

§7. Группы ортогональных преобразований

Всюду в этом параграфе основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

7.1. Линейная ортогональная группа. Линейный эндоморфизм $F : V \rightarrow V$ евклидова векторного пространства V называется *ортогональным оператором* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов: $|Fv| = |v|$ для всех $v \in V$. Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины¹, каждый ортогональный оператор сохраняет и скалярные произведения: $(Fv, Fw) = (v, w)$ для всех $v, w \in V$. Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама². Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен ± 1 . В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства V подгруппу, которая обозначается $O(V) \subset GL(V)$ и называется *ортогональной группой* евклидова пространства V . Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы образуют подгруппу ортогональной группы. Она обозначается

$$SO(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) \cap SL(V) = \{F \in O(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной ортогональной группой* или группой *собственных* ортогональных операторов. Ортогональные операторы определителя -1 , меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

Пример 7.1 (центральная симметрия)

Оператор $-\text{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V . Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

Упражнение 7.1. Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами $\pm \text{Id}$.

Пример 7.2 (симметрии)

Как мы видели в н° 6.3.2 на стр. 96, с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Обозначим через $s_U : V \rightarrow V$ линейное отображение, тождественно действующее на U и умножающее все векторы из U^\perp на -1 , т. е. переводящее произвольный вектор $v = v_U + v_{U^\perp} \in U \oplus U^\perp = V$ в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^\perp} = v - 2v_{U^\perp}. \quad (7-1)$$

Так как $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2$, оператор s_U ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства U . При $U = 0$ получается центральная симметрия из предыдущего прим. 7.1. В общем случае оператор s_U собственный, если и только если коразмерность подпространства U в V чётна. Все операторы σ_U *инволютивны*, т. е.

$$\sigma_U^2 = \text{Id}_V.$$

¹См. формулу (6-5) на стр. 90.

²См. н° 6.2.1 на стр. 94.

7.1.1. Отражения в гиперплоскостях. Важнейшим специальным случаем симметрии является *отражение в гиперплоскости* $U = u^\perp$, перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору $u \in V$. Оно обозначается через σ_u и действует по формуле

$$\sigma_u(v) = v - 2 \frac{(u, v)}{(u, u)} \cdot u. \quad (7-2)$$

в которую превращается предыдущая формула (7-1) при $U^\perp = \mathbb{R} \cdot u$. Два отражения σ_u и σ_w совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы u и w пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$, переводятся друг в друга отражением σ_{a-b} относительно срединного перпендикуляра к отрезку $[a, b]$ в $\mathbb{A}(V)$.

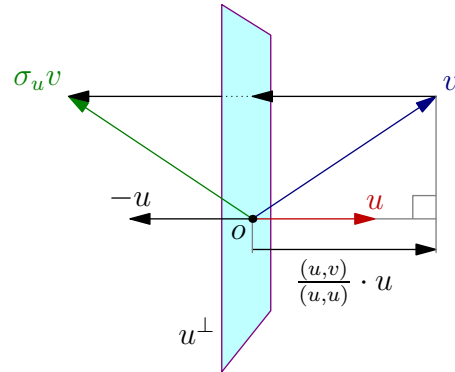


Рис. 7◊1. Отражение в гиперплоскости u^\perp .

ТЕОРЕМА 7.1

Любой ортогональный оператор на n -мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по n . Если $V = 0$ или $F = \text{Id}$, то доказывать нечего. Если есть вектор $v \neq F(v)$, обозначим через σ отражение, переводящее $F(v)$ в v . Тогда $F = \sigma \circ G$, где $G = \sigma \circ F$ оставляет вектор v на месте, а значит, переводит в себя $(n - 1)$ -мерное подпространство v^\perp . По индукции, ограничение G на v^\perp является композицией не более $(n - 1)$ отражений σ_{w_i} в $(n - 2)$ -мерных гиперплоскостях w_i^\perp внутри подпространства v^\perp . Каждое из этих отражений является ограничением на v^\perp отражения $\sigma_{w_i} : V \rightarrow V$ в $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости $w_i^\perp \subset V$, содержащей вектор v . Так как вектор v неподвижен при всех этих отражениях, G является их композицией. Поэтому $F = \sigma \circ G$ это композиция не более n отражений. \square

Следствие 7.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях. \square

Пример 7.3 (изометрии евклидовой плоскости)

Согласно *сл. 7.1* каждый несобственный ортогональный оператор на двумерном евклидовом векторном пространстве является отражением относительно прямой, а каждый собственный

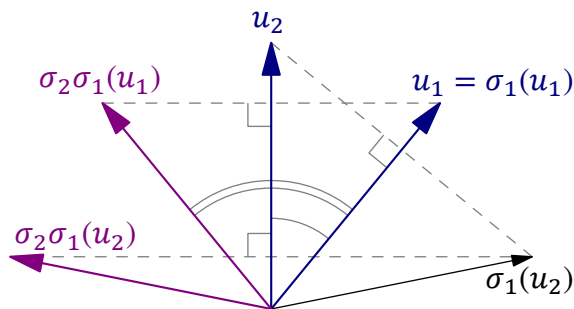


Рис. 7◊2. Композиция отражений.

является поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$, а значит, специальная ортогональная группа двумерного

ортогональный оператор, отличный от тождественного, является композицией $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ двух отражений относительно прямых u_2^\perp и u_1^\perp , ортогональных каким-либо двум непропорциональным векторам u_1 и u_2 . Эти два вектора образуют базис, и каждый из них под действием преобразования $\sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ поворачивается в направлении от u_1 к u_2 на удвоенный угол между векторами u_1 и u_2 (см. *рис. 7◊2*). Тем самым, это преобразование является

пространства исчерпывается поворотами, что согласуется с результатами н° 3.4.2 на стр. 43. Поворот ϱ_φ на угол φ против часовой стрелки имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе матрицу

$$\varrho_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

ПРИМЕР 7.4 (СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Как и на плоскости, всякий нетождественный собственный ортогональный оператор F в трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ двух отражений в плоскостях u_2^\perp , u_1^\perp , перпендикулярных некоторым непропорциональным векторам u_2 и u_1 . Обозначим через U плоскость, порождённую этими векторами. Оператор F тождественно действует на перпендикулярной к ней прямой $U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$, порождённой векторным произведением¹ $[u_1, u_2]$. Следовательно, F переводит ортогональную этой прямой плоскость U в себя и согласно предыдущему прим. 7.3 действует в ней поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $[u_1, u_2]$. Таким образом, собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как *теорема Эйлера*.

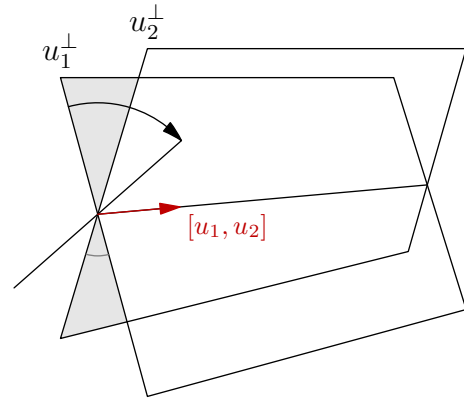


Рис. 7◊3. Поворот.

ЛЕММА 7.1

Для любого линейного эндоморфизма $F : V \rightarrow V$ конечномерного векторного пространства над полем \mathbb{R} найдётся такое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$, которое переводится отображением F в себя.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n + 1$ векторов v, Fv, F^2v, \dots, F^nv , где $n = \dim V$ и $F^k v$ обозначает результат k -кратного последовательного применения оператора F к вектору v . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(F^k + a_1 F^{k-1} + \dots + a_{k-1} F + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор можно воспринимать как результат подстановки $t = F$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Всякий такой многочлен раскладывается в произведение $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение F и применяя полученный оператор к вектору v , мы заключаем, что

$$g_1(F) \circ g_2(F) \circ \dots \circ g_m(F)v = 0.$$

Рассмотрим наименьшее k , для которого вектор $w = g_{k+1}(F) \circ \dots \circ g_m(F)v$ всё ещё отличен от нуля. Тогда $g_k(F)w = 0$. Для $g_k(F) = F - \alpha$ это значит, что $F(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot w$ переводится оператором F в себя. Для $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$ имеем $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$, т. е. линейная оболочка векторов w и $F(w)$ переводится оператором F в себя. \square

¹См. прим. 6.6 на стр. 98.

ПРИМЕР 7.5 (несобственные изометрии трёхмерного пространства)

Согласно лем. 7.1 всякая несобственная изометрия F трёхмерного пространства переводит в себя некоторую прямую или плоскость, а значит и ортогональное дополнение к ней, т. е. в любом случае $V = L \oplus U$, где L и U ортогональны, $\dim L = 1$, $\dim U = 2$ и F переводит оба подпространства в себя. Если F тождественно действует на L , то на U он действует несобственно, т. е. отражением относительно прямой. Тем самым, F является отражением в плоскости, натянутой на L и эту прямую. Если $F|_L = -\text{Id}_L$, то F действует на U собственно, т. е. поворотом. Мы заключаем, что всякая несобственная линейная изометрия трёхмерного векторного пространства является либо отражением в плоскости, либо композицией поворота и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота.

ТЕОРЕМА 7.2

Для любого ортогонального оператора F на конечномерном евклидовом векторном пространстве V существует такое разложение $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ в прямую сумму попарно ортогональных друг другу одномерных и двумерных подпространств, что оператор F переводит все эти подпространства в себя и на двумерных действует поворотами¹, а на одномерных — как $\mp \text{Id}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как $-\text{Id}$, можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на угол π . Точно также любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как Id , можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на нулевой угол. После того, как будут проделаны все эти объединения, одномерных подпространств U_i в теор. 7.2 останется не более двух. Оператор F является собственным, если и только если одномерных пространств останется не более одного, и буде оно есть, F действует на нём тождественно. Оператор F является несобственным тогда и только тогда, когда останется одно или два одномерных пространства, причём ровно на одном из них F действует как $-\text{Id}$.

Доказательство теор. 7.2. Индукция по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были разобраны выше в упр. 7.1 и прим. 7.3. Пусть $\dim V \geq 3$. Согласно лем. 7.1 оператор $F : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, F переводит в себя и ортогонал U^\perp к подпространству U . Ограничения F на U и на U^\perp являются ортогональными операторами в этих меньших подпространствах. По индукции, F имеет на каждом из них требуемые разложения. Складывая эти разложения вместе, получаем нужное разложение для $V = U \oplus U^\perp$. \square

7.1.2. Инвариантная характеристика углов поворотов. Для произвольного линейного эндоморфизма $F : V \rightarrow V$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ разность между гомотетией с коэффициентом t и отображением F также является линейным эндоморфизмом векторного пространства V :

$$t \text{Id} - F : V \rightarrow V, \quad v \mapsto tv - F(v).$$

Его определитель, рассматриваемый как функция от t , это многочлен с зависящими от F коэффициентами. Он называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается

$$\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t \text{Id} - F) \in \mathbb{R}[t].$$

¹Углы которых могут быть разными в разных подпространствах U_i .

