§5. Объёмы и определители

5.1. Объём n-мерного ориентированного параллелепипеда в n-мерном векторном пространстве V (или *форма объёма* на V) это ненулевая функция $\omega : V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk$ со следующими двумя свойствами[1]:

1) объём не меняется при добавлений к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega\left(\,\dots\,,\, v_i + \lambda v_j,\,\dots\,,\, v_j,\,\dots\right) = \omega\left(\,\dots\,,\, v_i,\,\dots\,,\, v_j,\,\dots\right)$

2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\,\dots\,,\, \lambda v_i,\,\dots) = \lambda\,\omega(\,\dots\,,\, v_i,\,\dots)\,.$$

На геометрическом языке эти свойства означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, как на рис. 5◇1, умножается на λ при умножении любого из рёбер на λ, и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n-1)$-мерных граней друг относительно друга в направлении одного из рёбер, параллельных этим граням (двумерная параллельная проекция происходящего на плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, вдоль дополнительного $(n-2)$-мерного подпространства, порождённого всеми остальными рёбрами, изображена на рис. 5◇2).

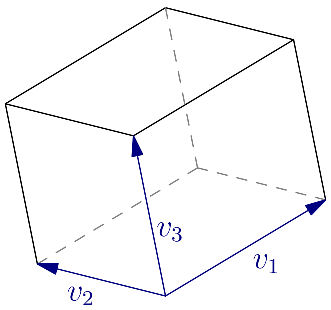


Рис. 5◇1. Параллелепипед.

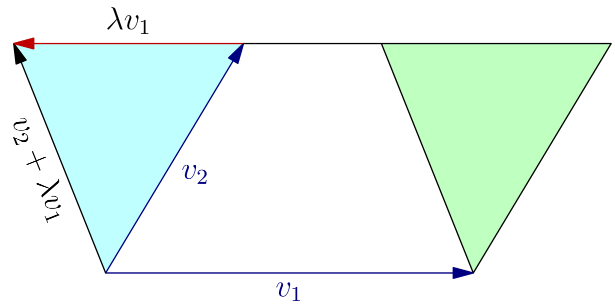


Рис. 5◇2. Параллельный перекос.

Дословно также, как лем. 1.3 на стр. 13 доказывается

Лемма 5.1

На n-мерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ всякая форма n-мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

1) если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$

2) форма ω кососимметрична, т. е. обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают

3) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega\,(\,\dots\,,\, \lambda v + \mu w,\,\dots\,) = \lambda\,\omega\,(\,\dots\,,\, v,\,\dots\,) + \mu\,\omega\,(\,\dots\,,\, w,\,\dots\,)\,. \tag{5-1}$$

[1] Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

4) форма ω знакопеременна[1]: $\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)$.

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, скажем,

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0\cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0$. Это доказывает первое свойство. Второе свойство является частным случаем первого. Свойство (3) очевидно выполняется, когда оба набора аргументов в правой части (5-1) линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части равенства (5-1) зануляются. Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства V. Тогда $w = \varrho v + u$, где u является линейной комбинацией остальных $(n-1)$ аргументов, и левая часть (5-1) равна $\omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)\cdot v + \mu u, \dots) = (\lambda + \mu\varrho)\cdot\omega(\dots, v, \dots)$, а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu\omega(\dots, \varrho v + u, \dots) = \mu\varrho\cdot\omega(\dots, v, \dots)$. Тем самым, правая часть совпадает с левой. Знакопеременность следует из кососимметричности и аддитивности по каждому аргументу: $0 = \omega(\dots, (u+w), \dots, (u+w), \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$. □

5.1.1. Описание кососимметричных n-линейных форм. Функция от k векторов

$$V \times \dots \times V \to \mathbb{k},$$

линейная по каждому из векторов при фиксированных остальных, называется *k-линейной формой* на векторном пространстве V.

Упражнение 5.1. Убедитесь, что k-линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы.

Покажем, что пространство n-линейных кососимметричных форм на n-мерном векторном пространстве V одномерно. Пусть ω является такой формой. Зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и выразим значение $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ на произвольном наборе векторов через $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Пусть $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)\cdot C$, где $C = \left(c_{ij}\right)$ — матрица размера $n \times n$, в j-том столбце которой стоят координаты вектора v_j в базисе e, т. е.

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot c_{ij}.$$

Тогда в силу линейности формы ω по каждому из аргументов

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega\Big(\sum_{i_1} c_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} c_{i_n n} e_{i_n}\Big) = \\ = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1}\cdot c_{i_2 2}\cdot \dots \cdot c_{i_n n}\cdot \omega\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right). \tag{5-2}$$

Так как при совпадении двух аргументов ω обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму дают только такие $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ встречается ровно один раз, т. е. всевозможные перестановки набора $(1, 2, \dots, n)$. Всякую такую перестановку

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

[1] Т. е. умножается на -1 при перестановке любых двух аргументов.

можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g : \{1, 2, \dots , n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots , n\}, \quad i \mapsto g_i .$$

Таким образом, множество перестановок есть не что иное как группа всех биективных отображений из множества $\{1, 2, \dots , n\}$ в себя. Эта группа обозначается S_n и называется *n-той симметрической группой*. Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i-того и j-того элементов.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Поскольку при транспозиции аргументов форма ω меняет знак, для любой перестановки g

$$\omega(e_{g_1}, e_{g_2}, \dots , e_{g_n}) = \pm\omega(e_1, e_2, \dots , e_n).$$

Перестановка g называется *чётной*, если она представима в виде композиции чётного числа транспозиций, и *нечётной*, если её можно разложить в композицию нечётного числа транспозиций. Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g, не зависит от способа разложения. Мы докажем это в n° 5.3 на стр. 76 ниже, а сейчас закончим вычисление (5-2). Определим *знак* $\operatorname{sgn}(g)$ перестановки $g = (g_1, g_2, \dots , g_n)$ равенством

$$\operatorname{sgn}(g) = \begin{cases} +1 , & \text{если } g \text{ чётна,} \\ -1 , & \text{если } g \text{ нечётна.} \end{cases} \tag{5-3}$$

Упражнение 5.3. Убедитесь, что $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$, т. е. отображение $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

Из вычисления (5-2) вытекает, что

$$\omega(v_1, v_2, \dots , v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots , e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} . \tag{5-4}$$

Поскольку правая сумма зависит только от матрицы C, но не от формы ω, мы заключаем, что значение произвольной кососимметричной n-линейной формы на произвольном наборе векторов однозначно вычисляется, как только задано значение формы ω на каком-нибудь одном базисе пространства V. В частности, любые две такие формы ω_1, ω_2 пропорциональны, и для всех наборов векторов $v_1, v_2, \dots , v_n \in V$

$$\frac{\omega_1(v_1, v_2, \dots , v_n)}{\omega_2(v_1, v_2, \dots , v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, e_2, \dots , e_n)}{\omega_2(e_1, e_2, \dots , e_n)}$$

где $e_1, e_2, \dots , e_n$ — любой фиксированный базис пространства V. Тем самым, правая часть этого равенства не зависит от выбора базиса точно так же, как левая не зависит от выбора векторов $v_1, v_2, \dots , v_n$. Нам остаётся убедиться, что при любом выборе константы $\omega(e_1, e_2, \dots , e_n) \in \Bbbk$ формула (5-4) действительно определяет кососимметричную n-линейную форму на V, т. е. что сумма, стоящая в правой части этой формулы, является кососимметричной функцией от столбцов матрицы C и линейна по каждому столбцу при фиксированных остальных. Это будет сделано в предл. 5.1 ниже.

5.2. Определители. Функция

$$\det C \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \tag{5-5}$$

называется *определителем* квадратной матрицы $C = \left(c_{ij}\right)$ размера $n \times n$. Формула (5-5) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице C по n элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Множество клеток, в которых стоят выбранные элементы, является графиком биективного отображения $j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк. Выбранные n элементов перемножаются, и произведению приписывается знак, равный знаку соответствующей перестановки $j \mapsto g_j$. Полученные таким образом $n!$ произведений со знаками складываются. Так, определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{5-6}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \tag{5-7}$$

$$- c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \tag{5-8}$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции). Из этого описания вытекает, что определитель не меняется при отражении матрицы C относительно *главной диагонали*, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. Такое отражение называется *транспонированием*, и матрица $C^t = \left(c^t_{ij}\right)$ с $c^t_{ij} \overset{\text{def}}{=} c_{ji}$ называется *транспонированной* к матрице $C = \left(c_{ij}\right)$. При транспонировании строки и столбцы меняются ролями, и равенство

$$\det C^t = \det C \tag{5-9}$$

выполняется в силу того, что $\det C^t$ является суммой произведений тех же самых n-ок элементов, задающих всевозможные биекции $j \mapsto g_j$, только каждое произведение берётся теперь со знаком $\operatorname{sgn}(g^{-1})$ обратной к g биекции из множества строк в множество столбцов.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность.

Предложение 5.1
Определитель линеен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое очевидно из формулы (5-5): каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, а значит, линейна и вся сумма. Если i-тый столбец матрицы C совпадает с j-тым, то в сумме (5-5) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g\sigma_{ij}$, поскольку $\operatorname{sgn}(h) = -\operatorname{sgn}(g)$, а $c_{h_1 1}c_{h_2 2} \cdots c_{h_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j i} \cdots c_{g_i j} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_i i} \cdots c_{g_n n} = c_{g_1 1}c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n}$. □

Следствие 5.1
Пространство n-линейных кососимметричных форм на n-мерном векторном пространстве одномерно.

Доказательство. Выберем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и для любого набора векторов

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$$

положим $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C$. По предл. 5.1 форма ω кососимметрична и n-линейна. Она ненулевая, поскольку $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. Как мы видели в n° 5.1.1 выше, все прочие n-линейные кососимметричные формы пропорциональны ω. □

Следствие 5.2
На каждом n-мерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n-мерного объёма ω. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис V, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, линейно выражающихся через базис как $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det C \tag{5-10}$$

для любой формы объёма ω на V.

Доказательство. Из лем. 5.1 на стр. 71 вытекает, что всякая форма объёма n-линейна и кососимметрична. Наоборот, всякая n-линейная кососимметричная форма является формой объёма: свойства (1), (2) со стр. 71 очевидным образом вытекают из линейности и кососимметричности. □

Следствие 5.3
Определитель $n \times n$-матрицы является n-линейной кососимметричной функцией от её строк.

Доказательство. Это следует из предл. 5.1 и равенства (5-9). □

5.2.1. Определитель произведения матриц. Напомню, что произведение матриц задаётся формулами (2-8) и (2-9) на стр. 28.

