективным квадратичным преобразованием $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$ этого шара в точно такой же единичный шар

$$B_0^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{A}(e_0^\perp), \quad (14.45)$$

но лежащий в проходящей через нуль гиперплоскости e_0^\perp , параллельной карте U_0 .

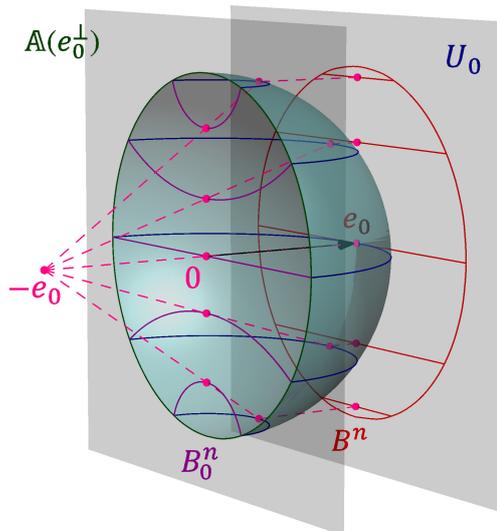


Рис. 14◊26. Квадратичное преобразование $\kappa : B^n \rightarrow B_0^n$.

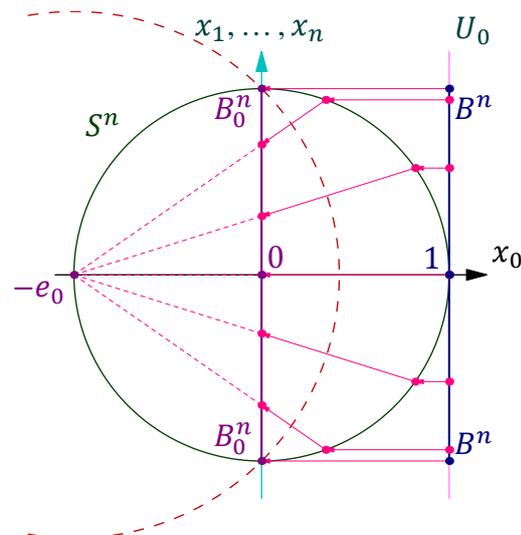


Рис. 14◊27. Вид сбоку на рис. 14◊26.

Преобразование κ осуществляется в два шага. Сначала параллельно спроектируем шар B^n в направлении вектора $-e_0$ на положительную полушферу $x_0 \geq 0$ единичной *евклидовой* сферы

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}. \quad (14.46)$$

Затем отобразим эту полушферу на параллельную карте U_0 экваториальную плоскость $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ стереографической проекцией из диаметрально противоположной к e_0 точки $-e_0 \in S^n$. На первом шаге лежащие в шаре B^n отрезки прямых из U_0 переходят в дуги окружностей, пересекающих экваториальную плоскость $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ под прямым углом, как на рис. 14◊26. Согласно прим. 6.9 на стр. 104, следующая далее стереографическая проекция является ограничением на сферу S^n инверсии относительно большей сферы, изображённой на рис. 14◊27 красным пунктиром. Она имеет центр в точке $-e_0$ и пересекает аффинную гиперплоскость $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ по той же самой $(n-1)$ -мерной единичной сфере с центром в нуле

$$S^{n-1} = S^n \cap \mathbb{A}(e_0^\perp) = \{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in e_0^\perp \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \quad (14.47)$$

что и сфера (14.46). Поскольку стереографическая проекция сохраняет углы и переводит окружности в окружности или прямые, геодезические пространства \mathbb{L}_n изображаются в шаре B_0^n в виде

его диаметров, а также всевозможных дуг окружностей, пересекающих граничную сферу S^{n-1} под прямым углом. При этом прямыми изобразятся в точности те геодезические, что проходят через точку $e_0 \in \mathbb{L}_n$, которая переводится преобразованием κ в центр шара B_0^n .

УПРАЖНЕНИЕ 14.22. Обозначим через ϱ и ϱ_0 евклидовы расстояния от центров шаров B^n и B_0^n до точек $w \in B^n$ и $w_0 = \kappa(w) \in B_0^n$ соответственно. Покажите, что они связаны соотношениями $\varrho = 2\varrho_0 / (1 + \varrho_0^2)$ и $\varrho_0 = (1 - \sqrt{1 - \varrho^2}) / \varrho$.

ЛЕММА 14.1

Отражение $\sigma_u : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n, w \mapsto w - 2(w, u) \cdot u / (u, u)$, в ортогональной гиперплоскости $u^\perp \subset V$ к вектору u с концом в карте U_0 и отрицательным лоренцевым квадратом $(u, u) < 0$ действует в модели B_0^n как инверсия $\sigma_{q,d} : B_0^n \rightarrow B_0^n$ относительно $(n - 1)$ -мерной сферы в пространстве $A(e_0^\perp)$, имеющей центр в точке $q = q(u) = u - (u, e_0) \cdot e_0$, которая является параллельной проекцией точки $u \in U_0$ на $A(e_0^\perp)$ вдоль вектора $-e_0$, и радиус $d = d(u)$, квадрат которого

$$d^2 = \deg_{S^{n-1}} q = \|q\|^2 - 1$$

равен степени точки q относительно единичной $(n - 1)$ -мерной сферы (14.47).

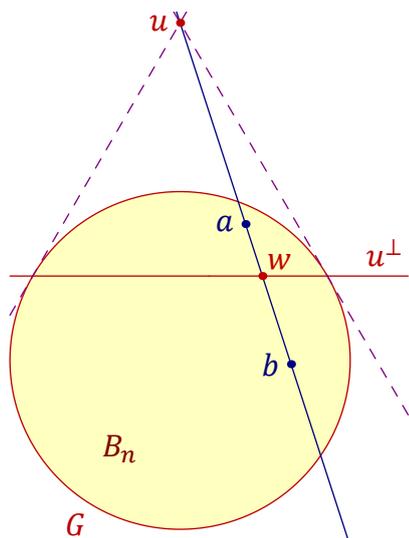


Рис. 14♦28. σ_u -зеркальные точки a, b имеют $[a, b, u, w] = -1$.

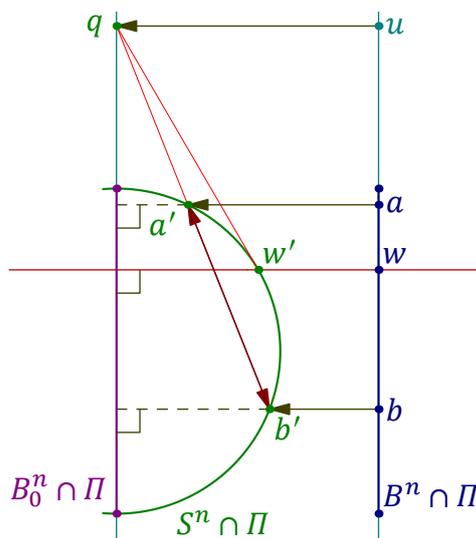


Рис. 14♦29. Параллельная проекция точек a, b, u, w на полуокружность $S^n \cap \Pi$.