Чтобы выписать его явно, следует составить матрицу F_e отображения F в каком-нибудь базисе e пространства V и вычислить определитель матрицы $tE - F_e$:

$$\chi_F(t) = \det(t \text{Id} - F) = \det(tE - F_e).$$

Например, характеристический многочлен оператора гомотетии $F = \lambda \text{Id}$ с коэффициентом λ на n -мерном пространстве равен

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda \text{Id}}(t) = \det(t \text{Id} - \lambda \text{Id}) &= \det \left(\begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} t - \lambda & & & 0 \\ & t - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t - \lambda \end{pmatrix} = (t - \lambda)^n \end{aligned}$$

А характеристический многочлен оператора поворота (7-3) евклидовой плоскости на угол φ против часовой стрелки равен

$$\begin{aligned} \chi_{\varrho_\varphi}(t) = \det(t \text{Id} - \varrho_\varphi) &= \det \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} t - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & t - \cos \varphi \end{pmatrix} = t^2 - 2t \cos \varphi + 1. \end{aligned}$$

Из теор. 7.2 вытекает, что характеристический многочлен любой линейной изометрии F евклидова пространства V является произведением квадратных трёхчленов вида

$$\chi_{\varrho_\varphi}(t) = t^2 - 2t \cos \varphi + 1, \quad \text{где } 0 < \varphi < \pi, \quad (7-4)$$

и линейных двучленов вида $t \pm 1$. В самом деле, в базисе пространства V , полученным объединением каких-нибудь ортонормальных базисов пространств U_i из теор. 7.2, ненулевые элементы матрицы оператора $tE - F$ сосредоточатся внутри расположенных на главной диагонали блоков размера 2×2 и 1×1 вида

$$\begin{pmatrix} t - \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & t - \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (t - 1), \quad (t + 1).$$

Определитель такой матрицы равен произведению определителей блоков, т. е. трёхчленов (7-4) и двучленов $t \pm 1$. Таким образом, все корни характеристического многочлена $\chi_F(t)$ в поле \mathbb{C} имеют вид $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$ и ± 1 , и каждой паре невещественных комплексно сопряжённых корней $\cos \varphi_i \pm i \sin \varphi_i$ биективно соответствует двумерное подпространство U_i из теор. 7.2, где F действует поворотом на угол φ_i , а каждому корню ± 1 — одномерное подпространство, где F действует, соответственно, как $\pm \text{Id}$. В частности, в теор. 7.2 неупорядоченный набор углов поворотов в двумерных подпространствах U_i , а также количества одномерных подпространств U_i , на которых оператор F действует как $\pm \text{Id}$, не зависят от выбора разложения, удовлетворяющего условиям теоремы, и однозначно задаются корнями характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(t \text{Id} - F)$. По этой причине ортогональное разложение из теор. 7.2 называется *каноническим разложением* евклидовой изометрии.

7.2. Группы отражений. Конечная группа G линейных изометрий евклидова пространства V называется *группой отражений*, если она порождается отражениями в гиперплоскостях, т. е. имеется такой набор попарно непропорциональных векторов $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$, что всякое преобразование $g \in G$ раскладывается в композицию отражений $\sigma_i = \sigma_{u_i}$ в гиперплоскостях u_i^\perp . Отметим, что для непропорциональных векторов u_i, u_j композиция $\sigma_j \sigma_i$ тождественно действует на $(n-2)$ -мерном пространстве $u_i^\perp \cap u_j^\perp$, а в ортогональной ему двумерной плоскости, порождённой векторами u_i, u_j , она действует как поворот на угол $2\angle(u_i, u_j)$, т. е. группа G , не смотря на название, состоит не только из отражений. Она лишь порождается ими.

ЛЕММА 7.2

Для любой изометрии $F : V \rightarrow V$ и ненулевого вектора $u \in V$ выполняется равенство

$$F \circ \sigma_u = \sigma_{F(u)} \circ F. \quad (7-5)$$

Доказательство. Геометрически очевидно, что всякая изометрия F переводит симметричные относительно гиперплоскости u^\perp векторы v, w , в векторы $F(v), F(w)$, симметричные относительно гиперплоскости $F(u)^\perp$. Формально, применяя F к обеим частям равенства

$$w = v - 2 \frac{(v, u)}{(u, u)} \cdot u,$$

получаем $F(w) = F(v) - 2(F(v), F(u)) \cdot F(u) / (F(u), F(u))$. □

Следствие 7.2

Объединение всех зеркал любой группы отражений G переводится в себя каждым преобразованием из группы G .

Доказательство. Пусть гиперплоскость e^\perp является зеркалом отражения σ_e из группы G . Для любого преобразования $g \in G$ гиперплоскость $g(e^\perp) = g(e)^\perp$ является в силу равенства (7-5) зеркалом отражения

$$\sigma_{g(e)} = g \sigma_e g^{-1} \quad (7-6)$$

также принадлежащего группе G . □

Пример 7.6 (группы диэдров)

Группа отражений двумерного евклидова векторного пространства однозначно с точностью до изоморфизма определяется числом m имеющихся в ней отражений. В самом деле, зеркала этих отражений разбивают плоскость на $2m$ углов, как на рис. 7♦4 на стр. 112. Выберем наименьший из них, пометим его буквой e , назовём его стороны ℓ_1, ℓ_2 , и обозначим отражения в них через $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}, \sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$. Поскольку отражения группы G переводят зеркала в зеркала, все m зеркал группы G получаются последовательными отражениями зеркал ℓ_1 и ℓ_2 друг относительно друга, а углы между ними — последовательными отражениями угла e относительно его сторон по часовой стрелке или против часовой стрелки, т. е. будут согласно формуле (7-6) иметь вид

$$\begin{array}{ll} \sigma_2(e) & \sigma_1(e) \\ \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}(\sigma_1(e)) = \sigma_1 \sigma_2(e) & \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}(\sigma_1(e)) = \sigma_2 \sigma_1(e) \\ \sigma_{\sigma_1 \sigma_2(\ell_1)}(\sigma_1 \sigma_2(e)) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e) & \sigma_{\sigma_2 \sigma_1(\ell_2)}(\sigma_2 \sigma_1(e)) = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e) \\ \sigma_{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(\ell_1)}(\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e)) = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e) & \sigma_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(\ell_2)}(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1(e)) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2(e) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Надпишем каждый из углов тем преобразованием из правой части предыдущих равенств, которым он получается из угла e , как на рис. 7◊4. В результате каждый угол будет надписан словом вида $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots$ и словом вида $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots$, отвечающими двум обходам вокруг нуля, приводящим из начального угла в рассматриваемый угол. Поскольку движение плоскости однозначно определяется своим действием на угол e , мы заключаем, что группа G порождается двумя отражениями, каждый её элемент может быть записан в виде $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots$ или в виде $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots$, и для всех $0 \leq k \leq 2m$ выполняются равенства

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots}_k = g = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots}_{2n-k}, \quad (7-7)$$

эквивалентные равенству $(\sigma_2\sigma_1)^m = \text{Id}$, вытекающему из того, что композиция отражений $\sigma_2\sigma_1$ является поворотом на угол $2\pi/m$. Из рис. 7◊4 и рис. 7◊5 очевидно, что группа G совпадает с группой симметрий правильного m -угольника и состоит из m отражений и m поворотов на углы $2\pi k/m$. Эту группу традиционно обозначают D_m и называют m -той диэдральной группой. Обратите внимание, что при нечётном m все оси симметрии геометрически одинаковы и составляют одну орбиту группы D_m , тогда как при чётном m орбиты прямых ℓ_1 и ℓ_2 различны и образуют два геометрически разных набора осей: одни проходят через противоположные вершины многоугольника, а другие — через середины противоположных рёбер (см. рис. 7◊5).

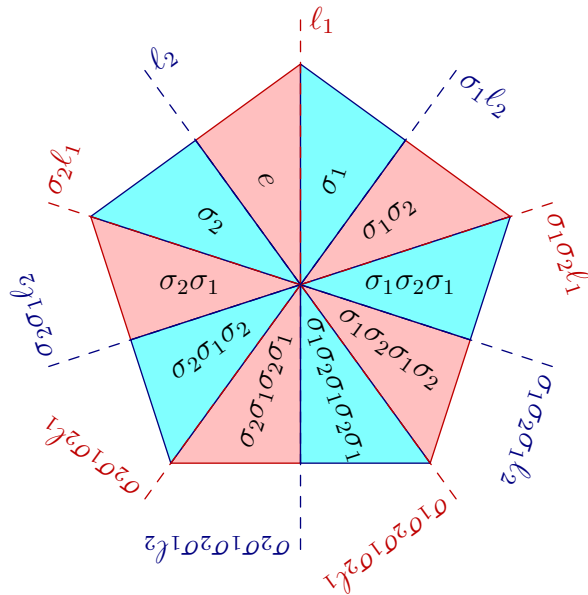


Рис. 7◊4. Группа диэдра.

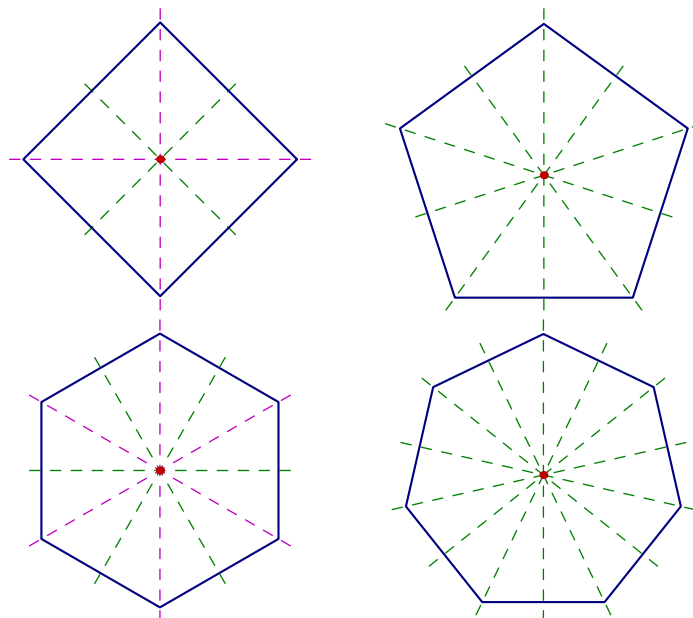


Рис. 7◊5. Оси правильных многоугольников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1 (ГРУППА ФИГУРЫ)

Пусть V — евклидово векторное пространство, и $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ какая-либо фигура в его аффинизации. Группа биективных отображений $\Phi \simeq \Phi$, которые можно получить, ограничивая на фигуру Φ всевозможные линейные изометрии $V \simeq V$, переводящие Φ в себя, называется (полной) группой фигуры Φ и обозначается O_Φ . Её подгруппа $SO_\Phi \subset O_\Phi$, состоящая из биекций $\Phi \simeq \Phi$, задаваемых собственными¹ изометриями пространства V , называется собственной группой фигуры Φ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Убедитесь, что полная и собственная группы любой фигуры действительно являются группами преобразований этой фигуры в смысле определения на стр. 5, и что они совпадают друг с другом, если фигура Φ содержится в некоторой гиперплоскости $W \subset V$.

