§2. Аффинная группа

2.1. Аффинные отображения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ между аффинными пространствами, ассоциированными с векторными пространствами U, W, называется *аффинным*, если найдётся такая точка $O \in \mathbb{A}(U)$, что отображение

$$D_\varphi : U \to W, \quad \overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} \tag{2-1}$$

линейно, т. е. $D_\varphi(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}) = \alpha D_\varphi(\overrightarrow{OA}) + \beta D_\varphi(\overrightarrow{OB})$ для любых $\alpha, \beta \in \Bbbk$ и $A, B \in \mathbb{A}(U)$.

Лемма 2.1

Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ аффинно, то отображение (2-1) линейно для любой точки $O \in \mathbb{A}(U)$ и не зависит от выбора этой точки, т. е. для всех $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $D_\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$.

Доказательство. Если отображение (2-1), построенное по некоторой точке $O \in \mathbb{A}(U)$, линейно, то для любой точки $P \in \mathbb{A}(U)$ и любого вектора $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \in U$ выполняется равенство

$$D_\varphi(\overrightarrow{PQ}) = D_\varphi(\overrightarrow{OQ}) - D_\varphi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}\,.$$

Тем самым, для всех $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ отображение D_φ переводит вектор $\overrightarrow{PQ} \in U$ в вектор $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} \in W$. В частности, оно не зависит от выбора точки O. □

Предложение 2.1

Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to A(W)$ аффинно тогда и только тогда, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в барицентрические комбинации их образов с теми же весами, т. е. $\varphi(\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m) = \mu_1 \cdot \varphi(P_1) + \mu_2 \cdot \varphi(P_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(P_m)$ для любых $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{A}(U)$ и любых $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с $\sum \mu_i = 1$.

Доказательство. Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ аффинно, то при любом выборе начальной точки O и любых весах $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с $\sum \mu_i = 1$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_m P_m) = \varphi\left(O + \mu_1\overrightarrow{OP}_1 + \mu_2\overrightarrow{OP}_2 + \dots + \mu_m\overrightarrow{OP}_m\right) = \\
&= \varphi(O) + D_\varphi\left(\mu_1\overrightarrow{OP}_1 + \mu_2\overrightarrow{OP}_2 + \dots + \mu_m\overrightarrow{OP}_m\right) = \\
&= \varphi(O) + \mu_1 \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{OP}_1\right) + \mu_2 \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{OP}_2\right) + \dots + \mu_m \cdot D_\varphi\left(\overrightarrow{OP}_m\right) = \\
&= \mu_1 \cdot \left(\varphi(O) + D_\varphi\left(\overrightarrow{OP}_1\right)\right) + \dots + \mu_m \cdot \left(\varphi(O) + D_\varphi\left(\overrightarrow{OP}_m\right)\right) = \\
&= \mu_1 \cdot \varphi(P_1) + \mu_2 \cdot \varphi(P_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(P_m).
\end{aligned}$$

Наоборот, если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ сохраняет барицентрические комбинации, то при произвольном выборе начальной точки O отображение $D_\varphi : V \to V$, $\overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$, линейно, поскольку для любых точек $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$ точка

$$R = O + \lambda \cdot \overrightarrow{OP} + \mu \cdot \overrightarrow{OQ} = (1 - \lambda - \mu)O + \lambda P + \mu Q$$

перейдёт в точку

$$\varphi(R) = (1 - \lambda - \mu)\varphi(O) + \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) = \varphi(O) + \lambda\,\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} + \mu\,\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)}\,,$$

а значит, для всех векторов $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \in U$ и чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$

$$D_\varphi(\lambda\,\overrightarrow{OP} + \mu\,\overrightarrow{OQ}) = D_\varphi(\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(R)} = \\ = \lambda\,\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} + \mu\,\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)} = \lambda\,D_O\varphi(\overrightarrow{OP}) + \mu\,D_O\varphi(\overrightarrow{OQ})\,.$$

□

2.1.1. Дифференциал аффинного отображения. Линейное отображение

$$D_\varphi : U \to W\,, \quad \overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$$