Доказательство. Отражение $\sigma_u : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ переводит в себя каждую проходящую через точку u прямую $\ell \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ и действует на ней как линейная инволюция с неподвижными точками u и $w = \ell \cap u^\perp$. Поэтому точки $a, b \in B^n$ переводятся друг друга отражением σ_u , если и только если проективная прямая (ab) проходит через точку u и на этой прямой точки a, b гармоничны точкам u и $w = (ab) \cap u^\perp$, см. рис. 14♦28, где изображён вид на аффинную гиперплоскость U_0 вдоль вектора $-e_0$. Параллельная проекция точек u, a и b на полусферу $x_0 \geq 0$ сферы S^n происходит внутри двумерной аффинной плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$, которая проходит через аффинную прямую $(ab) \cap U_0$ параллельно вектору $-e_0$. Плоскость Π изображена на рис. 14♦29. Она пересекает сферу S^n по окружности с диаметром $B_0^n \cap \Pi$. Инволюция $\sigma_u : (ab) \rightarrow (ab)$

задаёт инволюцию на пучке параллельных прямых, перпендикулярных этому диаметру. Неподвижными точками этой инволюции являются прямая (uq) и поляр (wp) точки q относительно окружности $\Pi \cap S^n$, а центр¹ пучка сопряжён точке q относительно окружности $S^n \cap \Pi$. В прим. 11.8 на стр. 204 мы видели, что в этом случае любые две находящиеся в инволюции друг с другом прямые пучка пересекают полуокружность по точкам, которые состоят друг с другом в инволюции, задаваемой на конике $\Pi \cap S^n$ точкой q , т. е. лежат с точкой q на одной прямой. Таким образом, параллельная проекция шара B_n на положительную полусферу $x_0 \geq 0$ единичной сферы S^n переводит зеркальные относительно u^\perp точки a, b в точки $a', b' \in S^n$, которые переводятся друг в друга инверсией сферы S^n с центром в точке q . Согласно прим. 6.10 на стр. 104, стереографическая проекция сферы S^n из точки $-e_0$ на экваториальную гиперплоскость $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ переводит инверсию сферы S^n с центром в точке q в инверсию гиперплоскости $\mathbb{A}(e_0^\perp)$ относительно $(n-1)$ -мерной сферы с центром в q и радиусом, квадрат которого равен степени точки q относительно единичной сферы S^n . \square

Следствие 14.3

Группа изометрических преобразований пространства \mathbb{L}_n в модели B_0^n это группа преобразований единичного шара B_0^n , порождённая всевозможными инверсиями объёмлющего евклидова пространства $\mathbb{A}(e_0^\perp)$, имеющими центр вне шара B_0^n и переводящими этот шар в себя. В частности, изометрические преобразования сохраняют евклидовы углы между геодезическими. \square

Следствие 14.4

Евклидовы углы между геодезическими в модели B_0^n равны гиперболическим углам.

Доказательство. Евклидовы углы между проходящими через точку e_0 прямыми в карте U_0 совпадают с гиперболическими углами между этими прямыми. Преобразование $\kappa: B^n \rightarrow B_0^n$ переводит эти прямые в диаметры шара B_0^n , сохраняя евклидовы углы. Поскольку группа изометрий пространства \mathbb{L}_n позволяет перевести любую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины в любую другую точку с парой отложенных от неё касательных векторов единичной длины с тем же самым гиперболическим углом между ними, эта группа транзитивно действует на парах геодезических, пересекающихся под заданным гиперболическим углом. Так как группа гиперболических изометрий действует на шаре B_0^n преобразованиями, сохраняющими евклидовы углы между геодезическими, и в центре шара гиперболические углы совпадают с евклидовыми, точно такое же совпадение имеет место и в любой другой точке. \square

Пример 14.12 (гиперболические сферы в конформной модели B_0^n)

Гиперболическая сфера² радиуса r с центром в точке $p = e_0 + q \in B^n$, где $q \in e_0^\perp$, состоит из точек $x = e_0 + w \in B_n$, где $w \in e_0^\perp$, удовлетворяющих уравнению³

$$(p, x)^2 - (p, p)(x, x) \operatorname{ch}^2 r = (1 - (q, w))^2 - (1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2) \operatorname{ch}^2 r = 0, \quad (14-48)$$

где $\|u\|^2 = -(u, u)$ означает евклидов скалярный квадрат вектора $u \in e_0^\perp$. Параллельная проекция на единичную сферу S^n вдоль вектора $-e_0$ отображает такую точку $x = w + e_0$ в точку

¹Он лежит на бесконечности плоскости Π в направлении вектора e_0 , евклидово перпендикулярного проходящему через точку q диаметру окружности.

²См. прим. 14.8 на стр. 273.

³См. формулу (14-37) на стр. 273.

$x' = w + e_0 \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2}$, для которой в силу (14-48) выполняется равенство

$$\left(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x' \right) = (q, w) - \sqrt{(1 - \|q\|^2)(1 - \|w\|^2)} \operatorname{ch} r = 1.$$

Таким образом, проекция гиперболической сферы радиуса r с центром в точке $p = e_0 + q \in B^n$ на единичную сферу S^n представляет собою евклидову сферу, которая высекается из S^n гиперплоскостью с уравнением $\left(q - e_0 \cdot \sqrt{1 - \|q\|^2} \operatorname{ch} r, x \right) = 1$. Поскольку стереографическая проекция переводит сферы в сферы, семейство гиперболических сфер с центром в данной точке $a \in B_0^n$ выглядит в модели B_0^n как пучок евклидовых сфер, натянутый на двойную точку a и абсолютную сферу S^{n-1} .

ПРИМЕР 14.13 (ДИСК ПУАНКАРЕ)

Конформную модель плоскости Лобачевского \mathbb{L}_2 в единичном круге B_0^2 на евклидовой плоскости обычно называют *диск Пункаре*. Геодезические в этой модели изображаются диаметрами круга, а также дугами окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. Это ровно те окружности, инверсия относительно которых переводит диск в себя, и такие инверсии как раз и являются гиперболическими отражениями относительно геодезических. Гиперболические окружности с центром в точке $a \in \mathbb{L}_2$ изображаются на диске Пуанкаре евклидовыми окружностями из пучка, натянутого на абсолют и двойную точку a . Каждая окружность этого пучка перпендикулярна всем проходящим через точку a геодезическим, т. е. проходящим через a евклидовым окружностям, перпендикулярным абсолюту. Орициклы также видны на диске Пуанкаре как окружности, касающиеся абсолюта. Любой треугольник с нулевыми углами и вершинами на абсолюте имеет площадь π , не смотря на то, что его стороны имеют бесконечную длину. Отражения в сторонах такого треугольника замащивают всю плоскость Лобачевского счётным множеством треугольников с попарно не пересекающимися внутренностями, конгруэнтных исходному треугольнику.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 0.1. См. [предл. 1.2](#) на стр. 18.

Упр. 1.1. Равенство $F(0) = 0$ получается прибавлением вектора $-F(0)$ к левой и правой части равенства $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$. Из равенства $0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v)$ вытекает, что $-F(v) = F(-v)$.

Упр. 1.3. Ответ: $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$, где $y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$, $y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$.

Упр. 1.4. Первое следует из выкладки $0 = f(a + b, a + b) = f(a, b) + f(b, a)$, второе — из выкладки $f(v, v) = -f(v, v)$.

Упр. 1.5. Первое следует из того, что по правилу треугольника $\overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB}$ для любого вектора \overline{AB} , второе — из того, что $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0$, третье — из того, что при $\overline{AB} = \overline{DC}$ имеем $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD}$ и наоборот.

Упр. 1.9. $s(PAB) : s(PBC) = s(\overline{PA}, \overline{PB}) : s(\overline{PB}, \overline{PC}) = s(\overline{PA} - \overline{PB}, \overline{PB}) : s(\overline{PB}, \overline{PC} - \overline{PB}) = s(\overline{BA}, \overline{PB}) : s(\overline{PB}, \overline{BC}) = s(\overline{PB}, \overline{AB}) : s(\overline{PB}, \overline{PC}) = \overline{AB} : \overline{BC}$.

Упр. 1.10. При замене функции s или любого из векторов $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ на пропорциональные с ненулевым коэффициентом, коэффициент пропорциональности сократится. Неизменность двойного отношения при одновременной перестановке двух пар прямых также непосредственно видна из формулы форм. (1-21) на стр. 22.

Упр. 1.11. Для любой точки $A \in a$ имеется единственная параллельная b прямая $b' \ni A$. Точка $C = b' \cap c$ однозначно определяется по A . Далее, имеется единственная проходящая через C прямая a' , параллельная a и $B = a' \cap b$ тоже однозначно определяется. Произвол в выборе точки $A \in a$ отвечает гомотетии с центром в O .