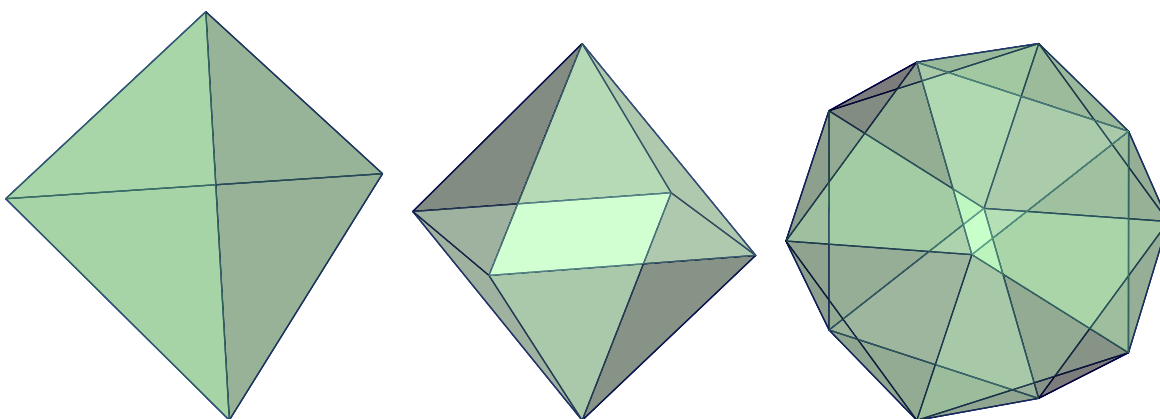


Рис. 7◊6. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

ПРИМЕР 7.7 (ГРУППЫ ТЕТРАЭДРА, ОКТАЭДРА И ИКОСАЭДРА)

Обозначим через M платоново тело с треугольными гранями, т. е. правильный тетраэдр, октаэдр или икосаэдр (см. рис. 7◊6). Плоскости симметрии многогранника M задают барицентрическое разбиение каждой из граней M на 6 треугольников с вершинами в вершине M , середине примыкающего к этой вершине ребра и центре примыкающей к этому ребру грани (см. рис. 7◊7). Все эти треугольники конгруэнтны друг другу и сходятся по $2m_1 = 6$ штук в центрах граней M , по $2m_2 = 4$ штуки в серединах сторон M и по $2m_3$ штук в вершинах M , где числа m_i , а также число γ граней u M и общее число треугольников $N = 6\gamma$ представлены в таблице²

M	m_1	m_2	m_3	γ	$N = 6\gamma$
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120

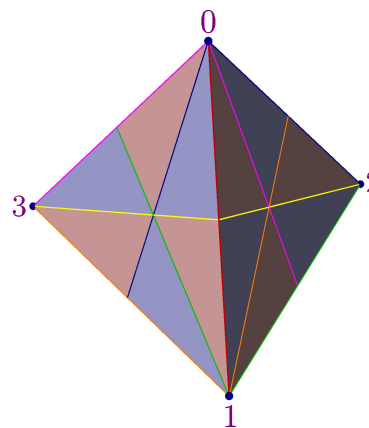


Рис. 7◊7. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

¹Т. е. сохраняющими ориентацию.

²Обратите внимание, что помещённый в пространство n -угольный диэдр из прим. 7.6, тоже можно было бы включить в этот список со значениями $m_1 = n$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $\gamma = 2$ и $N = 4n$, если условиться, что плоский диэдр имеет 2 двумерных грани: «верхнюю» и «нижнюю».

Пометим трёхгранный угол с вершиной в нуле, опирающийся на один из N треугольников, буквой e , назовём высекающие его плоскости симметрии буквами π_1, π_2, π_3 так, чтобы для всех циклических перестановок i, j, k множества индексов 1, 2, 3 двугранный угол между плоскостями π_i и π_j равнялся π/m_k , и обозначим через σ_i отражение в плоскости π_i . Поскольку каждое преобразование из группы O_M однозначно определяется своим действием на трёхгранный угол e , для каждого из N трёхгранных углов существует ровно одно преобразование $g \in O_M$, переводящее угол e в рассматриваемый угол. Пометим каждый угол тем преобразованием $g \in O_M$, которое переводит в него наш начальный угол e . Таким образом, каждое преобразование $h \in O_M$ переводит угол g в угол hg . На рис. 7♦8 изображена стереографическая проекция картинка, которую 24 трёхгранных угла барицентрического разбиения тетраэдра с рис. 7♦7 высекают на описанной около этого тетраэдра сфере. На каждом сферическом треугольнике написана композиция отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящая треугольник e в этот треугольник.

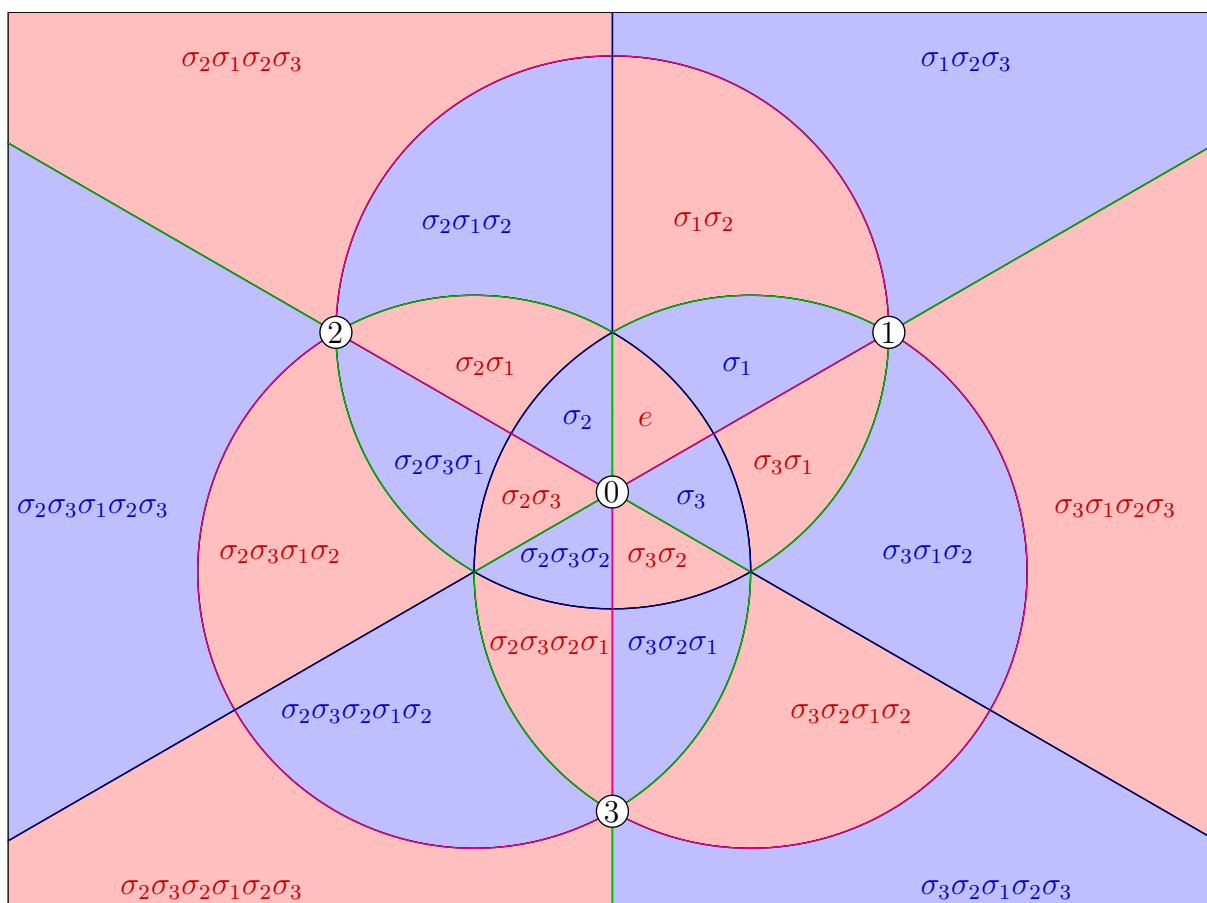


Рис. 7♦8. Триангуляция сферы плоскостями симметрии правильного тетраэдра $[0, 1, 2, 3]$ в стереографической проекции из диаметрально противоположной к вершине $[0]$ точки сферы на плоскость, параллельную грани $[1, 2, 3]$.

Чтобы написать такую композицию, приводящую из треугольника e в заданный треугольник g , выберем внутри трёхгранных углов g и e векторы u и w одинаковой длины так, чтобы натянутая на них плоскость Π_{uw} не содержала линий пересечения плоскостей симметрии многогранника M . Пройдём из u в w по дуге окружности, высекаемой плоскостью Π_{uw} на описанной

вокруг многогранника M сфере. Пусть мы при этом последовательно побываем в трёхгранных углах $e = g_1, g_2, g_3, \dots, g_m, g_{m+1} = g$, и при проходе из i -го угла в $(i + 1)$ -й пересечём плоскость $g_i(\pi_{v_i})$, $v_i \in \{1, 2, 3\}$, которая является образом грани π_{v_i} начального трёхгранного угла e при отображении g , переводящем угол e в угол g . Тогда по форм. (7-6) на стр. 111

$$\begin{aligned} g_2 &= \sigma_{v_1} e \\ g_3 &= \sigma_{g_2(\pi_{v_2})} g_2 = (g_2 \sigma_{v_2} g_2^{-1}) g_2 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} e \\ g_4 &= \sigma_{g_3(\pi_{v_3})} g_3 = (g_3 \sigma_{v_3} g_3^{-1}) g_3 = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \sigma_{v_3} e \\ &\dots \\ g &= \sigma_{g_m(\pi_{v_m})} g_m = (g_m \sigma_{v_m} g_m^{-1}) g_m = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m} e. \end{aligned}$$

Тем самым, если пометить соответственные грани всех N трёхгранных углов цифрами 1, 2, 3 так, чтобы в угле g грань, высекаемая плоскостью $g(\pi_i)$, получила метку « i », то последовательность v_1, v_2, \dots, v_m индексов $v_i \in \{1, 2, 3\}$ в представлении

$$g = \sigma_{v_1} \sigma_{v_2} \dots \sigma_{v_m} \tag{7-8}$$

будет состоять из выписанных слева направо по порядку номеров граней, которые придётся последовательно пересечь при движении из e в g по дуге uw (на рис. 7◊8 грани 1, 2, 3 изображены синим, зелёным и лиловым цветами соответственно). Из сказанного вытекает, что группа O_M является группой отражений, и более того, она порождается всего тремя отражениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в гранях одного трёхгранного угла, опирающегося на какой-нибудь из N треугольников барицентрического разбиения треугольной грани многогранника M . Такие отражения называются *простыми*.