Упражнение 5.5. Пусть векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно выражаются через $v_1, v_2, \dots, v_m$ по формуле $(u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \cdot A$, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ линейно выражаются через векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$ по формуле $(v_1, v_2, \dots, v_m) = (w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot B$, где A и B — некоторые матрицы с элементами из поля $\Bbbk$ размеров $m \times k$ и $n \times m$ соответственно. Убедитесь, что $(u_1, u_2, \dots, u_k) = (w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot BA$, и покажите, что умножение матриц ассоциативно, т. е. $(AB)C = A(BC)$ всякий раз когда хотя бы одна из частей этого равенства определена.

Предложение 5.2
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых квадратных матриц A и B одинакового размера. В частности, $\det(AB) = \det(BA)$.

Доказательство. Рассмотрим столбцы матрицы A как векторы из координатного пространства $\Bbbk^n$ и обозначим их через $v_1, v_2, \dots, v_n$. Если они линейно зависимы, то размерность их линейной оболочки меньше n. Поскольку j-тый столбец матрицы AB является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из j-того столбца матрицы B, все столбцы матрицы AB лежат в линейной оболочке столбцов матрицы A. Тем самым, размерность их линейной оболочки тоже меньше n, и они также линейно зависимы. Стало быть, обе части равенства

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ в этом случае нулевые. Если векторы v_i линейно независимы, то они образуют в $\Bbbk^n$ базис. Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_n$ стандартный базис пространства $\Bbbk^n$, а через ω_e и ω_v такие две формы объёма на $\Bbbk^n$, что $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ и $\omega_v(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$. По сл. 5.2 эти две формы пропорциональны друг другу. Так как $\omega_e(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(A)$, для любых векторов $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Bbbk^n$ выполняется равенство

$$\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(A) \cdot \omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n). \tag{5-11}$$

Для векторов $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot AB$, на которых наши формы объёма принимают значения $\omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(B)$ и $\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(AB)$, формула (5-11) превращается в требуемое равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. □

5.3. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки. В этом разделе мы дадим другое, заведомо корректное определение знака перестановки и покажем, что получающийся в результате знак совпадает со знаком из форм. (5-3) на стр. 73.

Назовём упорядоченную пару чисел (i, j), в которой $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *инверсной парой* перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ пар (i, j) с $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Число $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g. Число $\operatorname{sgn}(g) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g.

Упражнение 5.6. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Лемма 5.2
$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ и транспозиции σ_{ij}.

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_i}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_j}, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \\ g\sigma_{ij} &= \big(g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_j}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_i}, g_{j+1}, \dots, g_n\big) \end{aligned} \tag{5-12}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j, стоящих на i-том и j-том местах перестановки g. В этих двух перестановках пара (i, j), а также $2(j-i-1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. □

Следствие 5.4
Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$. В частности, чётность числа m не зависит от выбора разложения g в композицию транспозиций, а знак перестановки совпадает с тем, что использовался в форм. (5-3) на стр. 73. □

5.3.1. Правило ниточек. Чётность числа инверсий может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*[1]. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 5⋄3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни

[1]Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак явно заданной длинной перестановки — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Тем не менее, он оказывается полезен во многих вычислениях, с которыми мы столкнёмся далее.

одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[1]. Тогда чётность числа инверсий равна чётности числа точек пересечения нитей.

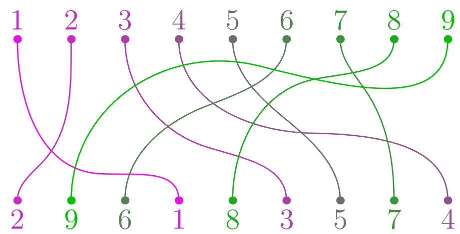


Рис. 5⋄3. $\mathrm{sgn}(2,\ 9,\ 6,\ 1,\ 8,\ 3,\ 5,\ 7,\ 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

Упражнение 5.7. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей перестановки* $(i_1, i_2, \dots, i_k,\ j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \quad \text{и} \quad (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

5.4. Правила Крамера. Если воспринимать столбцы $n \times n$ матрицы C как векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ и обозначить их $v_1, v_2, \dots, v_n \in \Bbbk^n$, про определитель $\det C$ можно думать как про n-линейную кососимметричную функцию от этих векторов. В этом случае мы пишем $\det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ вместо $\det C$. Непосредственным обобщением лем. 1.2 со стр. 11 является

Предложение 5.3 (первое правило Крамера)
Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ образуют базис в $\Bbbk^n$, если и только если $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i-тая координата произвольного вектора $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}\,. \tag{5-13}$$

Доказательство. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ не образуют базиса, то они линейно зависимы, и, скажем, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Тогда $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det\left(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,\ v_2, \dots, v_n\right) = 0$ в силу полилинейности и кососимметричности определителя. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ образуют базис, то каждый вектор $w \in \Bbbk^n$ обладает единственным разложением вида

$$w = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n\,.$$

Применение к обеим частям этого равенства линейного функционала

$$V \to \Bbbk\,, \quad u \mapsto \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n\right)\,,$$

приводит к требуемому равенству

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = x_i \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_n)\,.$$

[1]Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

Остаётся показать, что в этом случае $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$. Пусть базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ и стандартный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно выражаются друг через друга по формулам

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot D \quad \text{и} \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C\,.$$

Тогда $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot D = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot CD$, и из единственности разложения векторов по базису вытекает, что

$$CD = E \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

это *единичная матрица*, с единицами на главной диагонали и нулями в остальных местах.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что $\det E = 1$ и $AE = A$, $EB = B$ для любых матриц A, B на которые возможно умножить матрицу E.