Упр. 1.12. Поскольку гармоничность означает, что прямая $b = (OB)$ пересекает любую параллельную $a = (OA)$ прямую в середине отрезка, отсекаемого прямыми $c = (OC)$ и $d = (OD)$, гармоничность равносильна равенству $[A, B, C, D] = [A, B, D, C]$. Но $[A, B, D, C] = [B, A, C, D]$, т. к. двойное отношение не меняется при одновременной транспозиции двух пар точек. Имеется и чисто алгебраическое решение: прямо из определения двойного отношения вытекает равенство $[A, B, C, D] = [B, A, C, D]^{-1}$, из которого всё и следует.

Упр. 2.1. По [упр. 1.11](#) существуют единственные с точностью до гомотетий с центрами в O и O' тройки точек A, B, C и A', B', C' на прямых a, b, c и a', b', c' соответственно, такие что четырёхугольники $OABC$ и $O'A'B'C'$ являются параллелограммами. Первый из них переводится во второй единственным аффинным преобразованием.

Упр. 2.2. Это следует из равенства $Q + w = \varphi(Q) = P + u + D_\varphi(\overline{PQ})$.

Упр. 2.4. По [теор. 1.1](#) на стр. 13 $s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det \Phi_e$. Пусть $(u, v) = (e_1, e_2) \cdot M$, где M — матрица размера 2×2 , по столбцам которой стоят координаты векторов u и v . Тогда по той же [теор. 1.1](#) $s(u, v) = s(e_1, e_2) \cdot \det M$, а $s(\varphi(u), \varphi(v)) = s(f_1, f_2) \cdot \det M$, поскольку $(\varphi(u), \varphi(v)) = (f_1, f_2) \cdot M$. Отсюда получается первое утверждение и пункт (а). Если $\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) \neq 0$, то векторы f_1, f_2 не пропорциональны и образуют базис в V . Отображение φ переводит вектор с координатами x в базисе e_1, e_2 в вектор с теми же самыми координатами x , но в базисе f_1, f_2 . Поэтому оно биективно. Если $\det(f_1, f_2) = 0$, то $f_1 = \lambda f_2$, и значит, $\varphi(\lambda e_1) = \varphi(e_2)$, т. е. f не биективен. Это доказывает (б). Для доказательства (в) рассмотрим векторы $(f_1, f_2) = (e_1, e_2) \cdot A$ и векторы $(g_1, g_2) = (f_1, f_2) \cdot B = (e_1, e_2) \cdot AB$. По [теор. 1.1](#) $s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det A$, а $s(g_1, g_2) =$

$s(f_1, f_2) \cdot \det B$ и одновременно $s(g_1, g_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det(AB)$. Последнее утверждение про матрицы проверяется прямым вычислением: $\psi(\varphi(e)) = \psi(e \cdot \Phi_e) = \psi(e) \cdot \Phi_e = e \cdot \Psi_e \cdot \Phi_e$.

Упр. 2.5. Это следует из ассоциативности композиции отображений:

$$\eta \circ (\psi \circ \varphi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi : v \mapsto \eta(\psi(\varphi(v)))$$

и последнего утверждения предыдущего упр. 2.4.

Упр. 2.6. В первом задании воспользуйтесь разложением $\varphi = \tau_{\overline{OB}} \circ \varphi_O$ из предл. 2.5 на стр. 27. Во втором задании все площади умножаются на $\det A$ (ср. с упр. 2.4 на стр. 29).

Упр. 2.7. Вычитая $\psi(0)$ из правой и левой части равенства $\psi(0) = \psi(0+0) = \psi(0)+\psi(0)$, получаем $0 = \psi(0)$. Поскольку $\psi(\lambda) + \psi(-\lambda) = \psi(\lambda - \lambda) = \psi(0) = 0$, имеет место равенство $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$. Поэтому $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) + \psi(-\mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$. Мультипликативные версии этих равенств доказываются аналогично. Если $\psi(\lambda) = 0$ для какого-либо $\lambda \neq 0$, то $\psi(\mu) = \psi(\lambda\mu/\lambda) = \psi(\lambda)\psi(\mu/\lambda) = 0$ для всех μ .

Упр. 2.9. Обратным к $x + y\sqrt{2}$ числом является $\frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$, нетривиальный автоморфизм переводит $x + y\sqrt{2}$ в $x - y\sqrt{2}$.

Упр. 3.2. $\frac{(\lambda a, b)}{(\lambda a, \lambda a)} \cdot \lambda a = \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a$.

Упр. 3.3. Если заданная точка p не лежит на заданной прямой ℓ , утверждение вытекает из сл. 3.1. Если $p \in \ell$, выберите p за начало отсчёта, обозначьте через e_1 вектор скорости прямой ℓ , возьмите любой вектор b , не пропорциональный ℓ и положите $e_2 = b_{e_1^\perp}$. Тогда $e_2 \neq 0$ и перпендикулярен e_1 . Поэтому прямая $p + te_2$ перпендикулярна ℓ . Произвольный вектор $w = xe_1 + ye_2$ перпендикулярен e_1 , если и только если $x = 0$. Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.5. Рассмотрим любой ортонормальный базис e, e^\perp . Если $f = xe + ye^\perp$ образует вместе с e ортонормальный базис, то $(e, f) = 0$ влечёт $x = 0$, после чего $(f, f) = 1$ влечёт $y^2 = 1$, т. е. $f = \pm e^\perp$.

Упр. 3.6. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.7. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (u, v) \geq 0,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.3 равный квадрату отношения площадей $s(u, w)/s(e_1, e_2)$, положительному, когда u и w не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.8. $\det^2(a, b) = \det^2(a, b_a + b_{a^\perp}) = \det^2(a, b_{a^\perp}) = (a, a) \cdot (b_{a^\perp}, b_{a^\perp})$.

Упр. 3.9. Геометрическое решение: на рис. 3o7 на стр. 38 при повороте на 90° против ЧС вектор f перейдет в f^\perp , e — в e^\perp , а e^\perp — в $-e$, т. е. разложение $f = e \cdot \cos \angle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \angle(e, f)$ повернётся в разложение $f^\perp = e^\perp \cdot \cos \angle(e, f) - e \cdot \sin \angle(e, f)$. Алгебраическая проверка: вычислите $\det(f, *)$ и $(f, *)$ от $-e \cdot \sin \angle(e, f) + e^\perp \cdot \cos \angle(e, f)$.

Упр. 3.14. Условие задачи означает, что элементы матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяют уравнениям $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ и $ab + cd = 0$. Кроме того, если столбцы матрицы образуют положительный ортонормальный базис, то $ad - bc = 1$, а если отрицательный, — то $ad - bc = -1$. Из первых двух уравнений вытекает, что можно положить $a = \cos \vartheta$, $c = \sin \vartheta$, $b = \cos \psi$,

$d = \sin \psi$. Из второго уравнения $\cos(\vartheta - \psi) = 0$, и в положительном случае $\sin(\psi - \vartheta) = 1$, а в отрицательном — $\sin(\vartheta - \psi) = 1$, откуда $\psi = \vartheta + \pi/2$ и $\psi = \vartheta - \pi/2$ соответственно.

Упр. 3.15. Ответ: $\frac{|u|}{2} \cdot (1, \operatorname{ctg}(\vartheta/2))$.

Упр. 3.16. Подействуйте композицией на аффинный репер (O, v, n) , где $O \in \ell_1$, а $v, n \in V$ — единичные векторы скорости и нормали (одинаковые для обеих прямых).

Упр. 3.17. Импликации $(в) \Rightarrow (б) \Rightarrow (а)$ очевидны. В н° 2.5.1 на стр. 30 мы видели, что если отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому $(а) \Leftrightarrow (б)$. Так как соотношение $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$ влечёт $\varphi(i) = \pm i$, из линейности φ над \mathbb{R} вытекает, что $\varphi(x + yi) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x \pm iy$, т. е. $(б) \Rightarrow (в)$.