называется *дифференциалом* аффинного отображения $\varphi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$. Если два аффинных отображения $\varphi, \psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)$ имеют равные дифференциалы $D_\varphi = D_\psi$, то для всех точек $P, Q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = D_\varphi(\overrightarrow{PQ}) = D_\psi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}$, которое по упр. 1.5 (в) равносильно равенству $\overrightarrow{\varphi(P)\psi(P)} = \overrightarrow{\varphi(Q)\psi(Q)}$. Поэтому вектор $w = \overrightarrow{\varphi(P)\psi(P)}$ не зависит от выбора точки $P \in \mathbb{A}(U)$. Это означает, что $\psi = \tau_w \circ \varphi$ является композицией отображения φ с последующим сдвигом $\tau_w : \mathbb{A}(W) \to \mathbb{A}(W)$, $X \mapsto X + w$, на вектор w.

Предложение 2.2
Если отображения $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ и $\psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(V)$ аффинны, то их композиция

$$\varphi\psi : \mathbb{A}(U) \to \mathbb{A}(W)\,, \quad X \mapsto \varphi\big(\psi(X)\big)\,,$$

тоже аффинна и имеет дифференциал $D_{\varphi\psi} = D_\varphi \circ D_\psi$.

Доказательство. Отображение $D_{\varphi\psi} : U \to W$, переводящее вектор $\overrightarrow{PQ} \in U$ в вектор

$$\overrightarrow{\varphi\psi(P)\varphi\psi(Q)} = D_\varphi(\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}) = D_\varphi \circ D_\psi(\overrightarrow{PQ}) \in W\,,$$

является композицией дифференциалов D_φ и D_ψ. Оно линейно, т. к. для любых $a, b \in U$

$$D_{\varphi\psi}(\alpha a + \beta b) = D_\varphi\big(D_\psi(\alpha a + \beta b)\big) = D_\varphi\big((\alpha D_\psi(a) + \beta D_\psi(b)\big) = \\ = \alpha D_\varphi \circ D_\psi(a) + \beta D_\varphi \circ D_\psi(b) = \alpha D_{\varphi\psi}(a) + \beta D_{\varphi\psi}(b)\,.$$

□

2.2. Аффинные автоморфизмы. Взаимно однозначное аффинное отображение

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$$

называется *аффинным автоморфизмом* или *аффинным преобразованием* пространства $\mathbb{A}(V)$.

Очевидно, что аффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ взаимно однозначно , если и только если его дифференциал $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ взаимно однозначен. Из предл. 2.2 вытекает, что аффинные автоморфизмы $\mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ образуют группу преобразований[1] множества $\mathbb{A}(V)$. Эта группа обозначается $\mathrm{Aff}(V)$ и называется *аффинной группой* векторного пространства V. Аффинная группа координатного пространства $\Bbbk^n$ обозначается $\mathrm{Aff}_n(\Bbbk)$.

Две фигуры в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aff}(V)$, переводящий одну их этих фигур в другую.

[1]См. обсуждение на стр. 5

Предложение 2.3
Для любых двух треугольников $P_0P_1P_2$ и $Q_0Q_1Q_2$ на аффинной плоскости существует единственное аффинное преобразование этой плоскости, переводящее P_i в Q_i при всех $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Если $\varphi(P_i) = Q_i$, то φ переводит аффинный репер $(P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$ в аффинный репер $(Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2})$. Это полностью определяет действие φ на любую точку X: вектор $\overrightarrow{P_0X}$ однозначно представляется в виде $\overrightarrow{P_0X} = x_1\overrightarrow{P_0P_1} + x_2\overrightarrow{P_0P_2}$, дифференциал $D_\varphi : V \to V$ переводит его в $D_\varphi(\overrightarrow{P_0X}) = x_1 D_\varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) + x_2 D_\varphi(\overrightarrow{P_0P_2}) = x_1\overrightarrow{Q_0Q_1} + x_2\overrightarrow{Q_0Q_2}$, откуда

$$\varphi(X) = \varphi(P_0) + D_\varphi(\overrightarrow{P_0X}) = Q_0 + x_1\overrightarrow{Q_0Q_1} + x_2\overrightarrow{Q_0Q_2}\,.$$