Обратите внимание, что разложение (7-8) элементов $g \in O_M$ в композиции простых отражений не единственно и зависит от выбора векторов u и w внутри трёхгранных углов. При изменении любого из этих векторов последовательность v_1, v_2, \dots, v_m номеров зеркал, пересекаемых по дороге от u и w , не меняется, пока натянутая на эти векторы плоскость Π_{uw} не столкнётся с линией пересечения зеркал. При пересечении таких линий, последовательность v_1, v_2, \dots, v_m меняется так, как показано на рис. 7◊9, где изображена центральная проекция происходящего из нуля на какую-нибудь аффинную плоскость, трансверсально пересекающую все рассматриваемые зеркала (при этом линии пересечения зеркал изображаются точками, а сами зеркала — прямыми).

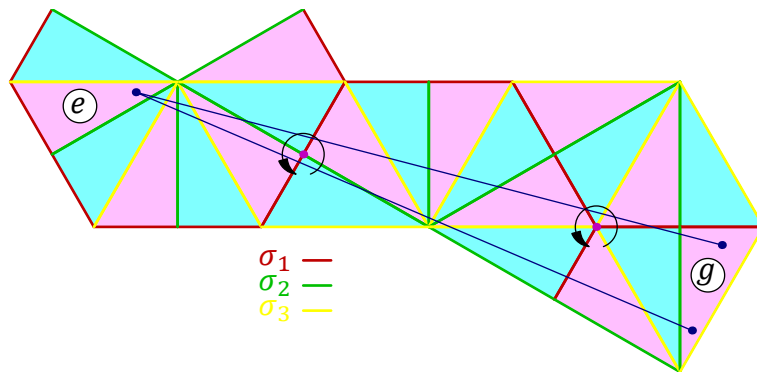


Рис. 7◊9. $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 = g =$
 $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2.$

Разложения, отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 7◊9 отличаются друг от друга тем, что линии пересечения зеркал обходятся в противоположных направлениях. Композиции возникающих при этом отражений удовлетворяют циклическим соотношениям $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ и $\sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3$ того же самого вида, что соотношения (7-7) в группе диэдра.

В общем случае, при проходе через ось, по которой пересекаются m_i зеркал, являющихся образами плоскостей π_j и π_k , фрагмент вида $\sigma_j\sigma_k\sigma_j \dots$ в разложении (7-8) заменяется равным ему фрагментом вида $\sigma_k\sigma_j\sigma_k \dots$ согласно соотношению $(\sigma_j\sigma_k)^{m_i} = \text{Id}$, вытекающему из того, что композиция отражений в двух соседних плоскостях является поворотом на угол $2\pi / m_i$. В действительности, наши рассуждения показывают, что группа O_M изоморфна фактору свободной группы с образующими $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по наименьшей нормальной подгруппе¹ содержащей слова σ_i^2 и $(\sigma_i\sigma_j)^{m_k}$ для всех $i = 1, 2, 3$ и всех циклических перестановок (i, j, k) набора $(1, 2, 3)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3. Докажите, что группа тетраэдра изоморфна симметрической группе S_4 .

ПРИМЕР 7.8 (СИСТЕМА ЗЕРКАЛ A_n)

Обозначим через V_n гиперплоскость $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0$ в координатном пространстве² \mathbb{R}^{n+1} , а через $\sigma_{ij} = \sigma_{e_i - e_j} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — отражение в гиперплоскости, ортогональной вектору $e_i - e_j \in V_n$. Это отражение осуществляет транспозицию базисных векторов e_i и e_j , оставляя все остальные базисные векторы на месте. Таким образом, группа, порождённая отражениями σ_{ij} , совпадает с симметрической группой S_{n+1} всевозможных перестановок стандартных базисных векторов пространства \mathbb{R}^{n+1} . Поскольку все такие перестановки оставляют на месте вектор $e = e_0 + e_1 + \dots + e_n$, они переводят в себя подпространство $V_n = e^\perp$, действуя на нём перестановками вершин правильного n -мерного симплекса $\Delta \subset V_n$ с центром в нуле и вершинами в ортогональных проекциях векторов e_i , которые мы для простоты будем обозначать просто числами $0, 1, \dots, n$. Таким образом, группа S_{n+1} оказывается изоморфной группе правильного n -мерного симплекса. Обозначим через $[i_0, i_1, \dots, i_k] \subset \Delta$ выпуклую оболочку вершин i_0, i_1, \dots, i_k . Это правильный k -мерный симплекс, представляющий собою грань симплекса Δ , и все грани у Δ имеют такой вид. Также обозначим через $\pi_{ij} = V_n \cap (e_i - e_j)^\perp$ зеркало ограничения отражения σ_{ij} на V_n . Конфигурация из $n(n+1)/2$ зеркал π_{ij} называется *конфигурацией типа A_n* . Каждое зеркало π_{ij} проходит через середину ребра $[i, j]$ и содержит противоположную этому ребру $(n-2)$ -мерную грань с вершинами в точках $\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.4. Убедитесь, что все плоскости π_{ij} и π_{km} с $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ ортогональны, а плоскости π_{ij} и π_{jk} с различными i, j, k пересекаются под углом $\pi/3$.

Гиперплоскости π_{ij} осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса Δ на $n!$ меньших симплексов с вершинами в центрах граней симплекса Δ , совершенно аналогичное тому, что мы видели на рис. 7◊7 на стр. 113. Обозначим через $\langle i_0 i_1 \dots i_m \rangle$ центр m -мерной грани с вершинами в i_0, i_1, \dots, i_m и сопоставим каждой перестановке $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$ симплекс барицентрического разбиения с вершинами в точках³

$$[\langle g_0 \rangle, \langle g_0, g_1 \rangle, \langle g_0, g_1, g_2 \rangle, \dots, \langle g_0, g_1, \dots, g_{n-1} \rangle, \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle]. \quad (7-9)$$

¹Точный смысл этих слов и доказательство даются в курсе алгебры, см., например, <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf>

²Обратите внимание, что координаты нумеруются с нуля.

³Первая вершина находится в вершине g_0 самого симплекса Δ , вторая — в середине выходящего из g_0 ребра $[g_0, g_1]$, третья — в центре примыкающей к этому ребру треугольной грани $[g_0, g_1, g_2]$ и т. д. Последняя вершина является центром всего симплекса Δ .

Таким образом возникает биекция между симплексами барицентрического разбиения и элементами группы $S_{n+1} \simeq O_\Delta$. Как и в предыдущем примере, пометим буквой e «начальный» симплекс

$$[\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle], \quad (7-10)$$

отвечающий тождественной перестановке, а симплекс (7-9), получающийся из начального преобразованием $g \in O_\Delta$, задаваемым перестановкой g , пометим преобразованием g . Обозначим через $\pi_i = \pi_{i-1, i}$ с $1 \leq i \leq n$ проходящие через нуль $(n-1)$ -мерные грани начального симплекса (7-10). Они образуют n -гранный угол, и отражениям в его гранях отвечают в группе S_n транспозиции соседних элементов $\sigma_i = (i-1, i)$. Как и в предыдущем примере, они называются *простыми отражениями*. Легко видеть, что транспозиции σ_i порождают всю симметрическую группу. Согласно [упр. 7.4](#) они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_i^2 = (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = e \quad \text{и} \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при} \quad |i-j| \geq 2. \quad (7-11)$$

Циклическое соотношение $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = e$ чаще записывают в виде

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

и называют *соотношением треугольника*, поскольку простейшим его проявлением является соотношение между отражениями в медианах правильного треугольника. Геометрически убедиться в том, что простые отражения порождают группу O_Δ , а заодно указать практический способ представления произвольного элемента $g \in O_\Delta$ в виде

$$g = \sigma_{\nu_1} \sigma_{\nu_2} \dots \sigma_{\nu_m}, \quad \text{где} \quad \text{все} \quad \nu_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7-12)$$

можно тем же способом, что и в предыдущем примере. А именно, занумеруем грани каждого n -гранного угла g числами от 1 до n так, чтобы грань, отсекаемая гиперплоскостью $g(\pi_i)$ получила номер « i ». Выберем внутри n -гранных углов e и g такие векторы u и w , что натянутая на них плоскость P_{uw} не пересекается ни с одним из $(n-2)$ -мерных попарных пересечений зеркал конфигурации A_n .

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Убедитесь, что такой выбор возможен.

Пройдём из u в w по кратчайшей из двух дуг окружности, отсекаемой плоскостью P_{uw} из описанной сферы симплекса D , и запишем подряд (в порядке поступления) номера $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ тех зеркал, которые будем пересекать. Тогда для полученной последовательности номеров будет справедлива формула (7-12).

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Убедитесь в этом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2 (ПОЛУПРОСТРАНСТВА)

Для ненулевого вектора $a \in V$ положим $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, a) > 0\}$, $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid (v, a) < 0\}$ и назовём эти множества *положительным* и *отрицательным открытыми полупространствами* относительно a . Также положим $a^{\geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} a^+ \sqcup a^\perp$ и $a^{\leq 0} \stackrel{\text{def}}{=} a^- \sqcup a^\perp$ и назовём их *замкнутыми полупространствами* (положительным и отрицательным). Отметьте, что $(-a)^+ = a^-$ и $(-a)^{\geq 0} = a^{\leq 0}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Убедитесь, что $V = a^- \sqcup a^\perp \sqcup a^+$ и что следующие условия на векторы $u, w \in V$ равносильны друг другу: а) u и w лежат в одном открытом полупространстве б) весь

отрезок $[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu > 0 \text{ \& } \lambda + \mu = 1\}$ лежат в одном открытом полупространстве в) $[u, v] \cap a^\perp = \emptyset$. В частности принадлежность одной открытой гиперплоскости является отношением эквивалентности на множестве векторов, не лежащих в гиперплоскости a^\perp .