Упр. 3.19. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty, 0, 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 . Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$, а φ_{qp} переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4 , соответственно, в $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Упр. 3.20. Если аргумент $\operatorname{Arg}[z_1, z_2, z_3, z_4] = \angle z_2 z_3 z_1 - \angle z_2 z_4 z_1$ равен нулю или π , то ориентированные углы $z_2 z_3 z_1$ и $z_2 z_4 z_1$ либо нулевые и/или развёрнутые, либо опираются на одну и ту же или на дополнительные дуги одной окружности, см. прим. 3.4 на стр. 39.

Упр. 3.21. Первое следует из определения, второе и третье — из того, что образ ограничен, и значит, не может быть прямой.

Упр. 3.22. Если обозначить через h и ℓ расстояния от точек p и c до середины хорды $[a, b]$, а через δ — половину длины этой хорды, то

$$|c, p|^2 - \varrho^2 = |c, p|^2 - h^2 - \delta^2 = \ell^2 - \delta^2 = (\ell - \delta)(\ell + \delta) = |c, a| \cdot |c, b|$$

(ср. с предл. 6.5 на стр. 101 и рис. 6♦3 там же).

Упр. 3.23. Соотношение означает, что любые две зеркальные относительно D точки a, b переводятся инверсией σ_C в точки, зеркальные относительно E . Это так, поскольку инверсия относительно C переводит проходящие через a и b окружности и прямую в прямую и окружности, проходящие через $\sigma_C(a)$ и $\sigma_C(b)$, сохраняя все углы, и если первые были перпендикулярны к D , то вторые будут перпендикулярны к E .

Упр. 3.24. Отражение относительно проходящей через точку $a \in \mathbb{C}$ прямой с вектором скорости $v \in \mathbb{C}$ действует по формуле $z \mapsto a + \overline{(z - a)} \cdot v / \bar{v}$.

Упр. 3.25. Ответ: $\sqrt{1/\gamma}$.

Упр. 3.26. Годится любое дробно линейное преобразование, переводящее какие-либо три упорядоченные против ЧС точки единичной окружности в точки $\infty, 0$ и 1 соответственно. Например, $z \mapsto \frac{z-i}{z-1} : \frac{1+i}{2}$, где три точки суть $1, i$ и -1 .

Упр. 4.5. Пусть $W \not\subset U$ два подпространства в V . Выберем вектор $w \in W \setminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall u \in U \quad w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 4.6. Индукция по числу подпространств с использованием разобранного перед этим случая двух подпространств.

Упр. 4.9. Если линейная форма зануляется на неких векторах, то она зануляется и на любой их линейной комбинации.

Упр. 4.11. Если $v_1 = v_2 + u$ и $w_1 = w_2 + u'$, где $u, u' \in U$, то $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$ и $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$. Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из V .

Упр. 4.15. Пусть матрица (f_{ij}) отображения F записана в базисах

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_n \in W,$$

т. е. $F(u_j) = \sum_i w_i \cdot f_{ij}$. Число f_{ij}^* равно i -той координате ковектора $F^*(w_j^*)$ в базисе $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$, т. е. свёртке $\langle F^* w_j^*, u_i \rangle = \langle w_j^*, F u_i \rangle = \langle w_j^*, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \rangle = f_{ji}$.

Упр. 5.2. Индукция по n . Каждая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ , переставляющей между собою элементы n и g_n множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n . По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n .

Упр. 5.4. Если $g = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, где $\sigma_i \sigma_i = \text{Id}$ для всех i , то $g^{-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_1$. В частности, это верно для разложения g в композицию транспозиций.

Упр. 5.6. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.

Упр. 5.7. При условии, что все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из i и из j пересекаются между собою нечётное число раз, если пара (i, j) инверсна, и чётное число раз, если пара не инверсна (в действительности, картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух ситуациях равнялись 1 и 0 соответственно). Знак тасующей перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где $\text{вес } |I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v i_v$. Действительно, нити, выходящие из чисел i_1, i_2, \dots, i_k верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j -точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 5.10. Индукция по n и суммирование по треугольнику Паскаля показывают, что $P_k^n = \binom{n+k-1}{k}$. Предел отношения $\binom{k+n-1}{n} / k^n$ при фиксированной размерности n и $k \rightarrow \infty$ равен $1/n!$.

Упр. 5.12. При чётном n центр $\mathbb{k} \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим (имеющим нечётную степень) мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$.

Упр. 5.13. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 6.4. Значение линейной формы g_{e_j} на базисном векторе e_α равно (e_α, e_j) , и значит, столбец координат этой формы в двойственном базисе e^* состоит из произведений (e_α, e_j) .

Упр. 6.6. Если $v \in U \cap U^\perp$, то $(v, v) = 0$, откуда $v = 0$.

Упр. 6.9. Для любого вектора a выполняется равенство $\omega(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = (a, w)$ (ср. со вторым правилом Крамера¹).

Упр. 6.10. Уравнение $(x - (a+b)/2, x - (a+b)/2) = ((b-a)/2, (b-a)/2)$, задающее сферу $S((a+b)/2, |a-b|/2)$, можно переписать как

$$((x-a) + (x-b), (x-a) + (x-b)) = ((x-a) - (x-b), (x-a) - (x-b)).$$

¹См. предл. 5.5 на стр. 81.

После раскрытия скобок и сокращения скалярных квадратов это превращается в уравнение

$$(x - a, x - b) = 0.$$

Упр. 6.12. Радиус каждой из сфер равен степени её центра относительно другой сферы. Центр каждой из сфер перейдет при инверсии относительно другой сферы в точку пересечения радикальной гиперплоскости¹ с линией центров.

Упр. 7.2. Первое следует из того что (собственные) изометрии образуют группу, второе — из того, что композиция любого несобственной изометрии из группы фигуры с отражением в содержащей эту фигуру гиперплоскости является собственной изометрией и задает то же самое преобразование фигуры, что и исходная несобственная изометрия.

Упр. 7.3. Для любой биекции из множества вершин тетраэдра в себя существует единственная единственная линейная изометрия, действующая на вершины согласно заданной биекции.

Упр. 7.4. Обозначим через v_i вектор, идущий из центра симплекса Δ в вершину i . Вектор $n_{ij} = v_i - v_j$ ортогонален гиперплоскости π_{ij} , поскольку для любого $k \neq i, j$ скалярное произведение $(n_{ij}, v_k - (v_i + v_j)/2) = (v_i, v_k) - (v_j, v_k) + (v_i, v_i)/2 - (v_j, v_j)/2 = 0$, т. к. все произведения (v_i, v_j) с $i \neq j$ и все скалярные квадраты (v_i, v_i) одинаковы. Аналогичная выкладка показывает, что при $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ векторы n_{ij} и n_{km} ортогональны. Векторы $v_i - v_k$ и $v_k - v_j$ в натянутой на них двумерной плоскости являются сторонами правильного треугольника с вершинами в концах векторов v_i, v_j и v_k . Поэтому угол между ними равен $\pi/3$.

Упр. 7.5. Выберем вектор u произвольно внутри угла e . Линейная оболочка вектора u и пересечения каких-либо двух зеркал конфигурации является гиперплоскостью в V , и всего таких гиперплоскостей имеется конечное число. Поскольку объединение конечного числа гиперплоскостей не может совпадать со всем пространством², возможность для выбора w есть.

Упр. 7.8. Минимальный угол между зеркалами не может быть тупым, и прямой он только когда есть всего два ортогональных зеркала. Если угол $\angle(a_i, a_j)$ тупой, между этими векторами имеется зеркало. Нормальный вектор этого зеркала можно выбрать лежащим внутри угла, образуемого векторами a_i и $-a_j$, т. е. вида $\alpha a_i - \beta a_j$ с $\alpha, \beta > 0$. Если угол $\angle(a_i, a_j)$ острый, то угол между векторами a_i и $-a_j$ тупой, а значит, между ними есть зеркало с направляющим вектором, лежащим между векторами a_i, a_j , т. е. вида $\alpha a_i + \beta a_j$ с $\alpha, \beta > 0$.