С другой стороны, если *определить* отображение φ этой формулой, то оно *будет* аффинным преобразованием, поскольку заданное правилом $x_1\overrightarrow{P_0P_1} + x_2\overrightarrow{P_0P_2} \mapsto x_1\overrightarrow{Q_0Q_1} + x_2\overrightarrow{Q_0Q_2}$ отображение $D_\varphi : V \to V$, очевидно, линейно. □

Следствие 2.1
Аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, сохраняя параллельность. Любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые a, b, c переводятся в любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые a', b', c' единственным аффинным преобразованием. □

Упражнение 2.1. Покажите, что если три различные прямые a, b, c пересекаются в точке O, а три различные прямые a', b', c' пересекаются в точке O', то аффинное преобразование, переводящее a, b, c в a', b', c' тоже существует и единственно с точностью до композиции с гомотетиями относительно точек O и O'.

Предложение 2.4
Четвёрка различных, но пересекающихся в одной точке прямых a, b, c, d тогда и только тогда переводится в четвёрку различных пересекающихся в одной точке прямых a', b', c', d' так, что $a \mapsto a'$, $b \mapsto b'$, $c \mapsto c'$ и $d \mapsto d'$, когда $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Доказательство. Обозначим точки пересечения четвёрок прямых через O и O'. По упр. 1.11 имеются единственные с точностью до гомотетий с центрами в O и в O' тройки точек $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ и $A' \in a'$, $B' \in b'$, $C' \in c'$, такие что четырёхугольники $OACB$ и $O'A'C'B'$ являются параллелограммами. Далее, имеется единственное аффинное преобразование, переводящее параллелограмм $OABC$ в параллелограмм $O'A'B'C'$. Согласно упр. 2.1 это единственное с точностью до гомотетий с центрами в O и в O' аффинное преобразование, переводящее прямые a, b, c в прямые a', b', c'. Оно переводит прямую d в прямую d', если и только если точка $D = d \cap (BC)$ делит отрезок $[B, C]$ в том же отношении, что точка $D' = d' \cap (B'C')$ делит отрезок $[B', C']$. Но как мы видели в форм. (1-22) на стр. 22, эти отношения равны двойным отношениям $[a, b, c, d]$ и $[a', b', c', d']$. □

2.3. Сравнение аффинной и линейной групп. Аффинная группа $\mathrm{Aff}(V)$ содержит подгруппу *параллельных переносов* (или *сдвигов*) $T \subset \mathrm{Aff}(V)$, изоморфную аддитивной группе векторов пространства V. Вектору $v \in V$ отвечает при этом изоморфизме сдвиг

$$\tau_v : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)\,, \quad P \mapsto P + v\,,$$

а композиции сдвигов отвечает сложение векторов: $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$. Поскольку для любого аффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ и произвольной точки $P \in \mathbb{A}(V)$ выполняются равенства

$$\varphi\big(\tau_v(P)\big) = \varphi(P+v) = \varphi(p) + D_\varphi(v) = \tau_{D_\varphi(v)}\big(\varphi(P)\big)\,,$$

сдвиги τ_v коммутируют с произвольными аффинными автоморфизмами по правилу

$$\varphi \circ \tau_v = \tau_{D_\varphi(v)} \circ \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} = \tau_{D_\varphi(v)}\,. \tag{2-2}$$

Множество всех аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольно выбранную точку $P \in \mathbb{A}^2$, образует в $\mathrm{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки P и обозначается

$$\mathrm{Stab}_P \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \mathrm{Aff}(V) \mid \varphi(p) = p\}\,.$$

Из сказанного в начале n° 2.1.1 вытекает, что два аффинных преобразования $\varphi, \psi \in \mathrm{Stab}_P$ совпадают тогда и только тогда, когда $D_\varphi = D_\psi$. Поэтому отображение $D : \mathrm{Stab}_P \to \mathrm{GL}(V)$, переводящее аффинное преобразование $\varphi \in \mathrm{Stab}_P$ в его дифференциал $D_\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$, инъективно. С другой стороны, каждому линейному автоморфизму $\varphi : V \xrightarrow{\sim} V$ отвечает оставляющее точку P на месте аффинное преобразование

$$\varphi_P : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)\,, \quad X \mapsto P + \varphi(\overrightarrow{PX}) \tag{2-3}$$

с дифференциалом $D_{\varphi_P} = \varphi$. Таким образом, отображение $D : \mathrm{Stab}_P \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V)$, $\varphi \mapsto D_\varphi$, является изоморфизмом групп.

