Письменный экзамен за второй семестр (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Парабола на евкидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) такова, что её пересечение с гиперболой $xy = 1$ на комплексной проективной плоскости[1] $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ состоит из в единственной точки $(2, 1/2)$. Напишите уравнение этой параболы и найдите её фокус.

Задача 2 (10 баллов). Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ выясните аффинный тип кривой[2]

$$x^2 + y^2 + 1 = \lambda(2x - x^2 - 2y^2 - 2xy)$$

и опишите геометрическое место центров всех центральных кривых этого пучка.

Задача 3 (10 баллов). Треугольники $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ вписаны в одну и ту же конику на $\mathbb{P}_2$. Перспективен ли треугольник со сторонами (a_1a_2), (b_1b_2), (c_1c_2) треугольнику с вершинами $(a_1b_1) \cap (a_2b_2)$, $(b_1c_1) \cap (b_2c_2)$, $(c_1a_1) \cap (c_2a_2)$?

Задача 4 (10 баллов). Точка p лежит на одной из главных осей семейства конфокальных[3] центральных коник на евклидовой плоскости. Покажите, что ГМТ точек касания с кониками семейства всевозможных касательных, опущенных на них из p, это окружность, проходящая через лежащие на другой главной оси фокусы семейства.

Задача 5 (10 баллов). С точностью до изометрических преобразований опишите все конфигурации из четырёх попарно равноудалённых друг от друга точек эллиптической плоскости.

Задача 6 (10 баллов). Коника на плоскости Лобачевского называется *орициклом*, если она перпендикулярна пучку прямых с центром на абсолюте. Верно ли, что все оритреугольники[4] на плоскости Лобачевского конгруэнтны друг другу?

Задача 7 (10 баллов). Существует ли нетождественное движение трёхмерного пространства Лобачевского, перемещающее все точки на одно и то же расстояние?

Задача 8 (10 баллов). Найдите площадь гиперболического круга радиуса r.

[1] В которую $\mathbb{R}^2$ вложено как множество вещественных точек стандартной аффинной карты U_0

[2] Напомню, что аффинная кривая второй степени в $\mathbb{R}^2$ может быть эллипсом, гиперболой, параболой, парой пересекающихся прямых, парой параллельных прямых, двойной прямой, двойной точкой или пустым множеством.

[3] Т. е. имеющих общие фокусы.

[4] Т. е. фигуры, ограниченные дугами трёх попарно соприкасающихся орициклов.