Упр. 7.9. Пусть точки $x \in a_i^\perp, y \in a_j^\perp$ таковы, что $(a_k, x) > 0$ для всех $a_k \in \Phi_v^+$ с $k \neq i$ и $(a_k, y) > 0$ для всех $a_k \in \Phi_v^+$ с $k \neq j$. Тогда их ортогональные проекции на плоскость Ψ_{ij} лежат на сторонах a_i^\perp, a_j^\perp угла $a_i^+ \cap a_j^+$, и проекция отрезка $[x, y]$ не пересекает ни одной прямой a_k^\perp с $k \neq i, j$.

Упр. 7.10. Совпадение линейной оболочки корней a_i со всем пространством V равносильно равенству $\bigcap a_i^\perp = 0$. С другой стороны, множество неподвижных относительно всей группы G векторов пространства V тоже является пересечением этих зеркал.

Упр. 7.11. Пусть $a_r = \sum_{i < r} \lambda_i a_i + \sum_{j > r} \lambda_j a_j$, где все $\lambda_i \leq 0$ и некоторые из них строго положительны.

Выражая векторы a_j через векторы a_i с положительными коэффициентами, получим равенство вида $\mu a_r = \sum_{i < r} \mu_i a_i$, в котором все $\mu_i \geq 0$ и некоторые из них строго положительны. Скалярно умножая обе части на произвольный вектор $v \in C_e$, получим справа строго положительное

¹Т. е. ГМТ, имеющих равные степени относительно обеих сфер. В данном случае эта гиперплоскость линейно порождается пересечением сфер.

²См. упр. 4.4 на стр. 60.

число. Поэтому $\mu \cdot (v, a_r) > 0$, и $\mu > 0$, так как $(v, a_r) > 0$. Тем самым, вектор a_r линейно выражается с положительными коэффициентами через векторы a_1, a_2, \dots, a_{r-1} , и мы должны были бы его выкинуть.

Упр. 7.12. Скалярный квадрат стоящего в обеих частях вектора

$$\left(\sum_{\alpha} \lambda_{i_{\alpha}} a_{i_{\alpha}}, \sum_{\beta} \mu_{j_{\beta}} a_{j_{\beta}} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{i_{\alpha}} \mu_{j_{\beta}} (a_{i_{\alpha}}, a_{j_{\beta}}) \leq 0$$

в силу неравенств $(a_i, b_j) \leq 0$. Поэтому и этот вектор, и все слагаемые в предыдущей формуле нулевые.

Упр. 7.13. По сл. 7.2 на стр. 111 отражение относительно примыкающей к камере $C_{\mu} = g_{\mu}(C_e)$ стенки $g_{\mu}(a_i^{\perp})$, где $a_i \in \Delta_e$ — произвольный простой корень, равно $\sigma_{g_{\mu}(a_i)} = g_{\mu} \sigma_i g_{\mu}^{-1}$, а значит, является композицией простых отражений σ_i , ибо g_{μ} является такой композицией.

Упр. 7.14. Связные компоненты графа как раз и отвечают взаимно ортогональным подмножествам корней.

Упр. 7.15. Выкинем из графов все остальные вершины вместе с приходящими в них рёбрами и обозначим через a_1, a_2, a_3, \dots корни, отвечающие вершинам оставшегося графа, прочитанным слева направо. Для первого графа матрица Грама векторов $u = a_1 + 2a_2, w = 2a_3 + a_4$ имеет

$$\det \begin{pmatrix} 5 + 4(a_1, a_2) & 4(a_2, a_3) \\ 4(a_2, a_3) & 5 + 4(a_3, a_4) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ -4 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & 3 \end{pmatrix} = 9 - 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right) < 0$$

при¹ $m \geq 5$, где $m - 2$ — число рёбер между второй и третьей вершинами. Для остальных трёх графов нулевой или отрицательный определитель Грама будут иметь векторы

$$\begin{aligned} u &= a_1 + 2a_2 & w &= 2a_3 + a_4 + a_5, \\ u &= a_1 & w &= 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \\ u &= a_1 & w &= 2a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Упр. 8.5. Возьмите $\varepsilon = \max_v (a_v - \xi_v(p)) / \max_{v,k} |\xi_v(e_k)|$, где e_i — стандартные базисные векторы в \mathbb{R}^n и максимум в знаменателе берётся по всем таким v и k , что $\xi_v(e_k) \neq 0$.

Упр. 8.8. Поскольку кольцо многочленов $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ нётерово², каждая система полиномиальных уравнений эквивалентна³ своей конечной подсистеме. Поэтому любое замкнутое множество является пересечением конечного числа задаваемых одним уравнением замкнутых множеств вида $Z_f = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\}$. Соответственно, любое открытое множество является объединением конечного числа дополнительных к таким замкнутым множествам подмножеств $D_f = \mathbb{A}^n \setminus Z_f$.

¹Напомню, что $\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$.

²Т.е. любое множество M элементов в нём порождает тот же идеал, что и некоторое конечное подмножество в M . Подробности см. в <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf>.

³В том смысле, что имеет то же самое множество решений.

Упр. 8.25. Покажите, что при фиксированных $v \in V$ и $a \in \mathbb{R}$ каждая из функций

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto ax \\ \mathbb{R} &\rightarrow V, & x &\mapsto xv \\ V &\rightarrow V, & w &\mapsto w + v \\ V &\rightarrow V, & w &\mapsto w - v \\ V &\rightarrow V, & w &\mapsto aw \end{aligned} \quad (14-49)$$

непрерывна и разложите функции $\lambda \mapsto (\lambda v, w)$ и $\lambda \mapsto \lambda(v, w)$ в композиции функций (14-49) и нормального отображения $w \mapsto \|w\|$ из V в \mathbb{R} .

Упр. 8.27. Пусть $p \in Z \setminus \dot{Z}$. Для любой точки $q \in \dot{Z}$ все точки отрезка $[p, q]$ кроме p являются внутренними, поскольку лежат внутри конуса с вершиной p и основанием в любом ε -кубе $B_\varepsilon(q) \subset \dot{Z}$. Объединение замкнутого шара и лежащей вне него точки не является замыканием своей внутренности.

Упр. 9.3. Если $w = (1, v) \in M$, то $\langle \beta_i, w \rangle = b_i + \langle \alpha_i, v \rangle = a_i(v) \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq m$. Поэтому все лучи $[0, w]$ с $w \in M$ лежат в конусе $\pi_M = \bigcap \beta_i^+$, а значит и замыкание их объединения тоже содержится в π_M . Наоборот, пусть $w = (t, v) \in \pi_M$. Если $t \neq 0$, то вектор $w/t = (1, v/t) \in \pi_M \cap H_{t-1} = M$, т.е. луч $[0, w)$ пересекает многогранник M . Если $t = 0$, то для любых точки $p = (1, u) \in M \subset \pi_M$ и числа $s \in [1, 0)$ точка $w_s = (1-s)w + sp = (s, (1-s)v + su) \in \pi_M$ по уже доказанному лежит на пересекающем многогранник M луче $[0, w_s)$, и $\lim_{s \rightarrow 0} w_s = w$.

Упр. 9.4. Всякая выпуклая комбинация $\sum \lambda_i p_i$, где все $p_i \in P$, $\lambda_i \geq 0$ и $\sum \lambda_i = 1$, лежит в конусе σ_P . Наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum y_i p_i \in \sigma_P$ все $y_i \geq 0$ и $\langle t, w \rangle = \sum y_i > 0$. Поэтому пересечение луча $[0, w)$ с гиперплоскостью $t = 1$ происходит в точке $w / \langle t, w \rangle = \sum p_i \cdot y_i / (y_1 + \dots + y_k)$, являющейся выпуклой комбинацией точек p_i .

Упр. 9.5. Четырёхгранный конус в \mathbb{R}^3 , порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами v_1 и v_3 .

Упр. 9.6. Конус $-\sigma_{R_F}^\vee = \{v \in V \mid \forall \psi \in \sigma_{R_F} \langle \psi, v \rangle \leq 0\}$. Для любых $v \in \sigma_R$ и $\psi \in \sigma_R^\vee$ неравенство $\langle \psi, v \rangle \leq 0$ равносильно равенству $\langle \psi, v \rangle = 0$. Поэтому $\sigma \cap -\sigma_{R_F}^\vee = \sigma \cap H_\Gamma = \Gamma$.