Предложение 2.5
Пусть $P \in \mathbb{A}(V)$ — произвольно заданная точка. Для каждого аффинного преобразования $\varphi \in \mathrm{Aff}(V)$ существуют единственные вектор $v \in V$ и линейный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, такие что $\varphi = \tau_v \circ \varphi_P$. При этом для всех $u, w \in V$ и всех $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$

$$\big(\tau_u \circ \varphi_P\big) \circ \big(\tau_w \circ \psi_P\big) = \tau_{u+\varphi(w)} \circ (\varphi \circ \psi)_P\,. \tag{2-4}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(P) = Q$. Тогда $\varphi = \tau_v \circ \psi$, где $v = \overrightarrow{PQ}$ и $\psi = \tau_{-v} \circ \varphi \in \mathrm{Stab}_P$. Тем самым, $\psi = \varphi_P$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$. Если преобразование φ имеет два разложения $\tau_v \circ \varphi_P = \varphi = \tau_u \circ \psi_P$, то применяя к правой и левой части этого равенства обратный к τ_v сдвиг τ_{-v}, получаем $\varphi_P = \tau_{u-v} \circ \psi_P$. Так как и φ_P, и ψ_P оставляют на месте точку P, то сдвиг τ_{u-v} тоже должен переводить P в себя, откуда $u = v$, $\tau_{u-v} = \mathrm{Id}$, и $\varphi_P = \psi_P$, т. е. $\varphi = \psi$. Формула (2-4) вытекает из (2-2): $\tau_u \circ \psi \circ \tau_w \circ \eta = \tau_u \circ \psi \circ \tau_w \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \eta = \tau_u \circ \tau_{\psi(w)} \circ \psi \circ \eta$. □

Замечание 2.1. (полупрямое произведение) Из предл. 2.5 вытекает, что как множество аффинная группа $\mathrm{Aff}(V)$ может быть отождествлена с прямым произведением множеств $V \times \mathrm{GL}(V)$, и после такого отождествления композиция в $\mathrm{Aff}(V)$ задаётся правилом

$$(u, \varphi) \circ (w, \psi) = (u + \varphi(w), \varphi\psi)\,.$$

В таких случаях говорят, что группа $\mathrm{Aff}(V)$ является *полупрямым произведением* групп V и $\mathrm{GL}(V)$, и пишут

$$\mathrm{Aff}(V) = V \rtimes \mathrm{GL}(V)\,.$$

Подчеркнём, однако, что отождествление множеств $\mathrm{Aff}(V) \simeq V \times \mathrm{GL}(V)$ требует выбора точки $P \in \mathbb{A}(V)$ и *зависит* от этого выбора. Два разложения $\tau_u \circ \varphi_P = \varphi = \tau_w \circ \varphi_Q$ одного и того же аффинного преобразования $\varphi \in \mathrm{Aff}(V)$, возникающие при выборе двух разных точек $P, Q \in \mathbb{A}(V)$, имеют один и тот же линейный автоморфизм $D_{\varphi_P} = D_{\varphi_Q} = D_\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, но, вообще говоря, разные переносы $\tau_u \neq \tau_w$.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что $w = u - \overrightarrow{PQ} + D_\varphi(\overrightarrow{PQ})$ и отличен от u при $D_\varphi(\overrightarrow{PQ}) \neq \overrightarrow{PQ}$.