По предл. 5.2 на стр. 75 $\det C \cdot \det D = \det E = 1$, откуда $\det C = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$. □

Пример 5.1 (уравнение гиперплоскости)
Пусть n точек $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ аффинного пространства, ассоциированного с n-мерным координатным векторным пространством V, не лежат в одном $(k-2)$-мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 4.9 через них проходит единственная гиперплоскость, и точка x лежит в этой гиперплоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overrightarrow{p_n p}_1, \overrightarrow{p_n p}_2, \dots, \overrightarrow{p_n p}_{n-1}$, что в свою очередь равносильно равенству $\det\left(x - p_n,\, p_1 - p_n,\, p_2 - p_n, \dots,\, p_{n-1} - p_n\right) = 0$. В силу полилинейности определителя, это уравнение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x, которое можно переписать как

$$\det\left(x,\, p_1 - p_n,\, p_2 - p_n, \dots,\, p_{n-1} - p_n\right) = \det\left(p_n,\, p_1,\, p_2, \dots,\, p_{n-1}\right)\,.$$

Например, аффинная плоскость $p + \lambda u + \mu v$ в координатном пространстве $\Bbbk^3$ (точка p и векторы u, v фиксированы, а параметры λ, μ пробегают $\Bbbk$) задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$.

5.4.1. Обратная матрица. Квадратная матрица C называется *обратимой*, если существует такая матрица C^{-1}, что $CC^{-1} = C^{-1}C = E$. Матрица C^{-1} называется *обратной* к C и однозначно определяется матрицей C, поскольку для любых двух обратных к C матриц C_1^{-1}, C_2^{-1} выполняются равенства $C_1^{-1} = C_1^{-1} \cdot E = C_1^{-1} \cdot C \cdot C_2^{-1} = E \cdot C_2^{-1} = C_2^{-1}$.

Предложение 5.4
Матрица C обратима, если и только если $\det C \neq 0$, и в этом случае

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^{\vee}\,, \tag{5-14}$$

где матрица[1] $C^{\vee}$ имеет в i-той строке и j-том столбце число, равное взятому со знаком $(-1)^{i+j}$ определителю $(n-1) \times (n-1)$-матрицы, которая получается из матрицы C удалением j-той строки и i-того столбца[2].

[1] Она называется *присоединённой* к матрице C.

[2] Обратите внимание, что индексы i и j переставились!

Доказательство. Если матрица C обратима, то $\det C \cdot \det C^{-1} = \det\left(C \cdot C^{-1}\right) = \det E = 1$, откуда $\det C \neq 0$. Если $\det C \neq 0$, то по предл. 5.3 столбцы $v_1, v_2, \dots, v_n$ матрицы C образуют базис координатного пространства $\Bbbk^n$. Поскольку

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot E = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot CC^{-1} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot C^{-1},$$

в j-том столбце матрицы C^{-1} стоят коэффициенты разложения

$$e_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

стандартного базисного вектора e_j по базису $v_1, v_2, \dots, v_n$. По правилу Крамера коэффициент x_i, стоящий в i-той строке и j-том столбце матрицы C^{-1}, равен

$$\frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(C)}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i-том столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j-той строке. Делая $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк, переставляем её в верхний левый угол:

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = (-1)^{i-1} \det\left(e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\right) =$$
$$= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ненулевой вклад в определитель этой матрицы дают только перестановки, оставляющие элемент 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1) \times (n-1)$-матрицы, получающейся выкидыванием из написанной выше матрицы первой строки и первого столбца, т. е. удалением j-той строки и i-того столбца в матрице C. □

Пример 5.2

Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Упражнение 5.9. Проверьте прямым перемножением, что в обоих случаях произведение обратной матрицы на исходную равно E.

5.4.2. Присоединённая матрица. Введённая в предл. 5.4 на стр. 78 матрица $C^\vee = \left(c^\vee_{ij}\right)$ с элементами $c^\vee_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ji}$, где $(n-1)\times(n-1)$-матрица

$$C_{ji} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \cdots & c_{2,i-1} & c_{2,i+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j-1,1} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ c_{j+1,1} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

получается выкидыванием j-той строки и i-того столбца из матрицы C, называется *присоединённой* к матрице $C = \left(c_{ij}\right)$. Из форм. (5-14) на стр. 78 вытекают равенства

$$C \cdot C^\vee = C \cdot C^\vee = \det(C) \cdot E\,, \tag{5-15}$$

справедливые для любой[1] матрицы C, в том числе с $\det C = 0$. Формулы (5-15) являются частным случаем *соотношений Лапласа*, которые в полной общности доказываются в n° 5.6.2 ниже. Сравнение (i,i)-тых диагональных элементов в матрицах (5-15) приводит к равенствам

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki} = \det(C)\,, \tag{5-16}$$

которые называются *разложениями определителя по i-той строке* и *по i-тому столбцу* соответственно. Например, раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}\left(c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}\right) - c_{21}\left(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}\right) + c_{31}\left(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}\right)$$

что согласуется с прямым вычислением со стр. 74.

5.4.3. Однородная система n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Решения системы n линейно независимых линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5-17}$$

[1]Убедиться в этом можно, например, так. Приравнивая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (5-15), мы получаем набор из n^2 полиномиальных тождеств в кольце многочленов от n^2 переменных c_{ij} с целыми коэффициентами. Чтобы доказать, что данный многочлен с целыми коэффициентами от N переменных нулевой, достаточно убедиться, что он тождественно равен нулю на некотором всюду плотном подмножестве в $\mathbb{R}^N$. Поскольку вещественные матрицы с ненулевым определителем всюду плотны в $\mathbb{R}^{n^2}$, и для них равенство (5-15) выполнено, то оно выполнено и как формальное буквенное тождество над кольцом многочленов от независимых переменных c_{ij} с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

на неизвестные[1] $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ образуют в координатном пространстве $\Bbbk^{n+1}$ одномерное векторное подпространство — аннулятор n-мерного подпространства в $\Bbbk^{n+1^*}$, порождённого строками $n \times (n+1)$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов уравнений (5-17). Положим

$$A_i \overset{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{5-18}$$

(матрица в правой части имеет размер $n \times n$ и получается из матрицы A выкидыванием столбца с номером i).