7.3. Системы корней и камеры Вейля. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве V действует конечная группа отражений G . Запишем зеркала всех различных отражений из G в виде $a_1^\perp, a_2^\perp, \dots, a_m^\perp$ для некоторых ненулевых векторов $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$. Эти векторы определяются группой G однозначно с точностью до пропорциональности. Отнормируем их так, чтобы они стали единичной длины, и вместе с каждым вектором a_i рассмотрим противоположный ему вектор $-a_i$. Полученный набор векторов $\Phi_G = \{\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_m\}$ называется *системой корней* группы G . Согласно сл. 7.2 на стр. 111 все преобразования из группы G переводят зеркала в зеркала и, стало быть, корни — в корни. Обозначим через $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup a_i^\perp$ объединение всех зеркал группы G . Дополнение до него распадается в дизъюнктное объединение открытых конусов $C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_N$, которые называются *камерами Вейля* и являются классами эквивалентности точек из $V \setminus \Sigma$ по отношению, объявляющему две точки эквивалентными, если они лежат в одном открытом полупространстве относительно всех гиперплоскостей a_i^\perp . Поскольку это отношение является пересечением эквивалентностей из упр. 7.7, каждая камера C_ν вместе с любыми двумя точками содержит соединяющий их отрезок, и две точки из C тогда и только тогда лежат в одной камере, когда соединяющий их отрезок не пересекает зеркал.

Обозначим через Ψ_{ij} двумерную плоскость, порождённую корнями a_i, a_j . Ортогональным дополнением к ней является $(n-2)$ -мерное пересечение зеркал $\Psi_{ij}^\perp = a_i^\perp \cap a_j^\perp$. Все проходящие через это пересечение зеркала группы G высекают в плоскости Ψ_{ij} двумерную конфигурацию прямых, являющихся зеркалами отражений некой диэдральной группы $D_{m_{ij}}$ из прим. 7.6 на стр. 111. Целое число $m_{ij} \geq 2$ однозначно определяется группой G и корнями a_i, a_j как число всех зеркал группы G , проходящих через пересечение i -того и j -того зеркала. При этом наименьший из углов между всеми такими зеркалами равен π/m_{ij} (см. рис. 7◊10). Таким образом, в любой группе отражений есть лишь следующие возможности для взаимного расположения произвольно выбранных i -того и j -того зеркал.

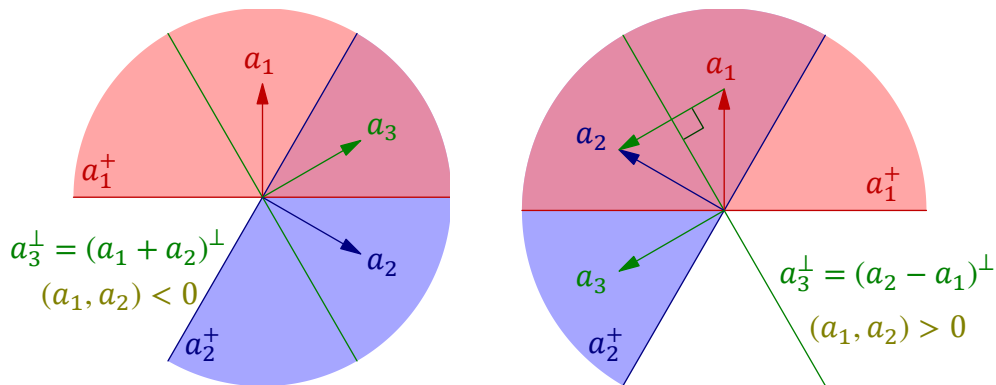


Рис. 7◊10. Соседние и не соседние зеркала.

Лемма 7.3

Если внутри двугранного угла $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ нет других зеркал группы G , то $(a_i, a_j) \leq 0$, и равенство равносильно тому, что $m_{ij} = 2$. При $(a_i, a_j) > 0$ в системе Φ_G имеется корень $a_k = \lambda a_i - \mu a_j$ с $\lambda, \mu > 0$, задающий зеркало проходящее между зеркалами a_i^\perp и a_j^\perp , и разбивающее двугранный угол $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ на два непустых двугранных угла. При $(a_i, a_j) < 0$ в системе Φ_G есть корень

$a_k = \lambda a_i + \mu a_j$ с $\lambda, \mu > 0$, задающий зеркало, относительно которого двугранный угол $a_i^\perp \cap a_j^\perp$ расположен в одном полупространстве a_k^\perp . \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.8. Докажите лемму, пользуясь рис. 7◊10.

7.3.1. Положительные корни и стенки. Будем называть i -той стенкой часть i -того зеркала, расположенную вне его пересечений с остальными зеркалами, т. е. множество

$$\Sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} a_i^\perp \setminus \bigcup_j \Psi_{ij}^\perp.$$

Скажем, что зеркало a_i^\perp примыкает к камере C_ν , если существует отрезок $[x, y]$ с $x \in C_\nu, y \in \Sigma_i$, не пересекающий объединения зеркал Σ ни в каких других точках кроме a_i . Если выбрать в каждой паре противоположных корней $\pm a_i$ тот корень, относительно которого камера C_ν лежит в положительном полупространстве a_i^\perp , мы получим (зависящее от камеры C_ν) разбиение всей системы корней в дизъюнктное объединение двух центрально симметричных относительно нуля подмножеств

$$\Phi_\nu^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \Phi \mid \forall v \in C_\nu (v, a) > 0\} \quad \text{и} \quad \Phi_\nu^- \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \Phi \mid \forall v \in C_\nu (v, a) < 0\},$$

элементы которых называются *положительными* и *отрицательными* корнями относительно камеры C_ν .

ЛЕММА 7.4

Стенка Σ_a , отвечающая корню $a \in \Phi$, тогда и только тогда примыкает к камере C_ν , когда найдётся такая точка $y \in a^\perp$, что $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+$. Если $a_i, a_j \in \Phi_\nu^+$ задают стенки, примыкающие к камере C_ν , то $(a_i, a_j) \leq 0$, и равенство равносильно тому что $m_{ij} = 2$.

Доказательство. Пусть отрезок $[x, y]$ имеет $x \in C_\nu, y \in \Sigma_a$ и не пересекает ни одной гиперплоскости b^\perp с отличным от a корнем положительным корнем $b \in \Phi_\nu^+$. Тогда каждая линейная функция $f_b(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v, b)$ строго положительна на этом отрезке. В частности, $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+, b \neq a$. Наоборот, если есть такая точка $y \in a^\perp$, что $(y, b) > 0$ для всех $b \in \Phi_\nu^+, b \neq a$, то $y \in \Sigma_a$, и для любой точки $x \in C_\nu$ отрезок $[x, y]$ не пересекает ни одного зеркала b^\perp с $b \neq a$, а зеркало a^\perp пересекает только в точке y , поскольку линейная функция $f_a(v) \stackrel{\text{def}}{=} (v, a)$ строго положительна на одном конце этого отрезка, зануляется на другом, а значит, строго положительна во всех внутренних точках отрезка. Последнее утверждение леммы вытекает из лем. 7.3, так как в плоскости Ψ_{ij} зеркала a_i^\perp и a_j^\perp , которые примыкают к одной и той же камере C_ν , должны соседними, т. е. образовывать минимальный двугранный угол. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Строго докажите последнее утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3 (ЭФФЕКТИВНОСТЬ)

Конечная группа отражений G евклидова пространства V называется *эффективной*, если единственным неподвижным относительно всей группы вектором в V является нулевой вектор.

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Убедитесь, что группа G эффективна тогда и только тогда, когда её система корней Φ_G линейно порождает пространство V .

7.3.2. Простые корни. Зафиксируем какую-нибудь камеру C_ν и будем последовательно выкидывать из множества положительных корней Φ_ν^+ те корни, которые являются линейными комбинациями остальных с *положительными* коэффициентами. Оставшееся в результате множество корней обозначается через $\Delta_\nu \subset \Phi_\nu^+$, и его элементы называются *простыми корнями* (относительно камеры C_ν), а задаваемые ими отражения — *простыми отражениями*.

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Убедитесь, что ни один простой корень не является линейной комбинацией никаких других положительных корней с положительными коэффициентами.

ЛЕММА 7.5

Если группа G эффективна, множество Δ_ν является базисом в V и совпадает с множеством всех тех положительных корней, которые задают примыкающие к камере C_ν стенки. В частности, Δ_ν не зависит от произвола, имеющегося при его построении¹.

Доказательство. Каждый непростой корень $b \in \Phi_\nu^+ \setminus \Delta_\nu$ является положительной линейной комбинацией простых. Поэтому в гиперплоскости b^\perp нет таких векторов v , что $(v, a) > 0$ для всех $a \in \Delta_\nu$. Согласно лем. 7.4 зеркало b^\perp не содержит стенок, примыкающих к камере C_ν .

Заметим, что для любых двух различных простых корней a_i, a_j выполняется неравенство $(a_i, a_j) \leq 0$, поскольку в противном случае по лем. 7.3 существовал бы положительный корень вида $\lambda a_i - \mu a_j$ с положительными λ, μ , и простой корень a_i был бы положительной линейной комбинацией положительных корней вопреки упр. 7.11.

Покажем теперь, что простые корни линейно независимы. Пусть между ними есть соотношение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r = 0$, все коэффициенты которого ненулевые. Если они одного знака, можно считать их положительными. В таком случае, скалярно умножая левую часть на любой вектор $v \in C_\nu$, получаем строго положительное число, что невозможно, т. к. в правой части нуль. Если среди коэффициентов есть и положительные, и отрицательные, перенесем последние направо, получим соотношение

$$\lambda_{i_1} a_{i_1} + \lambda_{i_2} a_{i_2} + \dots + \lambda_{i_s} a_{i_s} = \mu_{j_1} a_{j_1} + \mu_{j_2} a_{j_2} + \dots + \mu_{j_t} a_{j_t},$$

где все коэффициенты положительны. Так как все $(a_i, a_j) \leq 0$, правая и левая части равны нулю по отдельности в силу идущего ниже упр. 7.12, и мы приходим к уже разобранным случаю.

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Пусть векторы a_1, a_2, \dots, a_k и b_1, b_2, \dots, b_m таковы, что $(a_i, b_j) \leq 0$ для всех i, j . Покажите что равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_m b_m$ с неотрицательными коэффициентами α_i, β_j возможно, если и только если обе его части равны нулю по отдельности, и (a_i, b_j) всякий раз, когда $\alpha_i \beta_j \neq 0$.