2.4. Запись линейных и аффинных преобразований в координатах. Если в векторном пространстве V зафиксирован базис e_1, e_2, всякое линейное отображение $\varphi : V \to V$ однозначно задаётся указанием образов базисных векторов $f_1 = \varphi(e_1)$ и $f_2 = \varphi(e_2)$, поскольку произвольный вектор $v = e_1x_1 + e_2x_2$ обязан переходить в

$$\varphi(v) = \varphi(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) \cdot x_2 = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 . \tag{2-5}$$

Упражнение 2.3. Убедитесь, что при любом выборе векторов $f_1, f_2 \in V$ формула (2-5) задаёт *линейное* отображение $\varphi : V \to V$.

Если векторы f_1 и f_2 имеют в базисе (e_1, e_2) координаты $\begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{pmatrix}$, т. е.

$$f_1 = e_1 \cdot \varphi_{11} + e_2 \cdot \varphi_{21} \quad \text{и} \quad f_2 = e_1 \cdot \varphi_{12} + e_2 \cdot \varphi_{22} , \tag{2-6}$$

то по формуле (2-5) действие отображения φ на произвольный вектор v с координатами $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ задаётся правилом

$$\varphi : \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix}\varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2\\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2\end{pmatrix} , \tag{2-7}$$

которое принято сокращённо записывать как $x \mapsto \Phi_e x$, где

$$x = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} , \quad \Phi_e = \begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_e x = \begin{pmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}\varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2\\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2\end{pmatrix} .$$

При этом используются следующие соглашения: произведением ab строки a на столбец b, высота которого равна ширине строки, считают один элемент

$$(a_1, a_2, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_sb_s , \tag{2-8}$$

а произведением $P = AB$ таблицы A из m строк ширины s на таблицу B из n столбцов высоты s считают таблицу из m строк и n столбцов, в пересечении i-той строки и j-того столбца которой стоит произведение i-той строки из A на j-тый столбец из B, вычисленное по формуле (2-8):

$$p_{ij} \overset{\text{def}}{=} \left(a_{i1}, a_{i2}, \dots , a_{is}\right) \cdot \begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{s} a_{i\nu}b_{\nu j} . \tag{2-9}$$

Таблица из m строк и n столбцов называется *матрицей* размера $m \times n$. Матрица

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения* φ в базисе $e = (e_1, e_2)$, а её определитель

$$\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

называется *определителем отображения* φ и обозначается $\det \varphi$.

Упражнение 2.4. Докажите для любых $u, v \in V$ равенство $s\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) = s(u, v) \cdot \det \Phi_e$ и выведите из него, что а) число $\det \varphi \overset{\text{def}}{=} \det \Phi_e \in \Bbbk$ зависит только от φ, но не от выбора базиса e б) $\varphi \in \mathrm{GL}(V) \iff \det \varphi \neq 0$ в) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых 2×2-матриц A и B. Проверьте также, что матрица композиции $\psi \circ \varphi$ в базисе e равна произведению матриц $\Psi_e \cdot \Phi_e$ (именно в таком порядке).

Если положить $\varphi(e) = (f_1, f_2)$, то в матричных обозначениях формулы (2-6) сократятся до $\varphi(e) = e\Phi_e$, равенство $v = e_1x_1 + e_2x_2$ — до $v = ex$, а вычисление, проделанное в (2-5) и (2-7) превратится в короткую выкладку $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = e\,\Phi_e x$, показывающую, что координатами вектора $\varphi(v)$ в базисе e является столбец $\Phi_e x$.

Упражнение 2.5. Проверьте, что произведение матриц ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$ всякий раз, когда хоть одна из частей этого равенства определена.

Если на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(V)$ задан аффинный координатный репер (O, e_1, e_2), и аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ переводит начальную точку $O \in \mathbb{A}^2$ в точку $B = \varphi(O)$ с координатами $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, а его дифференциал $\varphi = D_\varphi$ имеет в базисе $e = (e_1, e_2)$ векторного пространства V матрицу $\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$, то действие φ на произвольную точку $X \in \mathbb{A}^2$ с координатами $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ описывается формулой $X \mapsto B + \Phi_e X$ или, в развёрнутом виде,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \beta_2 + \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.6. Убедитесь в этом, и выясните, как аффинное преобразование $X \mapsto B + AX$ изменяет площади ориентированных параллелограммов.

