Письменный экзамен за первый семестр (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Разбейте сторону квадратного листа фанеры на три равные части при помощи карандаша и линейки без делений, проводя линии только в пределах этого листа[1].

Задача 2 (10 баллов). Опишите все окружности на евклидовой плоскости, инверсия относительно которых переводит две заданные окружности[2] друг в друга.

Задача 3 (10 баллов). В евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ известны все попарные скалярные произведения между векторами a, b и c. Найдите $([a,b],[a,c])$.

Задача 4 (10 баллов). В произвольном евклидовом пространстве заданы $m>1$ таких ненулевых векторов, что угол между любыми двумя из них тупой. Могут ли какие-нибудь $m-1$ из этих векторов оказаться линейно зависимыми?

Задача 5 (10 баллов). В четырёхмерном векторном пространстве над бесконечным полем заданы шесть векторов v_{ij}, занумерованных парами цифр $1\leqslant i<j\leqslant 4$, причём любые четыре из этих векторов линейно независимы. Покажите, что подпространства, порождённые тройками векторов[3] $\{v_{12},v_{13},v_{14}\}$, $\{v_{12},v_{23},v_{24}\}$, $\{v_{13},v_{23},v_{34}\}$, $\{v_{14},v_{24},v_{34}\}$ имеют ненулевое пересечение , если и только если подпространства, порождённые тройками векторов[4] $\{v_{12},v_{23},v_{13}\}$, $\{v_{12},v_{24},v_{14}\}$, $\{v_{13},v_{14},v_{34}\}$, $\{v_{23},v_{24},v_{34}\}$ имеют ненулевое пересечение.

Задача 6 (10 баллов). Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ стандартный кокуб[5] C и гомотетичный стандартному куб $C^*=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\mid -1/2\leqslant x_i\leqslant 1/2,\ 1\leqslant i\leqslant 4\}$ с вершинами на единичной сфере с центром в начале координат. Выпуклая оболочка вершин многогранников C и C^* называется *октаплексом*. Покажите, что полная группа октаплекса порождается отражениями в трёхмерных гиперплоскостях, подсчитайте общее число зеркал в этой группе и опишите какую-нибудь из её камер Вейля.

Задача 7 (10 баллов). Дана прямоугольная матрица $A\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и столбец $b\in\mathbb{R}^m$ той же высоты, что и матрица. Верно ли, что система неравенств $Ax\leqslant b$ на столбец $x\in\mathbb{R}^n$ имеет решение, все координаты которого неотрицательны , если и только если $yb\geqslant 0$ для любой строки y из m неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенствам $yA\geqslant 0$?

[1] Линейка позволяет дотянуться от любой точки листа до любой другой.

[2] Рассмотрите все возможные случаи их взаимного расположения: одна лежит внутри другой, пересекающиеся окружности, касающиеся окружности и не пересекающиеся окружности, не лежащие одна внутри другой.

[3] Пересечение индексов векторов каждой из этих троек непусто.

[4] Объединение индексов векторов каждой из этих троек не содержит одну из цифр.

[5] Т. е. выпуклую оболочку стандартных базисных векторов e_i и противоположных к ним векторов $-e_i$, $1\leqslant i\leqslant 4$.