Поскольку группа G эффективна, положительные, а стало быть, и простые корни порождают всё пространство. Тем самым, простые корни $a \in \Delta_\nu$ составляют базис в V , а двойственные им линейные формы $g_a(v) = (v, a)$ образуют базис в V^* . Поэтому в пространстве V найдутся векторы, на которых одна из форм g_a нулевая, а все остальные положительны. По лем. 7.4 это означает, что все зеркала a^\perp примыкают к камере C_ν . \square

Следствие 7.3

К каждой камере Вейля эффективной группы отражений пространства V примыкает ровно $\dim V$ зеркал, и их нормали составляют базис в V . Отличные от нуля коэффициенты разложения любого корня группы G по этому базису либо все положительны, либо все отрицательны. \square

¹Т. е. порядка, в котором выкидываются лишние корни

ТЕОРЕМА 7.3

Каждая группа отражений G порождается простыми отражениями $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{a_i}$ относительно зеркал $a_1^\perp, a_2^\perp, \dots, a_n^\perp$, примыкающих к произвольно выбранной камере Вейля. Элементы группы G взаимно однозначно соответствуют камерам Вейля, и последние могут быть занумерованы элементами группы так, что $h(C_g) = C_{hg}$ для любых $g, h \in G$.

Доказательство (по Э. Б. Винбергу). Занумеруем камеры и обозначим через a_i простые корни относительно камеры C_1 , а через $\sigma_i = \sigma_{a_i}$ — соответствующие им простые отражения. Для каждой камеры C_μ выберем ненулевые векторы $u \in C_1$ и $w \in C_\mu$ единичной длины так, чтобы натянутая на них двумерная плоскость P_{uw} не пересекалась с $(n-2)$ -мерными пересечениями зеркал $\Psi_{ij}^\perp = a_i^\perp \cap a_j^\perp$ группы G . Пройдём из u в w по кратчайшей дуге окружности, высекаемой плоскостью P_{uw} на единичной сфере с центром в нуле, последовательно отражая камеру C_1 относительно встречаемых стенок и записывая подряд номера $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ тех стенок камеры C_1 через образы которых мы проходим. Дословно то же рассуждение, что в предшествующих [прим. 7.6](#), [прим. 7.8](#) и [прим. 7.7](#), показывает, что $C_\mu = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}(C_1)$. Таким образом, группа G действует на камерах Вейля транзитивно¹. Слово $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}$, считанное с дуги uw , зависит от выбора векторов u и w . Как мы видели на [рис. 7♦9](#) на стр. 115, при выборе других векторов некоторые фрагменты этого слова будут заменяться симметричными фрагментами согласно соотношениям $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}} = \text{Id}$, которые выражают тот факт, что композиция отражений в паре зеркал, примыкающих к одной камере, является поворотом на угол $2\pi/m_{ij}$, ибо примыкающие к одной камере зеркала являются ближайшими в конфигурации всех зеркал, проходящих через $(n-2)$ -мерное пространство Ψ_{ij}^\perp . Свяжем с каждой камерой C_μ элемент g_μ группы G , переводящий камеру C_1 в камеру C_μ только что описанным способом. По построению, этот элемент разлагается в равные друг другу в группе G композиции простых отражений

$$g_\mu = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}, \quad (7-13)$$

преобразующиеся одна в другую при помощи замен некоторых m_{ij} -буквенных фрагментов стоящего в правой части слова симметричными относительно пересечения i -того и j -того зеркала фрагментами:

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots}_{m_{ij}} \longleftrightarrow \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \dots}_{m_{ij}}$$

Все элементы $g_\mu \in G$ различны, поскольку переводят камеру C_1 в различные камеры C_μ . Остаётся показать, что каждый элемент $g \in G$ совпадает с одним из элементов g_μ .

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Убедитесь, что каждое отражение из группы G является композицией простых отражений, и выведите из этого, что все элементы группы G являются композициями простых отражений.

Запишем элемент g в виде композиции простых отражений и проведём индукцию по длине такого представления. Элементы, длины 0 и 1 суть Id и простые отражения σ_i , переводящие камеру C_1 в соседние камеры, имеющие с C_1 общую примыкающую стенку. Для них доказываемое утверждение тривиально. Пусть оно верно для всех композиций длины $\leq k$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, являющийся такой композицией. Достаточно проверить, что каждая композиция $g\sigma_j$ имеет вид g_μ для подходящего μ . Пусть $g(C_1) = C_\nu$. Обозначим через $H = g(a_j)^\perp$ примыкающее к камере C_ν зеркало, в которое переводится преобразованием g

¹Т. е. позволяет перевести любую камеру в любую другую камеру.

зеркало простого отражения σ_j . Если камеры C_1 и C_v лежат по одну сторону от зеркала H , как на рис. 7◊11, выберем векторы $u \in C_1$ и $w \in C_v$ так, чтобы продолжение дуги uw дальше за точку w уходило из камеры C_v сквозь зеркало H . По индукции элемент $g = g_v$ записывается считанным с дуги uw словом $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_m}$. Следовательно, элемент $g\sigma_j = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k} \sigma_j$ тоже записывается словом вида (7-13), считанным с продолжения дуги uw сквозь стенку H , а значит, $g\sigma_j$ совпадает с элементом g_τ , отвечающим соседней с C_v камере $C_\tau = \sigma_{g(a_j)}(C_v)$.

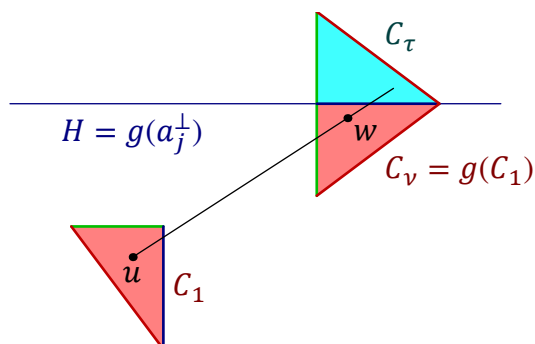


Рис. 7◊11. H не разделяет C_1 и C_v .

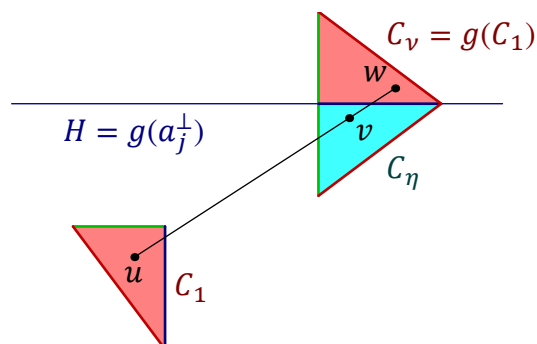


Рис. 7◊12. H разделяет C_1 и C_v .

Если камеры C_1 и C_v лежат по разные стороны от зеркала H , как на рис. 7◊12, выберем векторы $u \in C_1$ и $w \in C_v$ так, чтобы дуга uw входила в камеру C_v сквозь зеркало H , и обозначим через v какую-нибудь точку этой дуги, лежащую в предыдущей камере $C_\eta = \sigma_{g(a_j)}(C_v)$. По индукции, считанное с дуги uw слово для $g = g_v$ имеет вид $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}} \sigma_j$ с последней буквой σ_j . Поэтому $g\sigma_j = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}} = g_\eta$, ибо слово для элемента g_η , считанное с дуги uv , как раз и равно $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_{m-1}}$. \square

Замечание 7.2. Из доказательства теор. 7.3 видно, что эффективная группа отражений n -мерного евклидова пространства является фактором свободной группы на n образующих σ_i по наименьшей нормальной подгруппе¹, содержащей слова σ_i^2 и $(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}}$ для всех $i \neq j$, где m_{ij} это количество зеркал, проходящих через пересечение i -того и j -того зеркала (эквивалентно, острый угол между i -тым и j -тым зеркалами равен π / m_{ij}).

7.4. Графы Кокстера. В этом разделе мы дадим полную классификацию групп отражений. Назовём группу отражений G евклидова пространства V и её систему корней $\Phi = \Phi_G$ разложимыми, если пространство V раскладывается в ортогональную прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2$ так, что $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$, где $\Phi_i = \Phi \cap V_i$. В этом случае группа $G = G_1 \times G_2$ является прямым произведением двух своих подгрупп $G_1, G_2 \subset G$, действующих каждая на своём подпространстве V_i , оставляя дополнительное подпространство неподвижным. Очевидно, что каждая группа отражений является прямым произведением неразложимых подгрупп, эффективно действующих в попарно ортогональных подпространствах пространства V . Поэтому достаточно получить полный список неразложимых групп отражений G . Размерность пространства, в котором эффективно действует такая группа называется рангом неразложимой группы G . Выше мы видели, что ранг равен числу положительных простых (относительно произвольно зафиксированной камеры Вейля) корней a_1, a_2, \dots, a_n , и группа G полностью определяется попарными углами

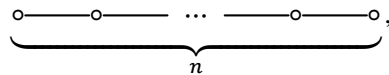
¹Точный смысл сказанного разъясняется в курсе алгебры, см., к примеру, лекцию <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf>.

между этими корнями или, что то же самое, двугранными углами между стенками камеры Вейля. Они однозначно характеризуются целыми числами $m_{ij} \geq 2$ — количествами зеркал группы G , проходящих через пересечение i -той и j -той стенки выбранной камеры Вейля. При этом угол между i -той и j -той стенками равен π/m_{ij} , а угол между простыми положительными корнями a_i и a_j равен $\pi(1 - m_{ij}^{-1})$.

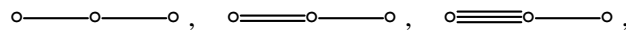
Набор чисел m_{ij} , связанных с зеркалами произвольной группы отражений G , принято кодировать неориентированным *графом Кокстера*, вершины которого биективно соответствуют простым корням, и i -тая вершина соединена с j -той ровно $(m_{ij} - 2)$ -мя рёбрами. Таким образом, между ортогональными корнями рёбер нет, а паре зеркал, составляющих двугранный угол $\pi/3$, отвечают вершины, соединённые одним ребром, зеркалам с углом $\pi/4$ между ними — вершины, соединённые двумя рёбрами, и т. д.

УПРАЖНЕНИЕ 7.14. Убедитесь, что система корней неразложима, если и только если её граф Кокстера связан.