2.5. Преобразования, переводящие прямые в прямые. Биективное отображение аффинной плоскости в себя называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. Полуаффинные отображения, очевидно, образуют группу. В этом разделе мы покажем, что над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое, все полуаффинные преобразования в действительности аффинны, а над произвольным полем $\Bbbk$ каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}(\Bbbk^2) \to \mathbb{A}(\Bbbk^2)$ раскладывается в композицию $\varphi = \varphi_{\mathrm{Aff}}\psi$ аффинного преобразования φ_{Aff} и преобразования

$$\psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \end{pmatrix}$$

вызванного каким-либо автоморфизмом $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ основного поля $\Bbbk$. Над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_p$ таких «скручиваний с автоморфизмами» не возникает по той простой причине, что у этих полей нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. Мы начнём с небольшого напоминания об автоморфизмах полей.

2.5.1. Отступление об автоморфизмах полей. Биективное отображение из поля в себя

$$\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk \tag{2-10}$$

называется *автоморфизмом*, если оно сохраняет сложение и умножение, т. е. для всех $\lambda, \mu \in \Bbbk$

$$\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu) \quad \text{и} \quad \psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu)\,.$$

Упражнение 2.7. Убедитесь, что каждое перестановочное со сложением и умножением отображение (2-10) либо инъективно, либо тождественно равно нулю, и автоматически обладает свойствами: $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при $\mu \neq 0$.

Из упр. 2.7 вытекает, что ψ тождественно действует на элементах вида

$$\pm m/n \stackrel{\text{def}}{=} \pm(1 + 1 + \dots + 1)/(1 + 1 + \dots + 1) \in \Bbbk$$

(в числителе и знаменателе стоят суммы m и n единиц поля соответственно), ибо

$$\psi(\pm m/n) = \pm\psi(m)/\psi(n) = \pm\psi(1 + 1 + \dots + 1)/\psi(1 + 1 + \dots + 1) = \\ = \pm\,(\psi(1) + \psi(1) + \dots + \psi(1))/(\psi(1) + \psi(1) + \dots + \psi(1)) = \pm m/n\,.$$

Поскольку в поле $\mathbb{Q}$ и в полях вычетов $\mathbb{F}_p$ никаких других элементов нет, у этих полей нет никаких автоморфизмов кроме тождественного. В частности, всякий автоморфизм $\psi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ тождественно действует на подполе $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Кроме того, ψ является *строго монотонной функцией*, поскольку неравенство $\lambda < \mu$ влечёт равенство $\mu - \lambda = \alpha^2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, откуда $\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$, и $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$.

Упражнение 2.8 (по анализу). Пусть строго монотонная функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x) = x$ при $x \in \mathbb{Q}$. Покажите, что $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ тоже не имеет нетождественных автоморфизмов. Напротив, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет нетождественный автоморфизм *комплексного сопряжения* $z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$. Аналогичные автоморфизмы имеются и у других полей алгебраических чисел.

Упражнение 2.9. Покажите что множество чисел $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ является полем и укажите нетождественный автоморфизм этого поля.

2.5.2. Дифференциал полуаффинного преобразования. В силу своей биективности, каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ переводит параллельные прямые в параллельные, а стало быть, параллелограммы — в параллелограммы. Поэтому из равенства $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ вытекает равенство $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \overrightarrow{\varphi(R)\varphi(S)}$. Это равенство верно, даже когда точки P, Q, R, S коллинеарны и не образуют параллелограмма: в этом случае надо выбрать вектор $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ на параллельной (PQ) прямой $(XY) \neq (PQ)$, как на рис. 2◇1, и использовать параллелограммы $PXYQ$ и $RXYZ$.

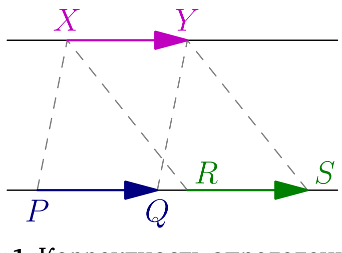

Рис. 2◇1. Корректность определения D_φ.