Предложение 5.5 (второе правило Крамера)
Уравнения (5-17) линейно независимы , если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в таком случае этот вектор является базисным в пространстве решений системы (5-17).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i-той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (5-17). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (5-18) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\left(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\right) \in \Bbbk^{n+1^*}$ линейно независимы, то по лемме о замене[2] ими можно заменить некоторые n ковекторов стандартного базиса в $\Bbbk^{n+1^*}$. Пусть это будут последние n векторов. Коль скоро ковекторы

$$\begin{gathered} (\;1\;,\;\;0\;,\dots,\;\;\;0) \\ (a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,n}) \\ (a_{2,0}, a_{i,1}, \dots, a_{2,n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n,0}, a_{i,1}, \dots, a_{n,n}) \end{gathered}$$

образуют базис в $\Bbbk^{n+1^*}$, определитель матрицы, составленной из строк их координат, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке $(1, 0, \dots, 0)$, видим, что он равен A_0. Тем самым, $A_0 \neq 0$. □

Пример 5.3 (пересечение плоскостей в $\mathbb{A}(\Bbbk^3)$)
Две непараллельных плоскости, заданных в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

[1]Обратите внимание, что они нумеруются с нуля, и всего их $n + 1$.
[2]См. лем. 4.2 на стр. 56.

с непропорциональными левыми частями (a_1, a_2, a_3), $(b_1, b_2, b_3) \in \Bbbk^{3*}$, пересекаются по прямой с вектором скорости $v = \big(\, a_2b_3 - a_3b_2\,,\, -a_1b_3 + a_3b_1\,,\, a_1b_2 - a_2b_1 \,\big)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0\,. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}\,, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d\,. \end{cases}$$

5.5. Объём и барицентрические координаты. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задан набор из $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих в одной гиперплоскости. Поместим это пространство внутрь $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\Bbbk \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1, 0) + V$, параллельной векторному подпространству $V \subset \Bbbk \oplus V$ и проходящей через точку $(1, 0) \in \Bbbk \oplus V$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}$ аффинный координатный репер с началом в точке $o = (0, 0) \in \Bbbk \oplus V$ и базисными векторами $e_0 = \overrightarrow{op}_0$, $e_1 = \overrightarrow{op}_1$, $e_2 = \overrightarrow{op}_2$, …, $e_n = \overrightarrow{op}_n$. Гиперплоскость Π проходит через концы этих базисных векторов и, стало быть, задаётся уравнением $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$. Поэтому координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \Pi$ можно воспринимать как набор весов с суммой 1, такой что центр тяжести точек p_i, взятых с весами x_i, оказывается в точке a:

$$x_0\overrightarrow{ap}_0 + x_1\overrightarrow{ap}_1 + \dots + x_n\overrightarrow{ap}_n = \overrightarrow{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_ie_i = 0\,.$$

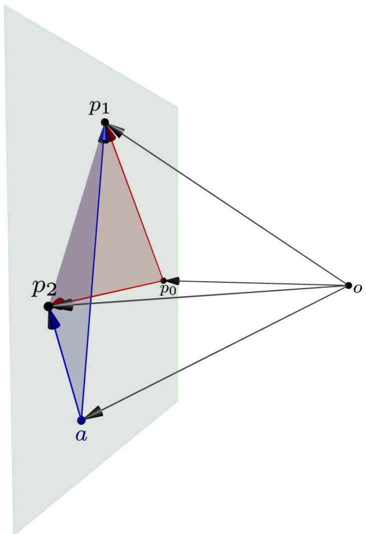


Рис. 5◇4. Барицентрические координаты как отношения объёмов.

Этот набор весов называют *барицентрическими координатами* точки a относительно точек $p_0, p_1, \dots, p_n$. Мы заключаем, что каждая точка $a \in \mathbb{A}^n$ имеет единственные барицентрические координаты и наоборот, каждый набор весов с суммой 1 однозначно задаёт в $\mathbb{A}^n$ точку с такими барицентрическими координатами. Координата x_i вектора $\overrightarrow{oa}$ в базисе из $e_i = \overrightarrow{op}_i$ вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{op}_0, \dots, \overrightarrow{op}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{op}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{op}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{op}_0, \dots, \overrightarrow{op}_n\right)} \tag{5-19}$$

и представляет собою отношение $(n+1)$-мерных объёмов двух пирамид[1] с общей вершиной o и основаниями $[p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n]$ и $[p_0, p_1, \dots, p_n]$, лежащими в одной не проходя-

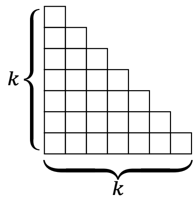
[1]По определению, ориентированный объём пирамиды (или *симплекса*) с вершиной o и основанием в концах выпущенных из o векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ полагают равным делённому на $n!$ объёму параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$. Над полем $\mathbb{R}$ правильность такого определения объяснется в упр. 5.10 на стр. 83.