Например, система корней типа A_n из [прим. 7.8](#) на стр. 116, задающая группу правильного n -мерного симплекса, имеет согласно [упр. 7.4](#) граф Кокстера



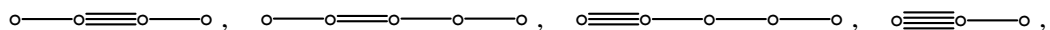
который так и называется *графом A_n* . Диэдральная группа D_m из [прим. 7.6](#) на стр. 111 имеет ранг 2 и граф Кокстера из двух вершин, соединённых $(m - 2)$ рёбрами, а группы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра из [прим. 7.7](#) на стр. 113 имеют ранг 3 и графы Кокстера



у которых число рёбер между вершинами i и j равно числу m_k из таблицы со стр. 113.

Поскольку определитель Грама набора простых корней положителен¹, связный граф без петель² может быть графом Кокстера, только если симметричная матрица с $g_{i,i} = 1$ и недиагональными элементами $g_{ij} = g_{ji} = -\cos(\pi/m_{ij})$ имеет положительный определитель. Кроме того, при удалении из графа Кокстера любого набора вершин вместе со всеми приходящими в эти вершины рёбрами оставшийся граф также будет графом Кокстера группы отражений в пересечениях оставшихся зеркал с линейной оболочкой оставшихся простых корней.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Покажите, что в графе Кокстера не может быть подграфов вида



указав в них пару векторов с не положительным определителем Грама. Убедитесь, что графов Кокстера, получающихся из нарисованных увеличением кратности имеющегося в них кратного ребра, тоже не существует.

Лемма 7.6

Среди любых m вершин графа Кокстера рёбрами соединяется не более $m - 1$ пар. В частности, в графе Кокстера нет циклов.

¹Ибо они линейно независимы, как мы убедились в доказательстве [лем. 7.5](#) на стр. 120.

²Т. е. рёбер, начало которых совпадает с концом.

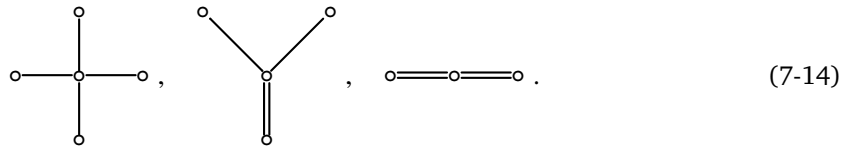
Доказательство. Выкинув все остальные вершины и примыкающие к ним рёбра, получаем граф Кокстера системы из m простых корней a_1, a_2, \dots, a_m . Поскольку $(a_i, a_j) \leq 0$ для всех $i \neq j$ по лем. 7.4 на стр. 119, для скалярного квадрата суммы всех этих корней¹ получаем неравенство

$$0 < \left(\sum_{i=1}^m a_i, \sum_{i=1}^m a_i \right) = m - 2 \sum_{i < j} \cos(\pi/m_{ij}) \leq m - k,$$

где k равно числу таких пар $i < j$, что $m_{ij} \geq 3$. Тем самым, $k \leq m - 1$. □

Лемма 7.7

В графе Кокстера нет подграфов вида



Доказательство. Выкидывая остальные вершины вместе с примыкающими к ним рёбрами, получаем систему простых корней, в которой все крайние корни e_i образуют ортонормальный базис своей линейной оболочки U . Поскольку центральный корень $c \notin U$, его ортогональная проекция на U имеет длину $|c_U| < 1$. В наших трёх случаях координаты проекции

$$c_U = \sum_i (c, e_i) \cdot e_i = \begin{cases} (1/2, 1/2, 1/2, 1/2) & \text{в базисе } e_1, e_2, e_3, e_4 \\ (1/2, 1/2, \sqrt{3}/2) & \text{в базисе } e_1, e_2, e_3 \\ (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2) & \text{в базисе } e_1, e_2 \end{cases}$$

и её длина $|c_U| \geq 1$. Противоречие. □

Лемма 7.8 (стягивание простых цепочек)

Если граф Кокстера содержит цепочку вида



крайние вершины которой могут быть соединены с какими-то другими вершинами графа, но во внутренние вершины больше не ведёт никаких рёбер, кроме нарисованных, то при замене всей цепочки на одну вершину, в которую входят все рёбра, ранее входившие в две крайних вершины цепочки (7-15), также получится граф Кокстера.

Доказательство. Пусть корни a_1, a_2, \dots, a_m соответствуют вершинам цепочки (7-15). Их сумма s имеет скалярный квадрат

$$(s, s) = \sum_{i=1}^m (a_i, a_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} (a_i, a_{i+1}) = m - (m - 1) = 1,$$

а скалярное произведение s с любым не входящим в цепочку корнем a_j равно

$$(s, a_j) = \sum_{i=1}^m (a_i, a_j) = (a_1, a_j) + (a_m, a_j).$$

¹Которая отлична от нуля поскольку простые корни линейно независимы.

Поскольку в графе Кокстера нет петель, из двух произведений в правой части отлично от нуля может быть лишь одно. Следовательно, угол образуемый вектором s с корнем a_j либо такой же, как у a_1 с a_j , либо такой же как у a_m с a_j , т. е. имеет вид $\pi(1 - m^{-1})$ для целого $m \geq 2$. Следовательно, вектор s вместе со всеми остальными корнями a_j , не входящими в цепочку (7-15), образует систему простых корней с графом Кокстера, который получается из исходного графа стягиванием цепочки (7-15) в одну точку. \square

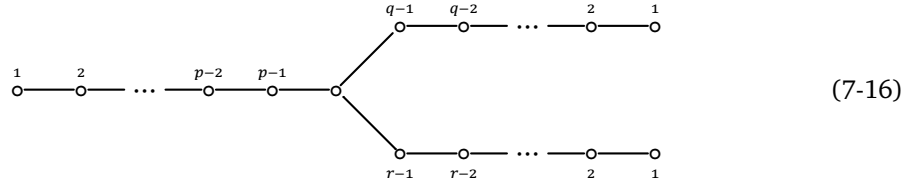
Следствие 7.4 (отсутствие двух кратных объектов)

В связном графе Кокстера не может быть ни двух вершин валентности ≥ 3 , ни двух пар кратных рёбер¹, ни вершины валентности ≥ 3 вместе с кратным ребром (не обязательно идущим в эту вершину).

Доказательство. Стягивая цепочку вида (7-15), связывающую друг с другом пару нежелательных нам объектов, мы получаем один из трёх подграфов, запрещённых по лем. 7.7. \square

Лемма 7.9 (классификация мерcedesов)

Пусть граф Кокстера имеет трёхвалентную вершину, в которую ведут цепочки из $p - 1$, $q - 1$ и $r - 1$ последовательных рёбер



(так что всего в рассматриваемом подграфе $p + q + r - 2$ вершин). Тогда тройка чисел (p, q, r) с точностью до перестановки имеет вид $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ или $(2, 2, m)$ с любым целым $m \geq 2$.

Доказательство. Обозначим центральный корень через e , а остальные — через a_i , b_i и c_i , занумеровав их от окраины к центру, как показано на графе (7-16). Положим

$$\begin{aligned} a &\stackrel{\text{def}}{=} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1) \cdot a_{p-1} \\ b &\stackrel{\text{def}}{=} b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + (q-1) \cdot b_{q-1} \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + (r-1) \cdot c_{r-1}. \end{aligned}$$

Векторы a , b , c образуют ортогональный базис в своей линейной оболочке U и имеют скалярные квадраты $(a, a) = p(p-1)/2$, $(b, b) = q(q-1)/2$, $(c, c) = r(r-1)/2$, поскольку

$$\left(\sum_{k=1}^{p-1} k a_k, \sum_{k=1}^{p-1} k a_k \right) = \sum_{k=1}^{p-1} k^2 - \sum_{k=1}^{p-2} k(k+1) = (p-1)^2 - \frac{(p-2)(p-1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

и аналогично для векторов b и c . Так как вектор $e \notin U$, длина его ортогональной проекции

$$e_U = \frac{(e, a)}{(a, a)} \cdot a + \frac{(e, b)}{(b, b)} \cdot b + \frac{(e, c)}{(c, c)} \cdot c$$

¹Т. е. пар вершин, соединённых между собою более, чем одним ребром.

на подпространство U строго меньше единицы, откуда

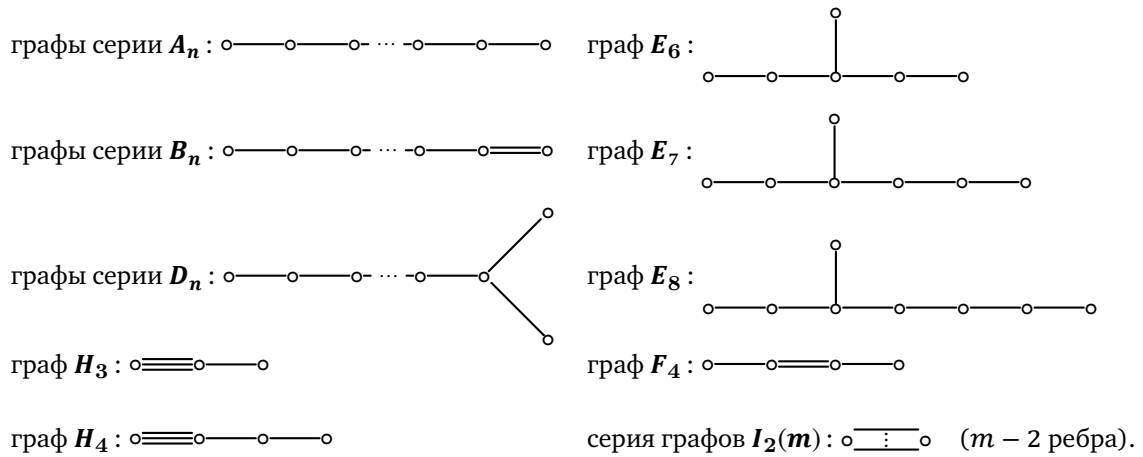
$$1 > (e_U, e_U) = \frac{(e, a)^2}{(a, a)} + \frac{(e, b)^2}{(b, b)} + \frac{(e, c)^2}{(c, c)} = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r}.$$

Все решения неравенства $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$ в натуральных числах $p, q, r > 1$ как раз и перечислены в лем. 7.9. □

УПРАЖНЕНИЕ 7.16. Удостоверьтесь в этом.

ТЕОРЕМА 7.4

Полный список связных графов Кокстера таков (нижний индекс равен числу вершин):



Доказательство. Из предыдущих лемм вытекает, что все связные графы Кокстера содержатся в указанном списке, так что остаётся лишь предъявить соответствующие системы корней. Систему A_n мы изучали в прим. 7.8 на стр. 116. Граф H_3 отвечает группе икосаэдра из прим. 7.7 на стр. 113, а графы $I_2(m)$ — диэдральным группам D_m из прим. 7.6 на стр. 111.