Упр. 9.7. Ковектор $z = y_1 e_1^* + y_2 e_2^* + \dots + y_m e_m^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}$ лежит в аффинном подпространстве

$$\beta + \text{Ann } V \subset \mathbb{R}^{m*},$$

если и только если для каждой образующей v_j векторного подпространства $V = \text{Ann Ann } V \subset \mathbb{R}^m$ выполняется равенство $\langle z, v_j \rangle = \langle \beta, v_j \rangle$, правая часть которого равна β_j , а левая часть в развёрнутом виде выглядит как $\sum_{i=1}^m z_i \langle e_i^*, v_j \rangle = \sum_{i=1}^m z_i a_{ij}$ и совпадает с j -той координатой строки zA .

Упр. 10.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т.е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$; кто знает, может, именно поэтому полученная формула называется формулой суммирования геометрической прогрессии

Упр. 10.3. Это следует из соотношения $(z : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : w)$.

Упр. 10.4. Если стягиваемая петля настолько мала, что почти не отличается от точки, устойчивое к малым шевелениям количество точек её пересечения с любой петлёй равно нулю. При изменении размеров петли устойчивые точки пересечения появляются и исчезают по две.

Упр. 10.11. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$, $p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2$, $V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\mathbb{k} \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 10.12. Это частный случай упр. 10.11.

Упр. 10.13. Строим перекрёстную ось ℓ (соединяющую точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$) и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и ℓ (x, b_2).

$$\text{Упр. 10.14. } \frac{\det(a,c)}{\det(a,d)} \cdot \frac{(b,d)}{\det(b,c)} = \frac{\det(a,b+\gamma a)}{\det(a,b+\delta a)} \cdot \frac{(b,b+\delta a)}{\det(b,b+\gamma a)} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Упр. 10.15. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек $\infty, 0, 1$ являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 . Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 . Наоборот, если $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в $\infty, 0, 1$, а φ_{qp} переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4 , то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4 , соответственно, в $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$.

Упр. 11.2. Если под произведением векторов $u, w \in V$ понимать число $uw \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{q}(u, w)$, то матрицу Грама базиса $e = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ можно записать как $A = e^t \cdot e$ (произведение столбца векторов e^t и строки векторов e). Поэтому $A' = (e')^t \cdot e = (C^t e^t)(eC) = C^t(e^t e)C = C^t A C$.

Упр. 11.3. Поскольку $\tilde{q}(e, e) \neq 0$, подпространства $\mathbb{k} \cdot e$ и e^\perp трансверсальны. Так как подпространство e^\perp является аннулятором ненулевого линейного функционала $v \mapsto \tilde{q}(w, e)$ на пространстве V , его коразмерность равна единице.

Упр. 11.5. Коника $x_0^2 + x_1^2 = 0$ на \mathbb{P}_2 с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ состоит из единственной точки $(0 : 0 : 1)$, порождающей ядро оператора корреляции.

Упр. 11.6. У матрицы A ранга 1 есть ненулевая строка, и все остальные строки ей пропорциональны. Поэтому $a_{ij} = \lambda_i \mu_j$ для некоторых ненулевых наборов чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$. Так как $\lambda_i \mu_j = \lambda_j \mu_i$ для всех $i \neq j$, имеется равенство отношений

$$(\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n) = (\mu_0 : \mu_1 : \dots : \mu_n).$$

Упр. 11.7. Если $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) \cup \mathbb{P}(\text{Ann } \eta)$ для каких-то ненулевых ковекторов $\xi, \eta \in V^*$, то квадратичная форма $q(v) = \xi(v)\eta(v)$ тождественно зануляется на векторном пространстве V . Индукцией по $\dim V$ выведите отсюда, что все коэффициенты многочлена q нулевые.

Упр. 11.10. Пересечение квадрики Q с прямой (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой $q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d)$, поляризация которой

$$\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)).$$

Условие сопряжённости $\tilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$, т. е. $[a, b, c, d] = -1$.

- Упр. 11.12. С помощью [предл. 11.1](#) на стр. 192 докажите, что непустая гладкая квадратика над бесконечным полем не может содержаться в объединении конечного числа гиперплоскостей.
- Упр. 11.16. Для другой прямой ℓ' проекция $C \simeq \ell'$ из точки p_5 является композицией проекции $C \simeq \ell$ из точки p_5 с перспективой $p'_5 : \ell \simeq \ell'$, которая сохраняет двойные отношения. Аналогично, проекция $C \simeq \ell$ из другой точки $p'_5 \in C$ это композиция проекции $C \simeq \ell$ из p_5 с отображением $\gamma : \ell \rightarrow \ell$, возникающем как композиция проекции прямой ℓ на конику C из точки p_5 с последующей проекцией коники C на прямую ℓ из точки p'_5 . Так как отображение γ биективно и рационально, оно является гомографией и сохраняет двойные отношения. По той же причине линейные проективные автоморфизмы плоскости сохраняют двойные отношения в пучках прямых и на самих прямых, лежащих в этой плоскости, а значит, и двойные отношения на кониках.
- Упр. 11.18. Ответ: гладкая коника, проходящая через пять точек p, q, a, b, c .
- Упр. 11.24. Базисом пространства $T_{v \otimes \xi}$ являются операторы $v \otimes \xi$, $u \otimes \xi$ и $v \otimes \eta$, где $u \in U$ и $\eta \in U^*$ суть любые вектор и ковектор, не пропорциональные v и ξ соответственно. Применение любого из этих операторов к вектору $w \in \text{Ann } \xi$ даёт либо 0, либо вектор, пропорциональный v . Поскольку операторы $F : U \rightarrow U$ со свойством $F(\text{Ann } \xi) \subset \mathbb{k} \cdot v$ тоже составляют трёхмерное векторное пространство, последнее совпадает с $T_{v \otimes \xi}$.
- Упр. 12.1. В двойственных базисах e_1, e_2, \dots, e_n и $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ оператор корреляции $\hat{\beta}$ имеет матрицу $B = (b_{ij}) = (\beta(e_i, e_j))$, совпадающую с матрицей Грама базиса e_1, e_2, \dots, e_n . Поэтому (1) (2). Условия (3) и (4) равносильны условию (2) в силу того, что $\dim V = \dim V^*$. Равенства (12-1) означают, что $e_i^x = \hat{\beta}^{-1}(e_i^*)$ или, в матричных обозначениях, $(e_1^x, e_2^x, \dots, e_n^x) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot B^{-1}$. Равенства (12-2) суть это переписанное двумя способами равенство $v = \sum e_i^*(v)e_i$.
- Упр. 12.2. См. [прим. 11.1](#) на стр. 190.
- Упр. 12.3. Так как оператор $\hat{\beta}$ инъективен, $\dim \hat{\beta}(U) = \dim U$ для любого подпространства $U \subset V$. Изотропность U означает, что $\hat{\beta}(U) \subset \text{Ann } U$, откуда $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$, ср. с доказательством [лем. 11.2](#) на стр. 207.
- Упр. 12.7. Дословно проходят доказательства ?? и [теор. 7.1](#) на стр. 107.
- Упр. 12.9. Пусть $p \in Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$. Тогда $T_p Q \cap Q$ это конус с вершиной p над гладкой квадратикой $Q' \subset L$ в дополнительном к точке p внутри $T_p Q$ проективном подпространстве L коразмерности 1 в $T_p Q$ и коразмерности 2 в $\mathbb{P}(V)$. Пусть $L = \mathbb{P}(W)$. Поскольку ограничение формы q на подпространство W невырождено, $V = W \oplus W^\perp$, где $\dim W^\perp = 2$, ограничение формы q на W^\perp тоже невырождено, и обладает ненулевым изотропным вектором $p \in W^\perp$. Поэтому W^\perp это гиперболическая плоскость, а значит оба индекса инерции у ограничения $q|_W$ на единицу меньше, чем у q .
- Упр. 12.10. Матрица Грама формы q в базисе c, e_1, e_2, \dots, e_n пространства $W = \mathbb{k} \oplus V$, где e_i составляют ортогональный базис формы f_2 в V , имеет блочный вид $\begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1^t & f_2 \end{pmatrix}$, в котором $f_0 \in \mathbb{k}$, $f_1 \in V^*$, а $f_2 \in S^2 V^*$ диагональна. Поскольку $\hat{q} : c \mapsto \lambda x_0$, где $\lambda \neq 0$, в этой матрице $f_1 = 0$, а $f_0 \neq 0$.
- Упр. 12.12. Любая точка из пересечения $\text{Sing } Q \cap H_\infty$ является особой точкой асимптотической квадратки $Q_\infty = Q \cap H_\infty$. Наоборот, если $\text{Sing } Q \neq \emptyset$ и $\text{Sing } Q_\infty \neq \emptyset$, то при $\text{Sing } Q \subset H_\infty$ пересечение $\text{Sing } Q \cap H_\infty$, разумеется непусто, а при наличии точки $c \in \text{Sing } Q \setminus H_\infty$, пространство