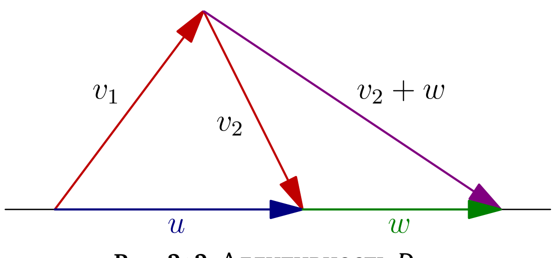

Рис. 2◇2. Аддитивность D_φ.

Таким образом, каждое полуаффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ корректно задаёт отображение векторов

$$D_\varphi : V \to V, \quad \overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}. \tag{2-11}$$

Поскольку φ переводит параллелограмм со сторонами u, v в параллелограмм со сторонами $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$, отображение (2-11) аддитивно: $D_\varphi(u+w) = D_\varphi(u)+D_\varphi(w)$, причём это равенство справедливо и тогда, когда u и w пропорциональны (см. рис. 2◇2): представляя u в виде суммы векторов v_1 и v_2, каждый из которых не пропорционален u, получаем

$$\begin{aligned} D_\varphi(u+w) = D_\varphi(v_1+v_2+w) = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2+w) = \\ = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(v_1+v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Преобразование $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ однозначно восстанавливается, как только известен его дифференциал (2-11) и образ $\varphi(P)$ хоть одной точки $P \in \mathbb{A}^2$. Образ произвольной точки $Q \in \mathbb{A}^2$ при этом равен $\varphi(Q) = \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi(P) + D_\varphi(\overrightarrow{PQ})$.

Предложение 2.6
Дифференциал D_φ полуаффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ *полулинеен*, т. е.

$$D_\varphi(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(w) \tag{2-12}$$

для некоторого зависящего лишь от φ автоморфизма $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ и любых $u, w \in V$, $\lambda, \mu \in \Bbbk$.

Доказательство. Поскольку φ переводит прямые в прямые, D_φ переводит векторы, пропорциональные данному вектору v, в векторы, пропорциональные $D_\varphi(v)$. Поэтому каждый ненулевой вектор $v \in V$ задаёт отображение $\psi_v : \Bbbk \to \Bbbk$, определяемое равенством $D_\varphi(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot D_\varphi(v)$. В силу биективности φ, все отображения ψ_v биективны. Покажем, что $\psi_u = \psi_w$ для любых двух непропорциональных векторов u, w. Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в пересекающиеся в одной точке прямые, векторы $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$ не пропорциональны и составляют базис в V. Из аддитивности D_φ вытекает, что

$$\begin{array}{c} D_\varphi(\lambda(u+w)) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u+w) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(w) \\ \| \\ D_\varphi(\lambda u + \lambda w) = D_\varphi(\lambda u) + D_\varphi(\lambda w) = \psi_u(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_w(\lambda) \cdot D_\varphi(w). \end{array}$$

Из единственности разложения вектора по базису мы заключаем, что для всех $\lambda \in \Bbbk$ выполняются равенства

$$\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda).$$

Они выполняются и тогда, когда u и w пропорциональны, т. к. для любого непропорционального им вектора v справедливы равенства $\psi_u = \psi_v = \psi_w$. Таким образом, отображение ψ_v на самом деле не зависит от v и может быть обозначено просто через ψ. Из аддитивности D_φ вытекает, что ψ перестановочно со сложением и умножением. В самом деле, равенства

$$\begin{aligned} \psi(\lambda+\mu) \cdot D_\varphi(v) = D_\varphi\left((\lambda+\mu)v\right) = D_\varphi(\lambda v + \mu v) = D_\varphi(\lambda v) + \varphi(\mu v) = \\ = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(v) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(v) = (\psi(\lambda) + \psi(\mu)) \cdot D_\varphi(v) \end{aligned}$$

показывают, что $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$, а из равенств

$$\psi(\lambda\mu) \cdot D_\varphi(v) = D_\varphi\left((\lambda\mu)v\right) = D_\varphi\left(\lambda(\mu v)\right) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu) \cdot D_\varphi(v)$$

мы получаем $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu)$. Тем самым, ψ это автоморфизм поля $\mathbb{k}$. □

Следствие 2.2
Над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_p$ биективное отображение $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ аффинно, если и только если оно переводит прямые в прямые. □

Упр. 2.1. По упр. 1.11 существуют единственные с точностью до гомотетий с центрами в O и O' тройки точек A, B, C и A', B', C' на прямых a, b, c и a', b', c' соответственно, такие что четырёхугольники $OABC$ и $O'A'B'C'$ являются параллелограммами. Первый из них переводится во второй единственным аффинным преобразованием.