Система корней B_n строится следующим образом. Рассмотрим в \mathbb{R}^n все векторы с целыми координатами, имеющие длину 1 или 2, т. е. все векторы вида $\pm e_i$ и $\pm e_i \pm e_j$, где $1 \leq i < j \leq n$, а через e_1, e_2, \dots, e_n , как обычно, обозначен стандартный базис в \mathbb{R}^n . Таким образом мы имеем всего $2n + 2n(n - 1) = 2n^2$ зеркал. Отражения σ_{e_i} независимо меняют знаки координат и составляют группу, изоморфную $(\mathbb{Z}/(2))^n$. Отражения $\sigma_{e_i - e_j}$ образуют группу перестановок базисных векторов¹. Отражения $\sigma_{e_i + e_j} = \sigma_{e_j} \sigma_{e_i - e_j} \sigma_{e_j}$ выражаются через предыдущие. Так как симметрическая группа нормализует группу смен знаков координат, т. е. для любой перестановки базисных векторов $g \in S_n$ и любых i_1, i_2, \dots, i_k

$$g \sigma_{e_{i_1}} \sigma_{e_{i_2}} \dots \sigma_{e_{i_k}} g^{-1} = \sigma_{e_{g(i_1)}} \sigma_{e_{g(i_2)}} \dots \sigma_{e_{g(i_k)}},$$

рассматриваемые отражения порождают конечную группу, изоморфную полупрямому произведению² $(\mathbb{Z}/(2))^n \rtimes S_n$ в котором второй сомножитель действует на первом перестановками

¹См. прим. 7.8 на стр. 116.

²См. зам. 2.1. на стр. 27.

компонент.

УПРАЖНЕНИЕ 7.17. Убедитесь, что построенная группа совпадает с группой стандартного правильного кокуба¹ $C^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -1 \leq \sum x_i \leq 1 \right\}$, и n векторов

$$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$$

являются её простыми корнями, а их граф Кокстера это B_n .

Отражения $\sigma_{e_i - e_j}$ и $\sigma_{e_i + e_j}$ порождают в группе B_n подгруппу индекса 2, содержащую всевозможные перестановки координат и одновременные смены знака лишь у любого чётного числа базисных векторов. Эта группа изоморфна полупрямому произведению $(\mathbb{Z}/(2))^{n-1} \rtimes S_n$ и векторы $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$ являются её простыми корнями.

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь, что их граф Кокстера это D_n .

Система корней E_8 строится так. Рассмотрим в $\mathbb{Z}^8 \subset \mathbb{R}^8$ подрешётку E , образованную всеми векторами с чётной суммой координат, и обозначим через $L \subset \mathbb{R}^8$ подрешётку, порождённую решёткой E и вектором $w = \frac{1}{2} \sum e_i$, где e_1, e_2, \dots, e_8 — стандартный базис в \mathbb{R}^8 . Таким образом, решётка L состоит из всевозможных целочисленных линейных комбинаций вида $z_1 u + z_2 w$ с $u \in E$ и $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.19. Проверьте, что скалярные квадраты всех векторов $v \in L$ являются чётными целыми числами.

Система корней Φ типа E_8 образована всеми векторами из L минимально возможной длины $\sqrt{2}$. Всего имеется 240 таких векторов, а именно двучленные суммы $\pm e_i \pm e_j$ с $1 \leq i < j \leq 8$ и восьмичленные полусуммы $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ с чётным числом плюсов.

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Убедитесь, что отражения относительно всех этих векторов переводят множество Φ в себя, и выведите отсюда, что эти отражения порождают конечную группу. Убедитесь, что вектор $\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^7 e_i)$, вектор $e_1 + e_2$ и шесть векторов $e_{i-1} - e_{i-2}$ с $3 \leq i \leq 8$ являются простыми корнями этой группы и имеют граф Кокстера E_8 .

Системы корней E_6 и E_7 получаются из E_8 ограничением на линейную оболочку первых шести и семи простых корней. Граф F_4 является графом Кокстера группы октаплекса, а H_4 — графом Кокстера группы четырёхмерного правильного многогранника с символом Шлефли $(3, 3, 5)$, своего рода «четырёхмерного икосаэдра». Подробнее об этих многогранниках см. в Листке Г7 $\frac{1}{2}$. Естественно всего они возникают в рамках двумерной комплексной эрмитовой геометрии, и мы отложим их обсуждение до той поры, когда познакомимся с нею поближе. \square

¹Т. е. выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$ в \mathbb{R}^n .

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 7.2. Первое следует из того что (собственные) изометрии образуют группу, второе — из того, что композиция любого несобственной изометрии из группы фигуры с отражением в содержащей эту фигуру гиперплоскости является собственной изометрией и задаёт то же самое преобразование фигуры, что и исходная несобственная изометрия.

Упр. 7.3. Для любой биекции из множества вершин тетраэдра в себя существует единственная единственная линейная изометрия, действующая на вершины согласно заданной биекции.

Упр. 7.4. Обозначим через v_i вектор, идущий из центра симплекса Δ в вершину i . Вектор $n_{ij} = v_i - v_j$ ортогонален гиперплоскости π_{ij} , поскольку для любого $k \neq i, j$ скалярное произведение $(n_{ij}, v_k - (v_i + v_j)/2) = (v_i, v_k) - (v_j, v_k) + (v_i, v_i)/2 - (v_j, v_j)/2 = 0$, т. к. все произведения (v_i, v_j) с $i \neq j$ и все скалярные квадраты (v_i, v_i) одинаковы. Аналогичная выкладка показывает, что при $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ векторы n_{ij} и n_{km} ортогональны. Векторы $v_i - v_k$ и $v_k - v_j$ в натянутой на них двумерной плоскости являются сторонами правильного треугольника с вершинами в концах векторов v_i, v_j и v_k . Поэтому угол между ними равен $\pi/3$.

Упр. 7.5. Выберем вектор u произвольно внутри угла e . Линейная оболочка вектора u и пересечения каких-либо двух зеркал конфигурации является гиперплоскостью в V , и всего таких гиперплоскостей имеется конечное число. Поскольку объединение конечного числа гиперплоскостей не может совпадать со всем пространством¹, возможность для выбора w есть.

Упр. 7.8. Минимальный угол между зеркалами не может быть тупым, и прямой он только когда есть всего два ортогональных зеркала. Если угол $\sphericalangle(a_i, a_j)$ тупой, между этими векторами имеется зеркало. Нормальный вектор этого зеркала можно выбрать лежащим внутри угла, образуемого векторами a_i и $-a_j$, т. е. вида $\alpha a_i - \beta a_j$ с $\alpha, \beta > 0$. Если угол $\sphericalangle(a_i, a_j)$ острый, то угол между векторами a_i и $-a_j$ тупой, а значит, между ними есть зеркало с направляющим вектором, лежащим между векторами a_i, a_j , т. е. вида $\alpha a_i + \beta a_j$ с $\alpha, \beta > 0$.

Упр. 7.9. Пусть точки $x \in a_i^\perp, y \in a_j^\perp$ таковы, что $(a_k, x) > 0$ для всех $a_k \in \Phi_v^+$ с $k \neq i$ и $(a_k, y) > 0$ для всех $a_k \in \Phi_v^+$ с $k \neq j$. Тогда их ортогональные проекции на плоскость Ψ_{ij} лежат на сторонах a_i^\perp, a_j^\perp угла $a_i^\perp \cap a_j^\perp$, и проекция отрезка $[x, y]$ не пересекает ни одной прямой a_k^\perp с $k \neq i, j$.

Упр. 7.10. Совпадение линейной оболочки корней a_i со всем пространством V равносильно равенству $\bigcap a_i^\perp = 0$. С другой стороны, множество неподвижных относительно всей группы G векторов пространства V тоже является пересечением этих зеркал.

Упр. 7.11. Пусть $a_r = \sum_{i < r} \lambda_i a_i + \sum_{j > r} \lambda_j a_j$, где все $\lambda_i \leq 0$ и некоторые из них строго положительны.

Выражая векторы a_j через векторы a_i с положительными коэффициентами, получим равенство вида $\mu a_r = \sum_{i < r} \mu_i a_i$, в котором все $\mu_i \geq 0$ и некоторые из них строго положительны. Скалярно умножая обе части на произвольный вектор $v \in C_e$, получим справа строго положительное число. Поэтому $\mu \cdot (v, a_r) > 0$, и $\mu > 0$, так как $(v, a_r) > 0$. Тем самым, вектор a_r линейно выражается с положительными коэффициентами через векторы a_1, a_2, \dots, a_{r-1} , и мы должны были бы его выкинуть.

Упр. 7.12. Скалярный квадрат стоящего в обоих частях вектора

$$\left(\sum_{\alpha} \lambda_{i_\alpha} a_{i_\alpha}, \sum_{\beta} \mu_{j_\beta} a_{j_\beta} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{i_\alpha} \mu_{j_\beta} (a_{i_\alpha}, a_{j_\beta}) \leq 0$$

¹См. упр. 4.4 на стр. 60.

в силу неравенств $(a_i, b_j) \leq 0$. Поэтому и этот вектор, и все слагаемые в предыдущей формуле нулевые.

Упр. 7.13. По сл. 7.2 на стр. 111 отражение относительно примыкающей к камере $C_\mu = g_\mu(C_e)$ стенки $g_\mu(a_i^\perp)$, где $a_i \in \Delta_e$ — произвольный простой корень, равно $\sigma_{g_\mu(a_i)} = g_\mu \sigma_i g_\mu^{-1}$, а значит, является композицией простых отражений σ_i , ибо g_μ является такой композицией.

Упр. 7.14. Связные компоненты графа как раз и отвечают взаимно ортогональным подмножествам корней.

Упр. 7.15. Выкинем из графов все остальные вершины вместе с приходящими в них рёбрами и обозначим через a_1, a_2, a_3, \dots корни, отвечающие вершинам оставшегося графа, прочитанным слева направо. Для первого графа матрица Грама векторов $u = a_1 + 2a_2, w = 2a_3 + a_4$ имеет

$$\det \begin{pmatrix} 5 + 4(a_1, a_2) & 4(a_2, a_3) \\ 4(a_2, a_3) & 5 + 4(a_3, a_4) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ -4 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & 3 \end{pmatrix} = 9 - 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right) < 0$$

при¹ $m \geq 5$, где $m - 2$ — число рёбер между второй и третьей вершинами. Для остальных трёх графов нулевой или отрицательный определитель Грама будут иметь векторы

$$\begin{aligned} u &= a_1 + 2a_2 & w &= 2a_3 + a_4 + a_5, \\ u &= a_1 & w &= 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \\ u &= a_1 & w &= 2a_2 + a_3. \end{aligned}$$

¹Напомню, что $\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$.