щей через o гиперплоскости Π, как на рис. 5◇4. Из следующей ниже лем. 5.3 вытекает, что это отношение равно отношению n-мерных объёмов *оснований* этих пирамид.

Упражнение 5.10 (объёмы ступенчатых пирамид). Положим $\Pi_k^1 \overset{\text{def}}{=} k$ и далее, по индукции, для каждого $n \geqslant 2$ обозначим через

$$\Pi_k^n \overset{\text{def}}{=} \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$$

количество n-мерных кубиков в n-мерной «ступенчатой пирамиде» высоты k, образованной k ступенчатыми $(n-1)$-мерными пирамидами убывающей высоты, поставленными в стопку вдоль n-той координатной оси. Например, при $n = 2$ двумерная ступенчатая пирамида высоты k имеет вид



и состоит из $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 = k(k+1)/2$ квадратиков[1]. Явно выразите Π_k^n через n и k и найдите отношение объёма параллелепипеда к объёму симплекса, натянутого на вершину этого параллелепипеда и все вершины, соединённые с нею ребром.

Лемма 5.3

Для любого k-мерного подпространства U в m-мерном векторном пространстве W и таких векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_{m-k} \in W$, что векторы

$$w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k$$

составляют базис пространства W, выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)}, \tag{5-20}$$

в котором ω_k и ω_m это любые ненулевые формы k-мерного и m-мерного объёмов в пространствах U и W соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы и составляют базис в U. Согласно предл. 5.3 на стр. 77,

$$\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq 0.$$

Определим на подпространстве U ещё одну форму объёма ω' равенством

$$\omega'(v_1', v_2', \dots, v_k') \overset{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1', v_2', \dots, v_k')$$

для любых векторов $v_1', v_2', \dots, v_k' \in U$.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на U.

[1] По этой причине число $\Pi_k^2 = \binom{k+1}{2}$ называется k-тым *треугольным числом* и часто обозначается T_k.

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе $u_1, u_2, \dots, u_k$,

$$\frac{\omega_k(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega'(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega'(u_1, u_2, \dots, u_k)} = \frac{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, v_1, v_2, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, w_2, \dots, w_{m-k}, u_1, u_2, \dots, u_k)}\,.$$

□

Следствие 5.5
Барицентрические координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ точки $a \in \mathbb{A}^n$ относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ равны отношениям

$$x_i = \frac{\det\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right)}{\det\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)}\,, \tag{5-21}$$

в числителе которых стоит ориентированный объём n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы, ведущие из точки a во все точки p_ν, кроме p_i, а в знаменателе — объём аналогичного параллелепипеда на векторах, идущих из p_i во все остальные точки p_ν.

Доказательство. Подставим в числитель дроби из формулы (5-19) для каждого $\nu \neq i$

$$\overrightarrow{op}_\nu = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ap}_\nu$$

и, пользуясь тем, что объём полилинеен зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем числитель к виду $\omega\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right)$. Аналогично, подставляя в знаменатель $\overrightarrow{op}_\nu = \overrightarrow{op}_i + \overrightarrow{p_ip}_\nu$ при $\nu \neq i$, преобразуем его в

$$\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{op_i}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)\,.$$

Так как $\overrightarrow{op}_i$ отличается от $\overrightarrow{oa}$ на линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{p_ip}_\nu$, знаменатель равен $\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)$. Итак,

$$x_i = \frac{\omega\left(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n\right)}{\omega\left(\overrightarrow{p_ip}_0, \dots, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{p_ip}_n\right)}\,.$$

Остаётся применить лем. 5.3 для $k = n$, $U = V$, $m = n + 1$, $W = \Bbbk \oplus V$, $w_1 = \overrightarrow{oa}$, $u_\nu = \overrightarrow{p_ip}_\nu$ и $v_\nu = \overrightarrow{ap}_\nu$, где ν пробегает отличные от i значения от 0 до n. □

5.6. Алгебраическое отступление: грассмановы многочлены. Полезным инструментом для работы с определителями являются *грассмановы многочлены*. Они определяются точно также, как и обычные многочлены от n переменных с коэффициентами в поле $\Bbbk$, с той лишь разницей, что грассмановы переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ не коммутируют, а *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,, \tag{5-22}$$

[1]Если char$\Bbbk \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Если же char$\Bbbk = 2$ (т. е. $-1 = 1$), соотношения $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ означают, что переменные ξ_i коммутируют друг с другом, и именно соотношение на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает в этом случае грассмановы переменные от обычных.

где символ «$\wedge$» обозначает грассманово умножение, чтобы отличать его от обычного коммутативного умножения. Поскольку квадраты переменных равны нулю, все грассмановы мономы *линейны* по каждой входящей в них переменной и с точностью до знака исчерпываются мономами, в которых номера переменных строго возрастают слева направо:

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m, \tag{5-23}$$

Если переставить переменные посредством биекции $g \in S_m$, знак грассманова монома изменится по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \mathrm{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}. \tag{5-24}$$

Таким образом, алгебра грассмановых многочленов $\Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ представляет собою векторное пространство размерности 2^n над полем $\Bbbk$ с базисом из мономов (5-23), занумерованных всевозможными строго возрастающими подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Эти базисные мономы перемножаются по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \mathrm{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{при } I \cap J = \varnothing \\ 0 & \text{при } I \cap J \neq \varnothing \end{cases} \tag{5-25}$$

где знак тасующей перестановки, упорядочивающей по возрастанию индексы

$$i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k,$$

у которых $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, равен[1]

$$\mathrm{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_k) = (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_m + m(m+1)/2}.$$