Упр. 2.2. Это следует из равенства $Q + w = \varphi(Q) = P + u + D_\varphi(\overrightarrow{PQ})$.

Упр. 2.4. По теор. 1.1 на стр. 13 $s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det \Phi_e$. Пусть $(u, v) = (e_1, e_2) \cdot M$, где M — матрица размера 2×2, по столбцам которой стоят координаты векторов u и v. Тогда по той же теор. 1.1 $s(u, v) = s(e_1, e_2) \cdot \det M$, а $s(\varphi(u), \varphi(v)) = s(f_1, f_2) \cdot \det M$, поскольку $\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) = (f_1, f_2) \cdot M$. Отсюда получается первое утверждение и пункт (а). Если $\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) \neq 0$, то векторы f_1, f_2 не пропорциональны и образуют базис в V. Отображение φ переводит вектор с координатами x в базисе e_1, e_2 в вектор с теми же самыми координатами x, но в базисе f_1, f_2. Поэтому оно биективно. Если $\det(f_1, f_2) = 0$, то $f_1 = \lambda f_2$, и значит, $\varphi(\lambda e_1) = \varphi(e_2)$, т. е. f не биективен. Это доказывает (б). Для доказательства (в) рассмотрите векторы $(f_1, f_2) = (e_1, e_2) \cdot A$ и векторы $(g_1, g_2) = (f_1, f_2) \cdot B = (e_1, e_2) \cdot AB$. По теор. 1.1 $s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det A$, а $s(g_1, g_2) = s(f_1, f_2) \cdot \det B$ и одновременно $s(g_1, g_2) = s(e_1, e_2) \cdot \det(AB)$. Последнее утверждение про матрицы проверяется прямым вычислением: $\psi\big(\varphi(e)\big) = \psi(e \cdot \Phi_e) = \psi(e) \cdot \Phi_e = e \cdot \Psi_e \cdot \Phi_e$.

Упр. 2.5. Это следует из ассоциативности композиции отображений:

$$\eta \circ (\psi \circ \varphi) = (\eta \circ \psi) \circ \varphi \, : \, v \mapsto \eta\Big(\psi\big(\varphi(v)\big)\Big)$$

и последнего утверждения предыдущего упр. 2.4.

Упр. 2.6. В первом задании воспользуйтесь разложением $\varphi = \tau_{\overrightarrow{OB}} \circ \varphi_O$ из предл. 2.5 на стр. 27. Во втором задании все площади умножаются на $\det A$ (ср. с упр. 2.4 на стр. 29).

Упр. 2.7. Вычитая $\psi(0)$ из правой и левой части равенства $\psi(0) = \psi(0+0) = \psi(0)+\psi(0)$, получаем $0 = \psi(0)$. Поскольку $\psi(\lambda) + \psi(-\lambda) = \psi(\lambda - \lambda) = \psi(0) = 0$, имеет место равенство $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$. Поэтому $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) + \psi(-\mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$. Мультипликативные версии этих равенств доказываются аналогично. Если $\psi(\lambda) = 0$ для какого-либо $\lambda \neq 0$, то $\psi(\mu) = \psi(\lambda\mu/\lambda) = \psi(\lambda)\psi(\mu/\lambda) = 0$ для всех μ.

Упр. 2.9. Обратным к $x + y\sqrt{2}$ числом является $\frac{x}{x^2-2y^2} - \frac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}$, нетривиальный автоморфизм переводит $x + y\sqrt{2}$ в $x - y\sqrt{2}$.