$W = \mathbb{k} \cdot c \oplus V$ и любой вектор $v \in \text{Sing } Q_\infty \subset \mathbb{P}(V)$ ортогонален и подпространству V и вектору c , а значит, лежит в пересечении $\text{Sing } Q \cap H_\infty$, откуда $\text{Sing } Q \cap H_\infty \neq \emptyset$.

Упр. 12.14. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$.

Упр. 13.1. Перенумеровывая, если необходимо, базисные векторы пространства V , запишем многочлен в виде

$$e_1 \wedge (\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + (\text{члены, не содержащие } e_1),$$

где $\alpha_2 \neq 0$, и $\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ тоже не содержит e_1 . Перейдём к новому базису $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$, в котором $\zeta_2 = \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $\zeta_i = e_i$ при $i \neq 2$. В нём многочлен принимает вид

$$\zeta_1 \wedge \zeta_2 + \zeta_2 \wedge (\beta_3 \zeta_3 + \dots + \beta_n \zeta_n) + (\text{члены, не содержащие } \zeta_1 \text{ и } \zeta_2).$$

В базисе $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ из векторов $\xi_1 = \zeta_1 - \beta_3 \zeta_3 - \dots - \beta_n \zeta_n$ и $\xi_i = \zeta_i$ при $i \neq 1$ многочлен принимает вид

$$\xi_1 \wedge \xi_2 + (\text{члены, не содержащие } \xi_1 \text{ и } \xi_2),$$

после чего можно воспользоваться индукцией.

Упр. 13.4. Рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P . Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_p P$, которая не содержит p . Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадратика на H . Таким образом, любая прямая, проходящая через p , имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 13◊1).

Упр. 13.5. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q , пересекает квадратичку ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.

Упр. 13.7. Если матрица Грама $(\tilde{g}(e_i, e_j))$ диагональна с диагональными элементами $g_i = \tilde{g}(e_i, e_i)$, то матрица Грама формы g_2 в базисе из бивекторов $e_i \wedge e_j$ тоже диагональна с диагональными элементами $g_i g_j$. Если векторы e_1, e_2, e_1^*, e_2^* образуют гиперболический базис формы g , то пары бивекторов $e_1 \wedge e_2, e_1^* \wedge e_2^*$ и $e_1 \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_2$ образуют гиперболические базисы двух ортогональных друг другу гиперболических плоскостей, а векторы $e_1 \wedge e_1^*, e_2 \wedge e_2^*$ имеют скалярные квадраты -1 и ортогональны друг другу и обеим гиперболическим плоскостям.

Упр. 13.10. Для заданных точки $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ множество всех таких коник $C = V(q) \subset \mathbb{P}_2$, что прямая ℓ служит полярной точки p относительно C , является проективным подпространством коразмерности 2 в пространстве коник $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$. В самом деле, ненулевой вектор $p \in V$ задаёт сюръективное линейное отображение

$$\text{pl}_p : S^2 V^* \rightarrow V^*, \quad q \mapsto \hat{q}(p), \tag{14-50}$$

переводящее квадратичную форму q в ковектор $\hat{q}(p) : V \rightarrow \mathbb{k}, v \mapsto \tilde{q}(v, p)$. При $\dim V = 3$ ядро $\ker \text{pl}_p$ имеет размерность $\dim \ker \text{pl}_p = \dim S^2 V^* - \dim V^* = 3$. Поэтому полный прообраз натянутого на ненулевой ковектор $\psi = \text{Ann}(\ell) \in V^*$ одномерного подпространства $\mathbb{k} \cdot \psi \subset V^*$ при отображении (14-50) имеет размерность 4 и коразмерность 2. Стало быть, его проективизация тоже имеет коразмерность 2. В частности, при $p \in \ell$, коники, касающиеся заданной прямой ℓ в заданной точке $p \in \ell$, образуют проективное подпространство коразмерности 2. Два таких подпространства, отвечающие $p_1 \in \ell_1$ и $p_2 \in \ell_2$, пересекаются как минимум по прямой. Если

бы пересечение содержало плоскость, то в пространстве коник, касающихся ℓ_1 , и ℓ_2 в точках p_1 и p_2 , нашлась бы коника, проходящая через любые две наперёд заданные точки. Но такая коника, проходящая через отличную от p_1, p_2 точку прямой ℓ и ещё одну точку вне прямых ℓ, ℓ_1, ℓ_2 , распадается в объединение прямой ℓ и отличной от ℓ, ℓ_1, ℓ_2 прямой ℓ' и не может пересекать прямые ℓ_1, ℓ_2 с кратностью 2 одновременно и в p_1 , и в p_2 .

Упр. 13.12. Условие прохождения через точку задаёт в пространстве коник гиперплоскость. Если никакие три из четырёх точек не коллинеарны, эти гиперплоскости линейно независимы, т. к. через любые три из точек можно провести распавшуюся конику, не проходящую через четвёртую точку. Следовательно, коники проходящие через точки a, b, c, d , никакие три из которых не коллинеарны, образуют пучок. Этот пучок содержит три распавшихся коники, образованные парами противоположных сторон четырёхвершинника $abcd$.

Упр. 13.13. По формуле Тейлора ограничение многочлена f на прямую (ab) имеет в аффинной окрестности точки a вид

$$f(a + tb) = f(a) + t \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i + \text{члены, делящиеся на } t^2.$$

Точке a отвечает корень $t = 0$. Он кратный тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot b_i = 0.$$

Упр. 13.14. Пусть $u = \iota_+ + \lambda \iota_-$, $w = \iota_+ + \mu \iota_-$. По упр. 10.14 на стр. 185 $[u, w, \iota_+, \iota_-] = \mu / \lambda$. Так как $(\iota_+, \iota_+) = (\iota_-, \iota_-) = 0$, а $(\iota_+, \iota_-) = (\iota_-, \iota_+) = 2$, получаем

$$\cos \angle(u, w) = \frac{(u, w)}{\sqrt{(u, u)(w, w)}} = \frac{\lambda + \mu}{2\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\sqrt{\lambda/\mu} + \sqrt{\mu/\lambda}}{2}.$$

Полагая $\lambda/\mu = [u, w, \iota_+, \iota_-] = e^{2i\vartheta}$, приходим к равенству $\cos \angle(u, w) = \cos \vartheta$, откуда $\angle(u, w) = \pm \vartheta + 2\pi n$.

Упр. 13.15. Поскольку линейное (соотв. квадратичное) уравнение прямой (соотв. коники) определяется этой фигурой однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число, вещественность фигуры означает, что все коэффициенты a_ν её уравнения удовлетворяют соотношению $a_\nu = \lambda \bar{a}_\nu$ для одного и того же для всех ν числа $\lambda \in \mathbb{C}$, имеющего $|\lambda| = 1$, т. к. $|\bar{a}_i| = |a_i|$. Пусть $\vartheta^2 = \lambda$. Тогда $\vartheta a_i \in \mathbb{R}$.