Единственный моном нулевой степени $\xi_\varnothing \overset{\text{def}}{=} 1$, отвечающий подмножеству $I = \varnothing$, является единицей грассмановой алгебры. Единственный моном старшей степени

$$\xi_{\text{top}} = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$$

аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (5-23), занумерованные k-элементными подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Произвольные мономы степеней m и k коммутируют по правилу

$$\begin{aligned}\left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\right) \wedge \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}\right) &= \\ &= (-1)^{km} \left(\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}\right) \wedge \left(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\right),\end{aligned}$$

поскольку для переноса каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i требуется m транспозиций. Тем самым, для любых двух однородных грассмановых многочленов f и g выполняется равенство

$$f \wedge g = (-1)^{\deg f \deg g} g \wedge f. \tag{5-26}$$

В частности, однородные многочлены чётной степени коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 5.12. Опишите *центр*[2] грассмановой алгебры.

[1] См. упр. 5.7 на стр. 77.

[2] Т. е. все грассмановы многочлены, перестановочные с каждым элементом грассмановой алгебры

5.6.1. Линейные замены грассмановых переменных. Обозначим через

$$V \subset \Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$$

векторное пространство однородных грассмановых многочленов первой степени, а через

$$\Lambda^k V \subset \Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$$

пространство однородных многочленов степени k. Как векторное пространство над $\Bbbk$, грассманова алгебра распадается в конечную прямую сумму

$$\Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V\,,$$

где $\Lambda^1 V = V$, а $\Lambda^0 V = \Bbbk \cdot 1$ это одномерное подпространство констант.

Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in V$ линейно выражаются через векторы $w_1, w_2, \dots, w_k$ по формуле $(v_1, v_2, \dots, v_\ell) = (w_1, w_2, \dots, w_k) \cdot C$, где C — произвольная матрица размера $k \times \ell$ с элементами из поля $\Bbbk$, то их грассмановы произведения $v_J = v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \dots \wedge v_{j_m} \in \Lambda^m V$ линейно выражаются через произведения $w_I = w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$v_J = v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \dots \wedge v_{j_m} = \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m}\Big) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant n} w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \dots \wedge w_{i_m} \cdot \sum_{g \in S_m} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \cdots c_{i_{g(m)} j_m} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,,$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, а индекс $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ пробегает все наборы из m возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant \ell$. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном v_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрицы выражающей векторы v через векторы w. Получающаяся матрица размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ-тый минор $\left(c_{IJ}\right)$ матрицы C, обозначается $\Lambda^m C$ и называется m-той *внешней степенью* матрицы C.

5.6.2. Соотношения Лапласа. Для каждого набора возрастающих индексов

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

положим $\deg J \overset{\text{def}}{=} m$, $|J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \dots + j_m$ и условимся обозначать через

$$\hat J = \left(\hat j_1, \hat j_2, \dots, \hat j_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$$

дополнительный к J набор возрастающих индексов, так что $\deg \hat J = n - m$. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A размера $n \times n$ и линейные грассмановы многочлены

$$\alpha_j = \xi_1 \cdot a_{1j} + \xi_2 \cdot a_{2j} + \dots + \xi_n a_{nj}\,, \tag{5-27}$$

коэффициентами которых являются столбцы матрицы A. Для любых двух наборов I, J одинаковой степени $\deg I = \deg J = m$ грассмановы произведения $\alpha_J = \alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_m}$ и

$\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{\hat{i}_1} \wedge \alpha_{\hat{i}_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{\hat{i}_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n-m$. Перемножая эти два произведения по формуле (5-25), получаем

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J|+\frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{5-28}$$

Подставляя в это равенство выражения (5-27) векторов α_j через стандартные базисные векторы ξ_j, в левой части будем иметь

$$\left(\sum_K \xi_K a_{KJ}\right) \wedge \left(\sum_L \xi_L a_{L\hat{I}}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}}\,,$$

где K пробегает все индексы длины $\deg K = m$, а в правой — нуль при $I \neq J$ и

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|J|} \det A \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$$

при $I = J$. Таким образом, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы $= (a_{ij})$ выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{I}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{5-29}$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A. При $I = J$ соотношение (5-29) даёт формулу для вычисления определителя[1] через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\hat{J}\hat{K}}$ порядка $n-m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{KJ}:

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}\hat{J}}\,. \tag{5-30}$$

Произведение $(-1)^{|K|+|J|} a_{\hat{K}\hat{J}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{KJ} и обозначается $\hat{a}_{KJ} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{|K|+|J|} a_{\hat{K}\hat{J}}$. При $I \neq J$ соотношение (5-29) с точностью до знака имеет вид

$$\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{KI} = 0 \tag{5-31}$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, т. к. левая часть в (5-31) отличается от (5-30) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $\hat{a}_{KJ}$, а на дополнения $\hat{a}_{KI}$ к минорам a_{KI}, сосредоточенным в тех же строках K, но в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Упражнение 5.13. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J\,. \end{cases} \tag{5-32}$$

[1] С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n-мерного параллелепипеда через объёмы его m-мерных и $(n-m)$-мерных граней.

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\hat{J}$ имели одинаковые номера, то все соотношения Лапласа можно записать в виде одного равенства на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$:

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E\,, \tag{5-33}$$

где через $\Lambda^{n-m}\hat{A}^t$ обозначена матрица, (IJ)-тый элемент которой равен

$$\hat{a}^t_{IJ} = \hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{\hat{J}\hat{I}}\,.$$

Пример 5.4 (присоединённая матрица)
При $m = 1$ наборы $I = (i)$ и $K = (k)$ содержат по одному элементу, и миноры $a_{KI} = a_{ki}$ это просто матричные элементы матрицы A, так что $\Lambda^1 A = A$. Алгебраическое дополнение

$$\hat{a}_{ki} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+k} a_{\hat{k}\hat{i}}$$

к элементу a_{ki} представляет собою умноженный на $(-1)^{k+j}$ минор порядка $(n-1)$, равный определителю матрицы $A_{\hat{k}\hat{i}}$, которая получается из A вычёркиванием k-й строки и i-го столбца. Таким образом, матрица $\Lambda^{n-1}\hat{A}^t = A^\vee$ это в точности *присоединённая* к A матрица из n° 5.4.2 на стр. 80, а матричное соотношение (5-33) превращается в форм. (5-15) на стр. 80

$$A \cdot A^\vee = A^\vee \cdot A = \det(A) \cdot E = \begin{pmatrix} \det(A) & & & 0 \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix}.$$

Формулы (5-30) и (5-32) доставляют разложения определителя по j-тому столбцу и по i-той строке соответственно:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{\hat{k}\hat{j}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det A_{\hat{i}\hat{k}}\,. \tag{5-34}$$

Пример 5.5 (определитель пучка матриц)
Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB). Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где $\alpha, \beta \in \Bbbk$, а её определитель $\det(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)$ является однородным многочленом степени n от α и β. Покажем, что коэффициент этого многочлена при $\alpha^k \beta^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ}\,, \tag{5-35}$$

где суммирование идёт по всем k-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Для этого рассмотрим линейные грассмановы многочлены

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot A \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, \dots, b_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot B\,.$$

Они удовлетворяют равенству

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge (\alpha a_2 + \beta b_2) \wedge \dots \wedge (\alpha a_n + \beta b_n) = \det(\alpha A + \mu B) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n\,.$$

Слагаемые, содержащие $\alpha^k\beta^{n-k}$, возникают в левой части при выборе первого слагаемого в некоторых k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n-k$ скобах. Если первое слагаемое выбирается в скобках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, считая слева направо, то коэффициент при $\alpha^k\beta^{n-k}$ получается равным

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_k, \hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \dots, \hat{\imath}_{n-k}) \cdot a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_k} \wedge b_{\hat{\imath}_1} \wedge b_{\hat{\imath}_2} \wedge \dots \wedge b_{\hat{\imath}_{n-k}} = \\ = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} a_I \wedge b_{\hat{I}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} \left(\sum_J \xi_J a_{JI}\right) \wedge \left(\sum_K \xi_K b_{K\hat{I}}\right) = \\ = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+|I|} \sum_{JK} a_{JI} \cdot b_{K\hat{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_K = \left(\sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} \cdot b_{\hat{J}\hat{I}}\right) \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n\end{aligned}$$

Коэффициент при $\alpha^k\beta^{n-k}$ в $\det(\alpha A + \mu B)$ получается суммированием этих подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (5-35).

Полагая в этой формуле $\alpha = 1$, $\beta = t$ и $B = E$, получаем разложение

$$\begin{aligned}\det(tE + A) = t^n + \sum_{k=1}^{n} t^{n-k} \cdot \sum_{\#I=k} a_{II} = \\ = t^n + t^{n-1} \cdot \sum_i a_{ii} + t^{n-1} \cdot \sum_{i<j} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) + \dots + t \cdot \sum_i \hat{a}_{ii} + \det A\,,\end{aligned}$$

в котором коэффициент при t^{n-k} равен сумме определителей всех $k \times k$ подматриц матрицы A, главная диагональ[1] которых содержится в главной диагонали матрицы A. Они называются *главными диагональными минорами* k-того порядка. Коэффициент при t^{n-1}, равный сумме элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A, называется *следом* матрицы A и обозначается

$$\operatorname{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,. \tag{5-36}$$

Упражнение 5.14. Покажите, что $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ и $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ji} = \operatorname{tr}(BA)$.

Используя след и обозначения из формулы (5-33), определитель пучка матриц можно записать в виде

$$\det(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{tr}\left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{A}^t\right) \cdot \alpha^k \beta^{n-k}\,, \tag{5-37}$$

[1] Напомню, что *главной* называется диагональ, идущая из левого верхнего угла квадратной матрицы в правый нижний.

Упр. 5.2. Индукция по n. Каждая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ, переставляющей между собою элементы n и g_n множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n.

Упр. 5.4. Если $g = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$, где $\sigma_i \sigma_i = \mathrm{Id}$ для всех i, то $g^{-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$. В частности, это верно для разложения g в композицию транспозиций.

Упр. 5.6. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.

Упр. 5.7. При условии, что все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из i и из j пересекаются между собою нечётное число раз, если пара (i, j) инверсна, и чётное число раз, если пара не инверсна (в действительности, картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух ситуациях равнялись 1 и 0 соответственно). Знак тасующей перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где *вес* $|I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu} i_\nu$. Действительно, нити, выходящие из чисел $i_1, i_2, \dots, i_k$ верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 5.10. Индукция по n и суммирование по треугольнику Паскаля показывают, что $\Pi_k^n = \binom{n+k-1}{k}$. Предел отношения $\binom{k+n-1}{n} / k^n$ при фиксированной размерности n и $k \to \infty$ равен $1/n!$.

Упр. 5.12. При чётном n центр $\Bbbk\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим (имеющим нечётную степень) мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_n$.

Упр. 5.13. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.