Упр. 13.16. Это проективно двойственное утверждение к предл. 11.2 на стр. 194 для гладкой коники на плоскости.

Упр. 13.17. Пусть $a, b \in \ell_\infty$ и диаметры $(ca), (cb)$ сопряжены. Тогда точки a, b сопряжены относительно C , т. е. a лежит на поляре точки b . Поскольку b лежит на поляре z_* , точка z_* тоже лежит на поляре b . Следовательно, диаметр (ca) является полярной точки b , и любая проходящая через b прямая ℓ пересекает прямую (ca) по сопряжённой с b точке, которая по предл. 11.2 на стр. 194 является серединой отрезка, отсекаемого коникой на прямой ℓ .

Упр. 13.18. Вложим прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ в качестве коники Веронезе C в плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$, образованную неупорядоченными точек $\{x, y\} \subset \mathbb{P}_1$, как в прим. 11.6 на стр. 203. Тогда пары

точек, переставляемых друг с другом инволюцией σ_{ab} с неподвижными точками a, b , высекаются из коники Веронезе C пучком прямых с центром в точке $\{a, b\} \in \mathbb{P}_2$. Две инволюции σ_{ab} и σ_{cd} с $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ одинаково переставляют ровно одну пару (возможно, совпадающих друг с другом) точек, а именно, на две точки пересечения коники C с прямой, соединяющей точки $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ на \mathbb{P}_2 .

Упр. 13.20. σ_C переставляет две точки прямой $p^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$, если и только если они высекаются из неё какой-либо коникой из пучка, двойственного к конфокальной системе. Поскольку для любой точки $\xi \in p^\times$ в пучке существует единственная проходящая через ξ коника, и вторая точка её пересечения с прямой p^\times рационально выражается через ξ , рассматриваемое отображение является инволютивной рациональной биекцией на прямой p^\times . коника из двойственного к конфокальной системе пучка, пересекающая прямую p^\times по паре точек $(pf_1), (pf_2) \in \mathbb{P}_2^\times$, это распавшаяся коника $f_1^\times \cup f_2^\times$.

Упр. 13.23. Поляра любой точки $w \in \ell_\infty$ проходит через полюс u_* прямой ℓ_∞ , т. е. параллельна оси параболы. Эта поляра пересекает любую прямую $\ell \ni w$ по такой точке u , что сопряжённые относительно P точки u, w гармоничны точкам пересечения $\ell \cap P$, т. е. u является серединой хорды $\ell \cap P$.

Упр. 14.5. Ответ: $f'(t) = 2(w(t), \dot{w}(t))$.

Упр. 14.7. Первое следует из того, что векторы $p_1 + p_2$ и $p_1 - p_2$, ортогональные векторным подпространствам, проективизациями которых являются медиаторы, ортогональны (при условии, что $(p_1, p_1) = (p_2, p_2) = 1$). Второе — из того, что одновременное выполнение равенств $(p_1, q) = (p_2, q)$ и $(p_1, q) = -(p_2, q)$ означает, что $(p_1, q) = (p_2, q) = 0$.

Упр. 14.8. Пусть $p \notin U_e$. Выберем последовательность Коши $u : \mathbb{N} \rightarrow U_e$, сходящуюся к p . Поскольку g сохраняет расстояния, последовательность $g \circ u = \bar{h} \circ u$ также является последовательностью Коши и сходится в \mathbb{P}_n . В силу непрерывности отображений g и \bar{h} получаем $g(p) = g(\lim u_n) = \lim g(u_n) = \lim \bar{h}(u_n) = \bar{h}(\lim u_n) = \bar{h}(p)$.

Упр. 14.9. Пусть $h(e_i) = \alpha f$, где $(f, f) = 1$, и пусть $p = e + e_i$. Тогда $h(p) = e + \alpha f$ и

$$\begin{aligned} \cos^2 |e, p| &= (e, p)^2 / (p, p) = 1/2 \\ \cos^2 |e, g(p)| &= (e, e + \alpha f)^2 / (e + \alpha f, e + \alpha f) = 1/(1 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Поскольку преобразование g изометрическое, $\alpha^2 = 1$. Поэтому $(h(e_i), h(e_i)) = \alpha^2(f, f) = 1$.

Упр. 14.10. Пусть $g = \lambda f$. Т. к. $(v, v) = (gv, gv) = \lambda^2(fv, fv) = \lambda^2(v, v)$, коэффициент $\lambda = \pm 1$.

Упр. 14.13. Сопоставьте m -линейной форме $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ линейную форму $\varphi' : \Lambda^m V \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой на разложимых грассмановых многочленах задаётся равенством

$$\varphi'(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v_1, v_2, \dots, v_m),$$

и убедитесь, что это отображение корректно продолжается по линейности на произвольные линейные комбинации разложимых грассмановых многочленов. Обратное отображение переводит линейную форму $\varphi' : \Lambda^m V \rightarrow \mathbb{k}$ в полилинейную форму

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_m) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_m).$$

При линейном отображении $w \mapsto \omega_w$ базис e_0, e_1, \dots, e_n пространства V переходит в базис пространства $(\Lambda^n V)^*$, двойственный к стандартному базису в $\Lambda^n V$ из грассмановых мономов $e_0 \wedge \dots \wedge e_{v-1} \wedge e_{v+1} \wedge \dots \wedge e_n, 0 \leq v \leq n$.

Упр. 14.14. Согласно форм. (14-17) на стр. 264 для вектора $w = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ значение

$$\omega_w(e_0, \dots, \hat{e}_\nu, \dots, e_n) = (-1)^\nu x_\nu.$$

Упр. 14.17. Поскольку $(a^+, b^+) > 0$, скалярный квадрат $(a^+ + b^+, a^+ + b^+) > 0$. Так как векторы $a^+ + b^+$ и $a^+ - b^+$ ортогональны и порождают гиперболическую плоскость (ab) , скалярный квадрат $(a^+ - b^+, a^+ - b^+) < 0$.

Упр. 14.18. Если точка q принадлежит зеркалу отражения, переставляющего точки p_1 и p_2 , то $|p_1, q| = |p_2, q|$, откуда $q \in (p_1^+ - p_2^+)^\perp$. С другой стороны, отражение $\sigma_{p_1^+ - p_2^+}$ переводит векторы p_1^+ и p_2^+ друг в друга.

Упр. 14.20. Квадрика C_p проходит через базисное множество $P_p \cap G$ пучка $P_p - lG$, а каждая проходящая через особую точку p квадрики $S_{(p,p)}$ прямая либо больше нигде не пересекает эту квадрику, либо лежит на ней целиком. Поэтому квадрика $S_{(p,p)}$ является линейным соединением точки p и неособой квадрики $P_p \cap G$ в дополнительной к точке p гиперплоскости p^\perp (ср. с доказательством теор. 11.2 на стр. 191).

Упр. 14.21. Из гиперболической теоремы косинусов¹ для прямоугольного Δacb вытекают равенства $\operatorname{ch} |a, c| = \operatorname{ch} |a, b| \cdot \operatorname{ch} |c, b| - \operatorname{sh} |a, b| \cdot \operatorname{sh} |c, b| \cdot \cos \beta$ и $\operatorname{ch} |a, b| = \operatorname{ch} |a, c| \cdot \operatorname{ch} |c, b|$. Подставляя второе из них в первое, заключаем, что $\operatorname{ch} |a, c| = \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b| / \operatorname{sh} |c, b|$, откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \ell^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |a, c|}} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} |a, c| = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{sh} |a, b|}{\operatorname{sh} |c, b|} = \cos \beta$$

(последнее равенство вытекает из теоремы синусов² для Δacb).

Упр. 14.22. Если обозначить через w' параллельную проекцию точки w на сферу S^n , а через α — угол между единичными векторами w' и e_0 , то $\varrho = \sin \alpha$, а $\varrho_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, откуда сразу следуют обе формулы.

¹См. формулу (14-34) на стр. 271.

²См. формулу (14-36) на стр. 271.